RENDICONTI LINCEI

MATEMATICA E APPLICAZIONI

ALBERTO ABBONDANDOLO

Un indice di Morse medio per misure invarianti rispetto al flusso lagrangiano

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni,
Serie 9, Vol. 5 (1994), n.3, p. 213–221.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1994_9_5_3_213_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1994_9_5_3_213_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1994.

Analisi matematica. — *Un indice di Morse medio per misure invarianti rispetto al flusso lagrangiano.* Nota di ALBERTO ABBONDANDOLO, presentata (*) dal Corrisp. A. Ambrosetti.

ABSTRACT. — *A mean Morse index for invariant measures of the Lagrangian flow.* We deal with autonomous and periodic Lagrangian systems on manifolds and we introduce a mean index for invariant measures, which generalizes the mean index for periodic solutions. If the configuration space is a compact manifold with finite fundamental group, we prove that the set of mean indexes of periodic orbits is dense in $\mathbf{R}^+$. If the system is periodic, we see that there exist particular sequences of periodic orbits which converge to invariant measures with a fixed mean index.

KEY WORDS: Hamiltonian systems; Invariant measures; Periodic solutions; Morse Theory.

RIASSUNTO. — Trattiamo sistemi lagrangiani su varietà, sia autonomi che periodici, e introduciamo un indice di Morse medio per misure invarianti, che generalizza l'indice medio delle orbite periodiche. Dimostriamo che, se lo spazio delle configurazioni è una varietà compatta con gruppo fondamentale finito, gli indici medi delle orbite periodiche sono densi in $\mathbf{R}^+$. Per sistemi periodici, deduciamo l'esistenza di particolari successioni di orbite chiuse, che convergono a misure invarianti di indice medio fissato.

INTRODUZIONE

In questa *Nota* riassumiamo alcuni dei risultati ottenuti durante una ricerca sul comportamento di sistemi lagrangiani su varietà, ricerca condotta principalmente mediante tecniche di Teoria di Morse.

È molto naturale, in quest'ambito, definire l'indice medio di un'orbita T -periodica: si considera il suo indice di Morse come soluzione kT -periodica e se ne calcola la media al tendere di k all'infinito. Si vedano, ad esempio, [1, 3] per alcune applicazioni di questa costruzione.

Si deve ad Ekeland [3, Capitolo 1] l'idea di sfruttare il Teorema ergodico subadditivo di Kingman per estendere l'indice medio a traiettorie non periodiche: qua seguiamo questa linea e definiamo l'indice medio per misure di probabilità a supporto compatto, invarianti per l'azione del flusso lagrangiano. Trattiamo separatamente il caso autonomo da quello periodico, nei paragrafi 1 e 2, rispettivamente.

La speranza è quella di legare questa quantità al più geometrico numero di rotazione delle misure invarianti, come definito, per esempio, da Ruelle in [5]: l'indice di Morse medio può essere calcolato più facilmente, usando metodi topologici di ricerca di punti critici, e in particolar modo la Teoria di Morse.

Ad esempio, se la varietà delle configurazioni è compatta e ha gruppo fondamentale finito, possiamo mostrare che gli indici medi delle orbite periodiche sono densi in $\mathbf{R}^+$: dimostreremo completamente questo fatto nel paragrafo 3. Nel caso di sistemi periodici, ciò implica la presenza di successioni di orbite chiuse di periodo

(*) Nella seduta del 12 marzo 1994.

divergente e indice medio convergente, che tendono, in un senso opportuno, a nuovi insiemi invarianti, come faremo vedere nell'ultimo paragrafo.

1. SISTEMI AUTONOMI

Sia $(M, \langle \rangle)$, varietà riemanniana di dimensione d , il nostro spazio delle configurazioni. TM sarà il relativo spazio delle fasi; indichiamo gli elementi di TM come coppie (q, p) , $q \in M$, $p \in T_q M$. Consideriamo Lagrangiane $\mathcal{L}: TM \rightarrow \mathbf{R}$ della forma:

$$(1) \quad \mathcal{L}(q, p) = (1/2)\langle p, p \rangle - V(q)$$

dove $V: M \rightarrow \mathbf{R}$ è un potenziale regolare. Le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono allora come:

$$(2) \quad \nabla_t \dot{q} + V'(q) = 0$$

dove ∇_t indica la derivazione covariante di Levi-Civita lungo $\dot{q}$ e V' è il gradiente di V . Supporremo sempre che il flusso relativo a questo sistema sia completo, cioè che le soluzioni esistano su tutto $\mathbf{R}$ (questo fatto è automatico nel caso M sia compatta, non lo è altrimenti).

