Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei Matematica e Applicazioni

Alberto Farina

Spazi BV e di Nikolskii e applicazioni al problema di Stefan

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **6** (1995), n.3, p. 143–154.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1995_9_6_3_143_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1995.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 6:143-154 (1995)

Analisi funzionale. — *Spazi BV e di Nikolskii e applicazioni al problema di Stefan.* Nota di Alberto Farina, presentata (*) dal Socio E. Magenes.

Abstract. — *BV and Nikolskii spaces and applications to the Stefan problem.* The aim of this *Note* is to show some properties of BV and Nikolskii spaces that to my knowledge are not present in the literature in their general form here presented; by this I mean the lack of separability, their being the dual of a separable-space, the convergence and the weak-star compactness in $L^{\infty}_{W^*}(0, T; N^{\lambda}(\Omega))$ and finally their applications to the well-known two-phase Stefan problem.

Key words: BV and Nikolskii spaces; Interpolation theory; Stefan problem.

Riassunto. — Questa *Nota* è dedicata a mettere in evidenza alcune proprietà degli spazi $BV(\Omega) = N^1(\Omega)$ delle funzioni a variazione limitata e degli spazi di Nikolskii $N_1^{\lambda}(\Omega) = N^{\lambda}(\Omega)$ ed $N^{\lambda,0}(\Omega)$, $(\lambda \in (0, 1))$, che non mi risulta siano già state esposte nella forma generale qui enunciata, quali la non separabilità, l'essere il duale di uno spazio di Banach separabile, la convergenza e la compattezza debole $*$ in $L^{\infty}_{W^*}(0, T; N^{\lambda}(\Omega))$ e le loro applicazioni al classico problema di Stefan bifase.

1. Notazioni, definizioni e osservazioni preliminari

In tutta la *Nota* supporrò: Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, $\lambda \in (0, 1]$, $\theta \in [0, 1]$, $p \in [1, +\infty]$, $q \in [1, +\infty]$, $\delta \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbf{N}_0$, X_0 e X_1 spazi di Banach con X_1 immerso con continuità in X_0 $(X_1 \hookrightarrow X_0)$.

Definizione 1.1. *Lo spazio $N^{\lambda}(\Omega)$ è definito da:*

$$\left\{ u \in L^1(\Omega) : p_{\lambda}(u) := \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^N \\ h \neq \underline{0}}} \int_{\Omega_{|h|}} \frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|^{\lambda}} \, dx < +\infty \right\}$$

(ove $\Omega_{\delta} := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$).

Lo spazio $N^{\lambda}(\Omega)$ munito della norma $\|u\|_{N^{\lambda}} := \|u\|_{L^1} + p_{\lambda}(u)$ è uno spazio di Banach. È ben noto (cfr. [7, Teor. IX.3]) che lo spazio $N^1(\Omega)$ coincide con lo spazio $BV(\Omega)$ delle funzioni a variazione limitata.

Definizione 1.2. *Lo spazio $N^{\lambda, 0}(\Omega)$ è definito da*:

$$\left\{ u \in N^{\lambda}(\Omega) : \int_{\Omega_{|h|}} |u(x+h) - u(x)| \, dx = o(|h|^{\lambda}),\ |h| \to 0 \right\}.$$

Lo spazio $N^{\lambda, 0}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $N^{\lambda}(\Omega)$.

(*) Nella seduta del 3 novembre 1994.

DEFINIZIONE 1.3. *Lo spazio* $\mathcal{M}_{W^*}(\Omega, X_0')$ *delle funzioni debole * misurabili è definito da:*

$$\{u\colon \Omega \to X_0' : \forall x \in X_0, \langle x, u\rangle\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ è } \textit{misurable}\}$$

dove la notazione $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *indica la dualità fra* X_0 *ed* X_0'.

