Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Luigi Stazi

Qualche osservazione sulle forze centrali in Relatività Ristretta

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, *Serie 9*, Vol. **6** (1995), n.2, p. 111–115.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1995_9_6_2_111_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1995.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 6:111-115 (1995)

Fisica matematica. — *Qualche osservazione sulle forze centrali in Relatività Ristretta.* Nota di Luigi Stazi, presentata (*) dal Socio G. Grioli.

Abstract. — *Some observations on central forces in Special Relativity.* In the framework of Special Relativity, the kinds of central force, under which a point moves along a closed trajectory (if limited), for each value of energy, are determined.

Key words: Special Relativity; Particle dynamics; Central forces; Closed orbits.

Riassunto. — In Relatività Ristretta si caratterizzano le forze centrali per cui le orbite al finito sono necessariamente chiuse ed ellittiche, per qualunque valore dell'energia.

Introduzione

In Meccanica classica, un teorema fondamentale di Bertrand [1] afferma che, nell'ambito dei moti centrali, esistono due sole leggi di forza per le quali le traiettorie (se al finito) sono chiuse qualunque sia il valore dell'energia: si tratta della forza gravitazionale e della forza elastica. In entrambi i casi l'orbita è un'ellisse; il centro di forza ne occupa rispettivamente un fuoco ovvero il centro.

Il problema di Bertrand si può porre anche in Relatività Ristretta, con le dovute restrizioni. Innanzitutto la nozione di campo centrale è valida solo nell'ambito di un Riferimento galileiano; inoltre, a differenza del caso classico, occorre tener conto della variabilità della massa che, notoriamente, viene a dipendere dalla velocità. Ciò fa sì che, nell'equazione risolvente della traiettoria, il potenziale efficace venga a dipendere anche dall'energia. Si può allora formulare il seguente problema relativo alle traiettorie isoenergetiche: determinare le forze centrali per cui il punto, possedendo un'energia totale H assegnata a piacere, descriva una traiettoria che, se è al finito, è necessariamente chiusa.

Si ritrovano così due soli tipi di forza, dipendenti da H, che generalizzano al caso relativistico quelle classiche di Bertrand; le traiettorie corrispondenti sono ancora ellittiche, come nel caso classico.

1. Moti centrali in Relatività Ristretta. Integrali primi dell'energia e delle aree

Richiamiamo innanzitutto le nozioni essenziali sui moti centrali (cfr. [2, p. 131]). Supponiamo che, nell'ambito di un Riferimento galileiano, la forza relativa $\boldsymbol{F}$ che si esercita su di un punto P sia centrale ed attrattiva, cioè diretta verso un punto fisso O, e funzione della distanza $\rho = |OP| : \boldsymbol{F} = \varphi(\rho)\,\boldsymbol{u}$ (1) con $\boldsymbol{u} =$ vers. OP, $\varphi(\rho) < 0$.

Supponiamo altresì che la *massa propria* del punto: m_0, resti costante durante il mo-

(*) Nella seduta del 3 novembre 1994.

(1) Questa legge di forza, in Relatività, non ha carattere intrinseco, ma dipende dal Riferimento: al variare di quest'ultimo, la forza muta secondo la legge di cui a [2, p. 99].

to (particella priva di struttura interna). In tal caso la potenza termica è nulla, e il teorema dell'energia diviene conseguenza dell'equazione di moto. Esso dà luogo all'integrale primo

$$mc^2 + V(\rho) = H\,, \tag{1}$$

essendo $V(\rho)$ l'energia potenziale:

$$V(\rho) = -\int \varphi(\rho)\,d\rho\,, \tag{2}$$

ed H la costante dell'energia; quest'ultima, dato che $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, è del tipo

$$H = m_0c^2(1 - v_0^2/c^2)^{-1/2} + V(\rho_0)\,, \tag{3}$$

e pertanto è determinata dai valori iniziali della velocità e della distanza di P dal centro di forza.