Il problema è variazionale: le soluzioni di (2) sono estremali del funzionale azione:

$$E_T(x) = (1/T) \int_0^T \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

definito su spazi opportuni, a seconda delle condizioni ai limiti che si vogliono imporre. In particolare, le soluzioni T -periodiche di (2) sono punti critici di E_T sulla varietà hilbertiana $\Lambda^1(M, T) = \{x \in H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}; M) \mid x(t+T) = x(t) \forall t \in \mathbf{R}\}$ il cui spazio tangente può essere espresso come $T_x \Lambda^1(M, T) = \{v \in H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}; TM) \mid \pi \circ v = x, v(t+T) = v(t) \forall t \in \mathbf{R}\}$ dove $\pi: TM \rightarrow M$ è la proiezione canonica.

Le soluzioni di (2) tali che $x(0) = x_0$ e $x(T) = x_1$ sono punti critici di E_T sulla varietà hilbertiana $\Omega^1(M, T; x_0, x_1) = \{x \in H^1([0, T]; M) \mid x(0) = x_0, x(T) = x_1\}$ il cui spazio tangente è:

$$T_x \Omega^1(M, T; x_0, x_1) = \{v \in H_0^1([0, T]; TM) \mid \pi \circ v = x\}.$$

Il differenziale secondo di E_T in un punto critico $x \in \Lambda^1(M, T)$ (rispettivamente in un punto critico $x \in \Omega^1(M, T; x_0, x_1)$) è dato dalla forma quadratica:

$$d^2 E_T(x)[v, v] = (1/T) \int_0^T [\langle \nabla_t v, \nabla_t v \rangle - K(\dot{x}, v)(\langle v, v \rangle \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - \langle v, \dot{x} \rangle^2) - \langle V''(x)v, v \rangle] dt$$

sullo spazio $T_x \Lambda^1(M, T)$ (rispettivamente $T_x \Omega^1(M, T; x_0, x_1)$). $K(v, w)$ indica la curvatura sezionale del piano generato da v e w .

Definiamo l'indice di Morse $m_\Lambda(x, T)$ (rispettivamente $m_\Omega(x, T)$) come la dimensione dell'autospazio negativo della forma quadratica $d^2 E_T(x)$ sullo spazio $T_x \Lambda^1(M, T)$ (rispettivamente $T_x \Omega^1(M, T; x_0, x_1)$): è facile verificare che $m_\Lambda(x, T)$ e $m_\Omega(x, T)$ sono entrambi finiti.

Indichiamo con $\mathcal{B}$ la σ -algebra di Borel di TM e con $\mathfrak{M}(TM)$ lo spazio delle misure di probabilità su $(TM, \mathcal{B})$.

Consideriamo il flusso $TM \times \mathbf{R} \ni (z, t) \mapsto \Phi_t(z) \in TM$ relativo al sistema (2). $\Theta(TM, \Phi)$ sarà il sottoinsieme di $\mathfrak{M}(TM)$ delle misure di probabilità μ con supporto compatto e Φ -invarianti: se $A \in \mathcal{B}$, $\mu(\Phi_t(A)) = \mu(A)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.

Se $\mu \in \Theta(TM, \Phi)$, il suo supporto è un compatto invariante per il flusso lagrangiano. Viceversa, dato un compatto $A \subset TM$ invariante per Φ , è possibile trovare una misura invariante $\mu \in \Theta(TM, \Phi)$ avente supporto contenuto in A . In generale, questa misura non è univocamente determinata.

Sia $z_0 = (q_0, p_0) \in TM$; sia $x(t) = \pi \circ \Phi_t(z_0)$ la soluzione del sistema lagrangiano, che parte da q_0 con velocità p_0 . Sia $s > 0$; definiamo $i_s(z_0)$ come l'indice di Morse di x come punto critico di E_s sulla varietà $\Omega^1(M, s; x(0), x(s))$: $i_s(z_0) = m_\Omega(x, s)$.

PROPOSIZIONE 1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) $i_s: TM \mapsto \mathbf{R}$ è inferiormente semicontinua (in particolare è misurabile rispetto alla σ -algebra di Borel).

(b) $i_s \geq 0$ ed è limitata sui compatti di TM .

(c) $i_s \geq i_r$, se $s \geq r$.

(d) $i_{s+r} \leq i_s + i_r \circ \Phi_s + d$, dove d è la dimensione di M .