DEFINIZIONE 1.4. *Lo spazio* $L^p_{W^*}(\Omega; X_0')$ *è definito da:*

$$\{u \in \mathcal{M}_{W^*}(\Omega, X_0')\colon \|u\|_{X_0'} \in L^p(\Omega)\}.$$

Lo spazio $L^p_{W^*}(0, T; X_0')$ *è uno spazio di Banach* (cfr., ad es. [11, 15]).

Indicherò con $\mathcal{L}(X_0, X_1)$ lo spazio di Banach delle applicazioni lineari e continue definite su X_0 ed a valori in X_1.

DEFINIZIONE 1.5. *Un aperto* Ω *si chiama* dominio di estensione *per lo spazio* N^λ *se esiste* $T \in \mathcal{L}(N^\lambda(\Omega), N^\lambda(\mathbb{R}^N))$ *tale che:* $T(u)|_\Omega = u$, $\forall u \in N^\lambda(\Omega)$. *L'operatore* T *prende il nome di* operatore di prolungamento.

È noto (cfr. [4]) che gli aperti con la proprietà di cono sono domini di estensione per N^λ. Se u è una funzione definita in Ω indicherò con $\tilde{u}$ il suo prolungamento a zero in $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Indicherò con $\mathrm{M}((\Omega, \beta_\Omega), \mathbb{R})$ l'insieme delle misure regolari a valori in $\mathbb{R}$ ed a variazione totale limitata definite sulla σ-algebra β_Ω dei Boreliani di Ω.

2. Risultati preliminari

Parte dei risultati saranno ottenuti usando la teoria dell'interpolazione fra spazi di Banach. Per la definizione dell'usuale spazio di interpolazione $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ si vedano, ad es. [1, 9]. La norma in questo spazio di Banach sarà indicata con $\|\cdot\|_{\theta,p}$.

Inizio con il riportare una caratterizzazione degli spazi di interpolazione $(X_0, X_1)_{\lambda,\infty}$ che è immediata conseguenza della loro definizione (cfr. [18]).

TEOREMA 2.1. *A) Se* u *appartiene allo spazio* $(X_0, X_1)_{\lambda,\infty}$, *allora esiste una successione* $\{u_n\}$ *di elementi di* X_1 *tale che per ogni* $n \in \mathbf{N}_0$

$$\|u - u_n\|_{X_0} \leq 2\|u\|_{\lambda,\infty} 2^{-n\lambda}, \qquad \|u_n\|_{X_1} \leq 2\|u\|_{\lambda,\infty} 2^{-n(\lambda-1)}.$$

B) Se $u \in X_0$ *ed esistono una successione* $\{u_n\}$ *di elementi di* X_1 *ed una costante* C *non negativa (indipendente da* n*) tale che per ogni* $n \in \mathbf{N}_0$

$$\|u - u_n\|_{X_0} \leq C 2^{-n\lambda}, \qquad \|u_n\|_{X_1} \leq C 2^{-n(\lambda-1)},$$

allora $u \in (X_0, X_1)_{\lambda,\infty}$ *e* $\|u\|_{\lambda,\infty} \leq 3C + \|u\|_{X_0}$.

C) Se $u \in (X_0, X_1)_{\lambda,\infty}$, *allora esistono una successione* $\{v_n\}$ *di elementi di* X_1 *ed una costante* $C > 0$ *(indipendente da* u *e da* n*) tali che per ogni* $n \in \mathbf{N}_0$

$$\left\| u - \sum_{j=0}^{n} v_j \right\|_{X_0} \leq C\|u\|_{\lambda,\infty} 2^{-n\lambda},$$

$$\|v_n\|_{X_1} \leq C\|u\|_{\lambda,\infty} 2^{-n(\lambda-1)}, \qquad \|v_n\|_{X_0} \leq C\|u\|_{\lambda,\infty} 2^{-n\lambda}.$$

Il prossimo risultato segue da semplici considerazioni di teoria dell'interpolazione, si veda ad es. [9, Prop. 3.2.8].