Accanto all'integrale dell'energia, sussiste, come classicamente, quello delle aree:

$$OP \times m\boldsymbol{v} = m_0\boldsymbol{k}\,, \tag{4}$$

il quale porta a distinguere due casi:

a) $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$, ovvero $\boldsymbol{v}_0 \| OP_0$. Il moto è rettilineo per O, ed è regolato dall'equazione (cfr. [2, p. 132]) $m_0\ddot{\rho}(1 - \dot{\rho}^2/c^2)^{-3/2} = \varphi(\rho)$;

b) $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$: il moto si svolge sul piano per O individuato da P_0 e $\boldsymbol{v}_0$. Introdotto un sistema di coordinate polari (ρ, θ) con origine in O, la (4) si traduce in

$$m\rho^2\dot{\theta} = m_0k \tag{5}$$

ove la «costante delle aree» k dipende da v_0, ρ_0, e $\dot{\theta}_0$.

È il caso *b*) quello di cui ci occuperemo.

2. Velocità e accelerazione in coordinate polari

Anche in Relatività Ristretta, come in Meccanica classica, la conoscenza della traiettoria: $\rho = \rho(\theta)$ consente di ricavare le componenti radiale e trasversa della velocità e dell'accelerazione in termini geometrici, la legge temporale di percorrenza essendo desunta a posteriori dall'integrale delle aree (5).

Posto che $v_\rho = \dot{\rho}$, e che $v_\theta = \rho\dot{\theta}$, vista la (5) si avrà

$$v_\rho = -k(m_0/m)(1/\rho)'\,, \qquad v_\theta = k(m_0/m)(1/\rho)\,, \qquad (\;)' = d(\;)/d\theta\,, \tag{6}$$

ovvero, in termini dell'impulso $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$:

$$p_\rho = -km_0(1/\rho)'\,, \qquad p_\theta = km_0(1/\rho)\,. \tag{7}$$

Da quest'ultima, e dal legame generale: $m = (m_0^2 + p^2/c^2)^{1/2}$, si ricava l'espressione di m in funzione della traiettoria:

$$m = m_0\{1 + k^2c^{-2}[(1/\rho)^2 + (1/\rho)'^2]\}^{1/2}\,, \tag{8}$$

sicché i secondi membri della (6) si esprimono in termini della sola $\rho(\theta)$. Passando all'accelerazione: $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$, $a_\theta = (1/\rho)d(\rho^2\dot{\theta})/dt$, dato che

$$\ddot{\rho} = dv_\rho/dt = -k^2 m_0^2 m^{-2}\rho^{-2}(1/\rho)'' + km_0 m^{-2}\dot{m}(1/\rho)',$$

risulta

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} a_\rho = km_0 m^{-2}\dot{m}(1/\rho)' - k^2 m_0^2 m^{-2}\rho^{-2}\{(1/\rho)'' + (1/\rho)\}, \\ a_\theta = -km_0 m^{-2}\dot{m}(1/\rho). \end{cases}$$

D'altra parte, data la (8), si deve intendere

$$\dot{m} = (dm/d\theta)\,\dot{\theta} = k^3 m_0^3 (mc\rho)^{-2}(1/\rho)'\,\{(1/\rho)'' + (1/\rho)\},$$

sicché, in definitiva, la (9) diviene

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} a_\rho = -k^2 m_0^2 (m\rho)^{-2}[1 - k^2 m_0^2 (mc)^{-2})(1/\rho)'^2]\{(1/\rho)'' + (1/\rho)\}, \\ a_\theta = -k^4 m_0^4 m^{-4} c^{-2}\rho^{-3}(1/\rho)'\,\{(1/\rho)'' + (1/\rho)\}. \end{cases}$$

La $(10)_1$ costituisce l'*estensione relativistica* della formula di Binet, dalla quale differisce per termini dell'ordine di $1/c^2$ almeno; la $(10)_2$ mette invece in evidenza un effetto tipicamente relativistico (classicamente a_θ è nulla).