(e) Se z_0 è un punto T -periodico e $x(t) = \pi \circ \Phi_t(z_0)$ è l'orbita periodica associata, risulta $i_T(z_0) \leq m_A(x, T) \leq i_T(z_0) + d$.

Vorremmo vedere che, in qualche senso, esiste il limite:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{i_s(z_0)}{s}.$$

Grazie alla proprietà (c) è sufficiente studiare il limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{i_n(z_0)}{n}$$

dove n varia tra i naturali.

Sfruttando le proprietà (b) e (d), è possibile applicare il Teorema ergodico subadditivo di Kingman (si vedano [4] e, per una dimostrazione più breve, [2]) e dimostriamo il seguente:

TEOREMA 2. *Sia $\mu \in \Theta(TM, \Phi)$; allora esiste una funzione Φ -invariante $\hat{i} \in L^1(TM, \mu)$ tale che:*

$$(1) (i_n/n) \rightarrow \hat{i} \mu - \text{quasi ovunque e in } L^1(TM, \mu).$$

$$(2) \int \hat{i} d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) \int i_n d\mu.$$

Il Teorema 2 può essere applicato in due modi diversi, che riflettono due differenti approcci ai sistemi dinamici.

Nel primo approccio oggetto di osservazione sono le singole traiettorie: supponiamo che un certo livello energetico $\Sigma_b \subset TM$ sia compatto; allora la misura di Liouville su

Σ_b , che indichiamo con μ_{Σ_b} , appartiene a $\Theta(TM, \Phi)$; il Teorema 2 ci dice che per μ_{Σ_b} -quasi ogni $z_0 \in \Sigma_b$ è ben definita una quantità $\widehat{i}(z_0)$, che chiamiamo *indice medio* della traiettoria che parte da z_0 . Dunque quasi ogni traiettoria, e non solo le periodiche, possiede un indice medio: se $M = \mathbf{R}^n$ e V è convesso, $\widehat{i}$ coincide con l'indice medio I definito da Ekeland in [3].

Se guardiamo invece insiemi invarianti più generali, o meglio le misure invarianti associate, possiamo usare il Teorema 2 per dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. L'indice medio di una misura $\mu \in \Theta(TM, \Phi)$ è definito come:

$$\tau(\mu) = \int \widehat{i} d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) \int i_n d\mu.$$

OSSERVAZIONE 1. La definizione 1 acquista un significato maggiore quando l'insieme invariante è minimale, o, in altre parole, quando $\mu \in \Theta(TM, \Phi)$ è una misura ergodica rispetto a Φ : se $A \in \mathcal{B}$ è un insieme Φ -invariante, $\mu(A) = 0$ oppure $\mu(A) = 1$. Allora la funzione $\widehat{i}$ è necessariamente costante μ -quasi ovunque, dunque:

$$\tau(\mu) = \int \widehat{i} d\mu = \widehat{i}(z) \quad \text{per } \mu - \text{q.o. } z \in TM.$$

ESEMPIO 1. Sia $z: \mathbf{R} \rightarrow TM$ una soluzione T -periodica di (2) e sia $x = \pi \circ z: \mathbf{R} \rightarrow M$ l'orbita corrispondente nello spazio delle configurazioni. A z possiamo associare la misura Φ -invariante così definita:

$$\langle \mu, \varphi \rangle = (1/T) \int_0^T \varphi(z(t)) dt$$

per ogni φ continua e limitata su TM . È immediato verificare che $\mu \in \Theta(TM, \Phi)$ e che in più μ è ergodica, perciò:

$$\tau(\mu) = \widehat{i}(z_0) \quad \text{per } \mu - \text{q.o. } z_0 \in TM.$$

Inoltre, poiché $\widehat{i}$ è Φ -invariante, $\widehat{i}(z_0) = \tau(\mu)$ per tutti i punti z_0 che appartengono all'orbita. D'altra parte, per la proprietà (e) delle funzioni i_n :

$$\widehat{i}(z_0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{m_\Omega(x, s)}{s} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m_\Omega(x, kT)}{kT} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m_\Lambda(x, kT)}{kT}.$$

La quantità a destra è l'indice medio (o twisting number) di una soluzione periodica, come definito in [1] oppure in [3]. Dunque l'indice medio che abbiamo definito per le misure invarianti generalizza quello classico per le orbite periodiche.