LEMMA 2.1. *La chiusura di X_1 in X_0 è lo spazio di interpolazione $(X_0, X_1)_{0,1}$.*

Passo ora ad un risultato di carattere generale che non mi sembra noto. Esso si ispira al ben noto Teorema di Pettis (cfr. [11]).

TEOREMA 2.2. *Siano X uno spazio normato separabile, μ una misura a valori in $\mathbb{R}_0^+$. Se $u\colon \Omega \to X'$ è una funzione debole $*$ misurabile ed a valori essenzialmente separabili, allora u è fortemente misurabile rispetto a μ.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $x \in X$ si definiscano gli insiemi $A := \{t \in \Omega\colon \|u(t)\|_{X'} \leq r\}$, $A_x := \{t \in \Omega\colon |\langle u(t); x\rangle| \leq r\}$. Per definizione di norma in X' si ha che $A = \bigcap_{\|x\|_X \leq 1} A_x$. Sia $\{x_n\}_{n \in N}$ un sottoinsieme numerabile e denso nella bolla unitaria $B(1,0)$ di X. Dato $x \in \overline{B(1,0)}$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tale che $\{x_{n_k}\}$ tende ad x debolmente. Ne consegue che $\bigcap_{\|x\|_X \leq 1} A_x = \bigcap_{n \in N} A_{x_n}$. Abbiamo così dimostrato che la funzione *norma di $u(t)$* è misurabile rispetto a μ. In modo analogo si ottiene che la funzione *norma di $(u(t) - x')$* è misurabile rispetto a μ per ogni $x' \in X'$. Ora si concluda come nel teorema di Pettis (cfr. [11]).

3. GLI SPAZI $N^\lambda(\Omega)$ ED $N^{\lambda,0}(\Omega)$

Inizio dando una dimostrazione esplicita della non separabilità degli spazi N^λ.

TEOREMA 3.1. *Lo spazio $N^\lambda(\Omega)$ non è separabile.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché Ω è aperto esistono $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0) \in \Omega$ ed $\varepsilon > 0$ tali che:

$$R_\varepsilon := \prod_{j=1}^{N} (x_j^0 - \varepsilon, x_j^0 + \varepsilon) \subset\subset \Omega\,, \qquad \operatorname{dist}(R_\varepsilon, \partial\Omega) > \varepsilon\,.$$

Sia

$$g_{\lambda, a_j}(t) := \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(t - a_j)^{1-\lambda}} & t \in (a_j, x_j^0 + \varepsilon)\,, \\ 0 & \text{altrove}\,, \end{cases}$$

dove $x_j^0 - \varepsilon < a_j < x_j^0$, $\forall j = 1, \ldots, N$. Consideriamo la famiglia di funzioni:

$$f_{\lambda, a}(x) := \varepsilon^{-\lambda(N-1)} \prod_{j=1}^{N} g_{\lambda, a_j}(x_j)$$

ove $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $x_i^0 + \varepsilon - a_i = x_j^0 + \varepsilon - a_j$, $\forall i, j = 1, \ldots, N$.

Si ha che $f_{\lambda, a|\Omega} \in N^\lambda(\Omega)$. Infatti $\|f_{\lambda,a}\|_{L^1} = \varepsilon^{-\lambda(N-1)} \prod\limits_{j=1}^{N} (x_j^0 + \varepsilon - a_j)^\lambda$.

Siano $h < 0$, $\widehat{x}_i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N)$, $R_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (a_j, x_j^0 + \varepsilon)$, $\forall i = 1, \ldots, N$.