3. Equazione risolvente

Riprendiamo ora l'equazione fondamentale della dinamica relativistica:

$$d(m\boldsymbol{v})/dt = \boldsymbol{F} \sim \dot{m}\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F};$$

proiettata (nel piano del moto) su $\boldsymbol{u}$ e rispettivamente sul versore normale $\boldsymbol{\tau}$, essa si traduce nelle due equazioni

$$\text{(11)} \qquad \dot{m}v_\rho + ma_\rho = \varphi(\rho), \qquad \dot{m}v_\theta + ma_\theta = 0.$$

La seconda, in virtù delle $(6)_2$-$(9)_2$, è una identità; la $(11)_1$, vista la $(9)_1$, si riduce invece alla condizione

$$\text{(12)} \qquad -k^2 m_0^2 m^{-1}\rho^{-2}\{(1/\rho)'' + (1/\rho)\} = \varphi(\rho);$$

in virtù della (8), essa costituisce un'equazione del 2° ordine in $\rho(\theta)$, atta a determinare la traiettoria a partire dai valori iniziali ρ_0 e ρ_0'.

Con l'intervento dell'energia potenziale $V(\rho)$, e ricavando la massa m dalla (1), essa si scrive

$$\text{(12)}' \qquad (1/\rho)'' + (1/\rho) = [H - V(\rho)]\,\chi^{-2}\rho^2\,dV(\rho)/d\rho,$$

ove si è posto $\chi = m_0 kc$; di qui, passando alla variabile $\xi = 1/\rho$:

$$\text{(13)} \qquad \xi'' = -\xi + (1/2\chi^2)\,d[V(\xi) - H]^2/d\xi.$$

La (13) è un'equazione della forma $\xi'' = f(\xi)$, tipica del moto unidimensionale; essa ammette l'«integrale dell'energia»:

$$\text{(14)} \qquad (1/2)\xi'^2 + \mathcal{V}(\xi) = \mathcal{E}$$

con

$$\text{(15)} \qquad \mathcal{V}(\xi) \equiv (1/2)\,\xi^2 + V(\xi)[H - V(\xi)/2]\,\chi^{-2}.$$

Naturalmente la costante $\mathcal{E}$ non ha il significato fisico di energia totale, il quale compete invece ad H. Più precisamente, tenendo conto delle (6), nonché della (1) per esprimere $V(\xi_0)$, si trae il legame

$$\mathcal{E} = (H^2 - m_0^2 c^4)/(2\chi^2)\,, \qquad \chi \equiv m_0 ck\,, \tag{16}$$

sicché $\mathcal{E}$ è legata ad H^2.

La (14) corrisponde al legame classico: $(1/2)m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) = E$, tra la parte radiale dell'energia cinetica e l'energia potenziale efficace (E essendo la somma dell'energia cinetica classica e di quella potenziale); più precisamente, ne differisce per termini dell'ordine di $1/c^2$, come si riconosce tenendo conto delle (6) e del fatto che $H \simeq m_0 c^2 + E$.

4. Il caso di orbite chiuse

Nell'ambito di un campo di forze $\varphi(\rho)$, di energia potenziale $V(\rho)$ e costante delle aree k, *la conoscenza dell'energia totale H consente di precisare*, come dalla (1), *il valore della massa*; successivamente la (12) vale a determinare la traiettoria corrispondente ai valori assegnati di H e k. Tuttavia, a differenza di quanto accade classicamente (massa costante), i valori di H e k intervengono anche nella funzione $V(\xi)$ di cui alla (15); pertanto, volendo utilizzare la (14) per un'analisi qualitativa delle orbite, bisognerà tener conto della dipendenza dalle costanti dette, H e k, di entrambe le grandezze $\mathcal{E}$ e V.

In ogni caso, fissate che siano H e k, la (14) si presta in modo efficace alla determinazione della traiettoria, nonché, se l'orbita è al finito, al calcolo dell'angolo α corrispondente a due successivi passaggi al perielio ξ_1, o all'afelio ξ_2 (soluzioni dell'equazione $\mathcal{E} = V(\xi)$):

$$\alpha = 2\int_{\xi_1}^{\xi_2} \{2[\xi - V(\xi)]\}^{-1/2} d\xi\,. \tag{17}$$

Ci si può chiedere ora se esistano campi di forze per cui l'*orbita, se è al finito, è necessariamente chiusa*, ovvero se l'integrale (17) vale $(n'/n)2\pi\ \forall\mathcal{E}$, essendo n ed n' numeri interi.