Ricordiamo che la topologia debole delle misure è la topologia più debole tra quelle che rendono continua l'integrazione delle funzioni continue e limitate. È utile la seguente proprietà di continuità dell'indice medio rispetto a questa topologia:

TEOREMA 3. Siano $\mu_n \in \Theta(TM, \Phi)$ misure invarianti aventi supporto contenuto in un compatto $A \subset TM$; se $\mu_n \rightarrow \mu_\infty$ nella topologia debole delle misure, allora $\mu_\infty \in \Theta(TM, \Phi)$ e $\tau(\mu_n) \rightarrow \tau(\mu_\infty)$.

OSSERVAZIONE 2. I risultati di questo paragrafo valgono anche per Lagrangiane più

generali di quella scelta da noi. Tutto quello che serve è la completezza del flusso e la possibilità di definire un indice di Morse per le traiettorie che soddisfino le proprietà elencate nella Proposizione 1.

2. SISTEMI PERIODICI

Supponiamo ora che il potenziale V dipenda anche dal tempo, e che sia T_0 -periodico: $V(q, t + T_0) = V(q, t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Studiamo quindi il problema:

$$(3) \quad \nabla_t \dot{q} + V'(q, t) = 0.$$

In questo caso è conveniente vedere il sistema (3) come un sistema dinamico discreto: se $\Phi_t(z)$ risolve (3) con la condizione iniziale $\Phi_0(z) = z$, poniamo $\Psi^r = \Phi_{T_0}$. Per la periodicità della Lagrangiana, $\Phi_{nT_0} = \Psi^n$.

Indichiamo questa volta con $\Theta(TM, \Psi)$ il sottoinsieme di $\mathfrak{M}(TM)$ costituito dalle misure di probabilità Ψ -invarianti e con supporto compatto.

ESEMPIO 2. In questo caso ad una orbita di periodo minimale kT_0 , $k \in \mathbf{N}$, è associato un insieme Ψ -invariante costituito da k punti $\{z_0, \Psi(z_0), \dots, \Psi^{k-1}(z_0)\}$. Questo insieme è il supporto della misura $\mu \in \Theta(TM, \Psi)$:

$$\mu = \frac{1}{k} \sum_{b=0}^{k-1} \delta_{\Psi^b(z_0)}$$

dove δ_z è la misura di Dirac concentrata in z .

A questo punto si definisce i_s come in precedenza, ma solo per $s = nT_0$, $n \in \mathbf{N}$. Possiamo riscrivere la Proposizione 1 come:

PROPOSIZIONE 4. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) $i_{nT_0}: TM \rightarrow \mathbf{R}$ è inferiormente semicontinua (in particolare è misurabile rispetto alla σ -algebra di Borel).

(b) $i_{nT_0} \geq 0$ ed è limitata sui compatti di TM .

(c) $i_{nT_0} \geq i_{mT_0}$ se $n \geq m$.

(d) $i_{(n+m)T_0} \leq i_{nT_0} + i_{mT_0} \circ \Psi^n + d$, dove d è la dimensione di M .

(e) Se z_0 è un punto kT_0 -periodico e $x(t) = \pi \circ \Phi_t(z_0)$ è l'orbita periodica associata, risulta $i_{kT_0}(z_0) \leq m_\Lambda(x, kT_0) \leq i_{kT_0}(z_0) + d$.

L'equivalente del Teorema 2 è invece:

TEOREMA 5. *Sia $\mu \in \Theta(TM, \Psi)$, allora esiste una funzione Ψ -invariante $\widehat{i} \in L^1(TM, \mu)$ tale che:*

$$(1) \quad (i_{nT_0}/(nT_0)) \rightarrow \widehat{i} \mu - \text{quasi ovunque e in } L^1(TM, \mu).$$

$$(2) \quad \int \widehat{i} d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1/(nT_0)) \int i_{nT_0} d\mu.$$

Il Teorema 5 ci permette di definire l'indice medio per una misura Ψ -invariante:

DEFINIZIONE 2. *L'indice medio di una misura $\mu \in \Theta(TM, \Psi)$ è definito come:*

$$\tau(\mu) = \int \widehat{\tau} d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1/(nT_0)) \int i_{nT_0} d\mu.$$

Se ad una soluzione kT_0 -periodica associamo una misura Ψ -invariante, come nell'Esempio 2, il suo indice medio coincide con l'indice medio classico (si confronti l'Esempio 1).