Se $|h| < x_i^0 + \varepsilon - a_i$, non è particolarmente difficile dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_{\lambda,a}(x + he_i) - f_{\lambda,a}(x)| \, dx = 2\varepsilon^{-\lambda(N-1)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (x_j^0 + \varepsilon - a_j)^\lambda \, |h|^\lambda .$$

Se $|h| \geqslant x_i^0 + \varepsilon - a_i$, si ha facilmente

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_{\lambda,a}(x + he_i) - f_{\lambda,a}(x)| \, dx = 2\varepsilon^{-\lambda(N-1)} \prod_{j=1}^{N} (x_j^0 + \varepsilon - a_j)^\lambda .$$

Quindi $f_{\lambda,a|\Omega} \in N^\lambda(\Omega)$ e $p_\lambda(f_{\lambda,a}) \leqslant 2N\varepsilon^{-\lambda(N-1)} \prod_{j=1}^{N-1} (x_j^0 + \varepsilon - a_j)^\lambda$.

Si fissino $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $b = (b_1, \ldots, b_N)$ tali che $x_i^0 - \varepsilon < a_i < x_i^0$, $x_i^0 - \varepsilon < b_i < x_i^0$, $x_i^0 + \varepsilon - a_i = x_j^0 + \varepsilon - a_j$, $x_i^0 + \varepsilon - b_i = x_j^0 + \varepsilon - b_j$, $\forall i, j = 1, \ldots, N$ e si ponga $f_{\lambda,a,b}(x) := f_{\lambda,a}(x) - f_{\lambda,b}(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, allora $f_{\lambda,a,b|\Omega} \in N^\lambda(\Omega)$.

Stimiamo $p_\lambda(f_{\lambda,a,b})$ in Ω. Per la scelta fatta di a, b possiamo limitarci al caso: $x_i^0 - \varepsilon < a_i < b_i < x_i^0$, $\forall_i = 1, \ldots, N$. Posto $\widehat{h} = a_1 - b_1$ si ha:

$$|f_{\lambda,a,b}(x)| = |f_{\lambda,a}(x)| = f_{\lambda,a}(x), \qquad x \in (a_1, a_1 - \widehat{h}) \times \prod_{j=2}^{N} (a_j, x_j^0 + \varepsilon) := A_{\widehat{h}} .$$

Pertanto

$$p_\lambda(f_{\lambda,a,b}) \geqslant |a_1 - b_1|^{-\lambda} \int_{R_1} \int_{a_1}^{a_1 - \widehat{h}} f_{\lambda,a}(x) \, dx_1 \, d\widehat{x}_1 = \varepsilon^{-\lambda(N-1)} \prod_{j=2}^{N} (x_j^0 + \varepsilon - a_j)^\lambda$$

e quindi $p_\lambda(f_{\lambda,a,b}) \geqslant \varepsilon^{-\lambda(N-1)} \prod_{j=2}^{N} (x_j^0 + \varepsilon - a_j)^\lambda \geqslant 1$.

A questo punto possiamo concludere la dimostrazione del teorema. Sia $O_{\lambda,a} := \{f \in N^\lambda(\Omega) \colon p_\lambda(f - f_{\lambda,a}) < 1/2\}$, ove $a = (a_1, \ldots, a_N)$ è tale che $x_j^0 - \varepsilon < a_j < x_j^0$, $\forall j = 1, \ldots, N$.

La famiglia di aperti $\{O_{\lambda,a}\}$ è non numerabile e due qualsiasi elementi di essa sono disgiunti. Tutto ciò permette di concludere che $N^\lambda(\Omega)$ non è separabile.

Ricordo ora un teorema di approssimazione per gli spazi N^λ. Si vedano in proposito ([21, II, 9] e [5, Teor. 1]).