Un classico teorema di Bertrand [1] assicura che tale circostanza si verifica se e solo se $V(\xi)$ è del tipo

$$V(\xi) = \begin{cases} -\lambda\xi + \xi^2/2\,, \\ \lambda\xi^{-2}/2 + \xi^2/2\,, \end{cases} \tag{18}$$

essendo λ un parametro positivo: $\lambda > 0$. Vista la (15), ne consegue per $V(\xi)$ l'espressione

$$V(\xi) = \begin{cases} H - (H^2 + 2A\xi)^{1/2}\,, \\ H - (H^2 - A\xi^{-2})^{1/2}\,, \end{cases} \tag{19}$$

ove si è posto $A = \chi^2\lambda$, e si è scelto il segno meno davanti al radicale per il carattere attrattivo della forza: $dV/d\xi < 0$; quanto alla costante additiva H, la sua presenza fa sì che risulti $V(\xi) = 0$ per $\xi \to 0$, ∞ rispettivamente. La forza $\varphi(\rho)$ corrispondente alla $(19)_1$, ove A è una costante arbitraria:

$$(20) \qquad \varphi(\rho) = -A\rho^{-2}(H^2 + 2A/\rho)^{-1/2}$$

generalizza, al caso relativistico, la forza di attrazione newtoniana, alla quale si riduce per $c \to \infty$. *Qualunque sia l'energia* H che compete al punto, *le traiettorie corrispondenti, se al finito, sono chiuse* e, come classicamente, *ellissi aventi un fuoco nel centro di forza.*

Nel caso $(19)_2$, la forza corrispondente

$$(21) \qquad \varphi(\rho) = -A(H^2 - A\rho^2)^{-1/2}\rho$$

generalizza invece quella elastica, e le traiettorie corrispondenti sono ellittiche con centro in O (2).

Le leggi (20) e (21) rappresentano le sole forze centrali per cui le orbite siano ellissi aventi un fuoco, ovvero il centro, in O. Infatti, nel primo caso, l'equazione $\xi = (1 + e\cos\theta)/p$ $(e < 1)$ soddisfa la (13) se e solo se vale la $(19)_1$:

$$V(\xi) = H - (H^2 + 2\chi^2\xi/p)^{1/2} \qquad (\lambda = 1/p).$$

Nel secondo caso, scritta l'equazione dell'ellisse nella forma

$$\xi^2 = (a^2 \sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)/a^2b^2$$

risulta $\xi^2\xi'^2 = (\xi^2 - 1/a^2)(1/b^2 - \xi^2)$, nonché $\xi'' = -\xi + a^{-2}b^{-2}\xi^{-3}$, in modo che la (13) diviene

$$d[V(\xi) - H]^2/d\xi = 2\chi^2(ab)^{-2}\xi^{-3};$$

se ne trae

$$V(\xi) = H - \sqrt{H^2 - \chi^2(ab\xi)^{-2}} \qquad (\lambda = 1/a^2b^2).$$

Bibliografia

[1] J. Bertrand, *Theorème relatif au movement d'un point attiré vers un centre fixe.* Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 77, 1873, 849-853.

[2] G. Ferrarese, *Lezioni di Meccanica Relativistica.* Pitagora ed., Bologna 1985.

[3] A. Pignedoli, *Sul moto centrale di un punto di massa veloce.* Boll. U.M.I., 13, 1958, 341-350.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 5 - 00185 Roma

(2) Per provare l'asserto nei due casi, detto θ l'angolo tra il perielio e la generica posizione, dalla (14), integrando tra ξ_1 e ξ si ottiene rispettivamente: $\xi = \lambda + \sqrt{2\mathcal{E} + \lambda^2}\cos\theta$, con $-\lambda^2/2 < \mathcal{E} < 0$, e $\xi^2 = \mathcal{E} - \sqrt{\mathcal{E}^2 - \lambda}\cos 2\theta$.