Infine il Teorema 3 diventa:

TEOREMA 6. *Siano $\mu_n \in \Theta(TM, \Psi)$ misure Ψ -invarianti aventi supporto contenuto in un compatto $A \subset TM$; se $\mu_n \rightarrow \mu_\infty$ nella topologia debole delle misure, allora $\mu_\infty \in \Theta(TM, \Psi)$ e $\tau(\mu_n) \rightarrow \tau(\mu_\infty)$.*

3. UN RISULTATO DI DENSITÀ

In questo paragrafo considereremo sia sistemi autonomi che sistemi periodici: T_0 sarà un numero positivo arbitrario nel primo caso, sarà il periodo di $V(q, \cdot)$ nel secondo.

Dimostriamo il seguente fatto:

TEOREMA 7. *Supponiamo che la varietà delle configurazioni M sia compatta e abbia gruppo fondamentale finito. Allora l'insieme degli indici medi delle orbite chiuse di periodo multiplo di T_0 è denso nella semiretta reale positiva $\mathbf{R}^+$.*

Per la dimostrazione faremo uso del seguente risultato di Teoria di Morse:

TEOREMA 8. *Sia Λ una varietà hilbertiana completa e sia $f: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2 , limitata inferiormente, che soddisfa la condizione di Palais-Smale e tale che il differenziale secondo in ogni punto critico sia un operatore di Fredholm.*

Sia $\mathbf{F}$ un campo qualsiasi e supponiamo che $H_q(\Lambda, \mathbf{F}) \neq 0$. Poniamo: $\Gamma_q = \{A \subset \Lambda \mid i_q(H_q(A)) \neq 0\}$ dove i_q è l'applicazione indotta dall'inclusione $i: A \hookrightarrow \Lambda$.

Allora è ben definito il numero reale:

$$c_q = \inf_{A \in \Gamma_q} \sup_{x \in A} f(x)$$

ed esiste x , punto critico di f , tale che $f(x) = c_q$ e $m(x) \leq q \leq m^(x)$ (m e m^* indicano l'indice di Morse, rispettivamente stretto e largo, di x).*

Grazie alla compattezza di M possiamo applicare il Teorema 8 al funzionale azione E_T sulla varietà $\Lambda^1(M, T)$.

Consideriamo inizialmente il caso in cui M è semplicemente connessa. Siano α e ε numeri positivi fissati.

Sia a_n l'indice dell' n -esimo numero di Betti di $\Lambda^1(M, T)$ diverso da zero. Essendo M compatta e semplicemente connessa, esistono infiniti numeri di Betti di $\Lambda^1(M, T)$ diversi da zero (si veda [6]).

$\{a_n\}$ è una successione strettamente crescente di naturali: se k è un numero positivo, è facile vedere che l'insieme $Y_k = \{a_n / (bT_0) \mid n, b \in \mathbf{N}, b \geq k\}$ è denso in $\mathbf{R}^+$. Possiamo dunque trovare $a_{\bar{n}}$ e b tali che:

$$(4) \quad |\alpha - a_{\bar{n}} / (bT_0)| < \varepsilon / 2,$$

$$(5) \quad d / (bT_0) < \varepsilon / 2.$$

Sia $T = bT_0$; per il Teorema 8 esiste $x \in \Lambda^1(M, T)$ punto critico di E_T tale che:

$$(6) \quad m_\Lambda(x, T) \leq a_{\bar{n}} \leq m_\Lambda^*(x, T).$$

Se x è una soluzione T -periodica del sistema (3) e τ è il suo indice medio, vale la seguente stima (si veda [1]):

$$(7) \quad m_\Lambda^*(x, T) - d \leq T\tau \leq m_\Lambda(x, T) + d.$$

Dalle formule (4), (5), (6) e (7) segue che $|\tau - \alpha| < \varepsilon$.

Il Teorema è dunque dimostrato nel caso in cui M è semplicemente connessa. Se il gruppo fondamentale di M è finito, il suo rivestimento universale $\tilde{M}$ è compatto: possiamo considerare il sistema sollevato su $\tilde{M}$ ed ottenere, per quest'ultimo, la densità degli indici medi. Proiettando una soluzione periodica del sistema sollevato su M , si ottiene una soluzione periodica del sistema originale con lo stesso indice medio. Da qui la tesi.

OSSERVAZIONE 3. Non è possibile eliminare completamente le ipotesi sulla topologia di M : se M ha curvatura sezionale negativa (in particolare, se è compatta, non può avere gruppo fondamentale finito) tutte le geodetiche chiuse hanno indice medio zero (si veda l'espressione di $d^2 E_T(x)$ per $V = 0$).