Teorema 3.2. *A) Sia Ω un dominio di estensione per lo spazio N^λ.*

Se $u \in N^\lambda(\Omega)$, allora esistono una successione $\{u_n\}$ di funzioni in $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ ed una costante C non negativa (indipendente da n, u) tali che:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad in\ L^1(\Omega),$$

$$\|u_n\|_{L^1} \leqslant Cp_\lambda(u) \, 2^{-n\lambda}, \qquad \|D_k u_n\|_{L^1} \leqslant Cp_\lambda(u) \, 2^{-n(\lambda - 1)}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \forall k = 1, \ldots, N .$$

Inoltre posto $s_n := \sum_{j=0}^{n} u_j$ *si ha, per ogni* $n \in \mathbb{N}_0$, $\|u - s_n\|_{L^1} \leq C p_\lambda(u) 2^{-n\lambda}$, $\|s_n\|_{W^{1,1}} \leq$ $\leq C\|u\|_{N^\lambda} 2^{-n(\lambda - 1)}$.

B) *Sia* $\lambda \neq 1$. *Se* $u \in L^1(\Omega)$ *ed esistono una successione* $\{u_n\}$ *di funzioni in* $BV(\Omega)$ *ed una costante* C *non negativa (indipendente da* n*) tali che:*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{in } L^1(\Omega);$$

$$\|u_n\|_{L^1} \leq C 2^{-n\lambda}, \qquad \|D_k u_n\|_M \leq C 2^{-n(\lambda-1)}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \forall k = 1, \ldots, N,$$

allora $u \in N^\lambda(\Omega)$.

Osservazione 3.1. Per $\lambda = 1$ la caratterizzazione appena enunciata non è in generale valida (nemmeno se Ω è un dominio di estensione per BV). L'esempio 4 a pag. 10 di [2] fornisce un controesempio.

Teorema 3.3. *A) Sia* Ω *un aperto (qualsiasi) di* $\mathbb{R}^N$. *Allora:* $BV(\Omega) = (L^1(\Omega), W^{1,1}(\Omega))_{1,\infty}$ *con norme equivalenti.*

B) Siano $\lambda \in (0, 1)$ *ed* Ω *un dominio di estensione per* N^λ. *Allora:* $N^\lambda(\Omega) = (L^1(\Omega), W^{1,1}(\Omega))_{\lambda,\infty} = (L^1(\Omega), BV(\Omega))_{\lambda,\infty}$ *con norme equivalenti.*

Dimostrazione. *A)* È immediata conseguenza del teorema 1.17 pag. 14 di [12] e delle parti *A)* e *B)* del Teorema 2.1. *B)* È immediata conseguenza dei Teoremi 2.1 e 3.2.

Teorema 3.4. *Siano* $\lambda \neq 1$ *ed* Ω *un dominio di estensione per* N^λ, *allora:* $N^\lambda(\Omega) = (M((\Omega, \beta_\Omega), \mathbb{R}), BV(\Omega))_{\lambda,\infty}$.

Dimostrazione. Si osservi che $L^1(\Omega) \in \mathcal{K}(0, M((\Omega, \beta_\Omega), \mathbb{R}), BV(\Omega))$, ovvero è di classe 0 (rispetto alla coppia $M((\Omega, \beta_\Omega), \mathbb{R}), BV(\Omega))$. Inoltre $BV(\Omega) \in \mathcal{K}(1, M((\Omega, \beta_\Omega), \mathbb{R}), BV(\Omega))$, ovvero è di classe 1 (rispetto alla coppia $M((\Omega, \beta_\Omega), \mathbb{R}), BV(\Omega))$. La tesi segue dal Teorema 3.3 applicando il teorema di reiterazione (cfr. [9]).

Il successivo Teorema 3.5 afferma che gli spazi N^λ sono duali di spazi di Banach separabili. Più precisamente dimostrato che $BV(\Omega)$ lo è per ogni aperto Ω, e che $N^\lambda(\Omega)$ lo è per domini di estensione, in particolare per aperti con la proprietà di cono.