4. UN'APPLICAZIONE AL CASO NON AUTONOMO

Nel caso di un sistema T_0 -periodico, dal Teorema 8 possiamo dedurre l'esistenza di particolari successioni di subarmoniche. Assumiamo la seguente ipotesi di non degenerazione:

(ND) *Tutte le orbite chiuse del sistema (3) hanno periodo multiplo di T_0 .*

Vale allora il seguente:

TEOREMA 9. *Supponiamo che la varietà delle configurazioni M sia compatta e abbia gruppo fondamentale finito. Supponiamo inoltre che il sistema (3) verifichi la condizione (ND). Sia α , un numero reale positivo che non sia indice medio di alcuna soluzione periodica. Allora*

esiste una successione di orbite chiuse x_n di periodo minimo $T_n = k_n T_0$ e indice medio τ_n tale che:

$$(A) T_n \rightarrow +\infty,$$

$$(B) \tau_n \rightarrow \alpha.$$

Osserviamo che, in condizioni di genericità, il sistema non autonomo (3) ha al più un insieme numerabile di soluzioni periodiche: dunque a quasi tutti i numeri reali positivi α è possibile applicare il Teorema 9.

OSSERVAZIONE 4. È possibile dimostrare l'equivalente del Teorema 9 anche per sistemi autonomi: se α è un numero reale positivo che non sia indice medio di alcuna orbita chiusa, esiste una successione di soluzioni x_n , di periodo $T_n \rightarrow +\infty$ e indice medio $\tau_n \rightarrow \alpha$ (non si tratta necessariamente di subarmoniche).

In questo caso, però, nulla impedisce che l'indice medio assuma tutti i valori reali positivi sulle orbite periodiche, e che dunque non esistano numeri reali α a cui applicare il Teorema.

Nel caso in cui M abbia curvatura sezionale positiva, è possibile localizzare la successione di orbite chiuse prevista dal Teorema 9, in termini della loro azione lagrangiana media:

PROPOSIZIONE 10. *Supponiamo soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema 9. Inoltre M abbia curvatura sezionale positiva. Allora la successione di orbite chiuse prevista dal Teorema 9 è tale che:*

$$(C) E_{T_n}(x_n) \text{ è uniformemente limitata.}$$

Dalla stima (C) segue che le orbite x_n sono tutte confinate entro un compatto dello spazio delle fasi TM . Siano $\mu_n \in \Theta(TM, \mathcal{F})$ le misure associate a x_n come nell'Esempio 2: si tratta di misure di probabilità con supporti contenuti in un medesimo compatto, e dunque, a meno di estrarre una sottosuccessione, convergono nella topologia debole delle misure ad una certa μ_∞ . Dal Teorema 6 segue allora:

PROPOSIZIONE 11. *Supponiamo soddisfatte tutte le ipotesi dei Teoremi 9 e 10. Allora la successione di orbite periodiche x_n prevista dal Teorema 9 è tale che:*

$$(D) x_n \text{ converge, nella topologia debole delle misure, ad una misura di probabilità } \mathcal{F}\text{-invariante } \mu_\infty, \text{ a supporto compatto, avente indice medio } \alpha.$$

Nonostante le misure μ_n siano tutte ergodiche rispetto a $\mathcal{F}$, non è possibile dire lo stesso della misura limite μ_∞ : non possiamo dunque escludere che μ_∞ sia, ad esempio, una combinazione convessa di misure associate ad orbite periodiche. In questo caso non avremmo trovato un insieme invariante nuovo, ma solo l'unione di insiemi invarianti già conosciuti. Questa situazione è certamente possibile per alcuni valori di α , ma riteniamo, pur non potendolo dimostrare, che per la maggior parte dei valori di α si trovino oggetti invarianti di tipo diverso.

BIBLIOGRAFIA

- [1] V. BENCI, *A new approach to the Morse-Conley Theory and some applications*. Ann. Mat. Pura Appl., (4), 158, 1991, 231-305.
- [2] Y. DERRIENNIC, *Sur le théorème ergodique sous-additif*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 281 A, 1975, 985-988.
- [3] I. EKELAND, *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1990.
- [4] J. F. C. KINGMAN, *The ergodic theory of subadditive stochastic processes*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 30, 1968, 499-510.
- [5] D. RUELLE, *Rotation numbers for diffeomorphisms and flows*. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., 42, 1985, 109-115.
- [6] M. VIGUÉ-POIRRIER - D. SULLIVAN, *The homology theory of the closed geodesic problem*. J. Differential Geom., 11, 1976, 633-644.

Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7 - 56126 PISA