Per quanto riguarda lo spazio BV questa proprietà mi sembra sia stata rilevata solo nel caso di un aperto limitato di classe $C^{0,1}$ (cfr. [23 e la bibliografia ivi citata]). Per quanto riguarda gli spazi N^λ ($\lambda \in (0, 1)$) questo risultato è noto per $\Omega = \mathbb{R}^N$ (cfr. [8, pag. 172]). La dimostrazione qui data mi sembra diversa da quella esposta in [8]. La tecnica usata in [8] consiste nello stabilire il risultato per uno spazio di funzioni armoniche definite in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$, che è isomorfo ad $N^\lambda(\mathbb{R}^N)$. Più precisamente in [8] si dimostra che $\Lambda(\lambda, 1, \infty)$ è il duale della chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $\Lambda(-\lambda, \infty, 1)$, dove $\Lambda(\beta, p, q)$

sono spazi (di tipo Lipschitz) di funzioni armoniche definite in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$, considerati da Taibleson in [22]. Si ricordi ora che (cfr. [22, Teor. 4, pag. 421, e Teor. 11 pag. 444]) $N^\lambda(\mathbb{R}^N)$ è isomorfo a $\Lambda(\lambda, 1, \infty)$ e che $\Lambda(-\lambda, \infty, 1)$ è uno spazio separabile.

TEOREMA 3.5. *A) $BV(\Omega)$ è il duale di uno spazio di Banach separabile. B) Siano $\lambda \neq 1$ ed Ω un dominio di estensione per N^λ, allora $N^\lambda(\Omega)$ è il duale di uno spazio di Banach separabile.*

DIMOSTRAZIONE. *A*) Siano $X := [(C_0(\Omega))^{N+1}$; con la norma $\| \vec{\varphi} \|_\infty := \max_{i=1,\dots,N+1} \|\varphi_i\|_\infty]$;

$$X_0 := \{\vec{\varphi} \in X : (\varphi_2, \dots, \varphi_{N+1}) \in (C_c^\infty(\Omega))^N;\ \varphi_1 = \operatorname{div}(\varphi_2, \dots, \varphi_{N+1})\}$$

ed X_0^C la chiusura di X_0 in X. Lo spazio quoziente X/X_0^C è uno spazio di Banach separabile con la norma $\|[\vec{\varphi}]\|_{X/X_0^C} := \inf\{ \| \vec{\varphi} - \vec{\psi} \|_X : \vec{\psi} \in X_0^C\}$.

Allora $(X/X_0^C)' \simeq X_0^{C^\perp}$ (ove «$\simeq$» significa «isomorfo ed isometrico a») ed $X_0^{C^\perp}$ è l'ortogonale di X_0^C, ovvero $X_0^{C^\perp} := \{T \in X' : \langle T, x_0 \rangle = 0, \forall x_0 \in X_0^C\}$. Si noti che:

$$T \in X_0^{C^\perp} \text{ se e solo se } \sum_{i=1}^{N+1} \int_\Omega \varphi_i d(T_i) = 0, \quad \forall \vec{\varphi} \in X_0^C. \tag{3.0}$$

Consideriamo la mappa lineare $L: BV(\Omega) \to X_0^{C^\perp}$, ove $L(u) := (m_u, D_1 u, \dots, D_N u)$ con $m_u(E) := \int_E u\,dx$, $\forall E \in \beta_\Omega$.

La mappa L è ben definita ed $L(u) \in X_0^{C^\perp}$, inoltre $\|L(u)\|_{X_0^{C^\perp}} = \|u\|_{BV(\Omega)}$.

Per concludere resta da provare la suriettività di L. Ma per questo basta ricordare la (3.0) e che una misura a variazione totale limitata le cui derivate prime nel senso delle distribuzioni sono misure, è (si rappresenta con) una funzione di L^1.

B) Grazie alla prima parte di questa dimostrazione, al Teorema 3.4 ed al teorema di rappresentazione di Riesz si ha $N^\lambda(\Omega) = (M((\Omega, \beta_\Omega), \mathbb{R}), BV(\Omega))_{\lambda,\infty} = (C_0'(\Omega), (X/X_0^C)')_{\lambda,\infty}$.

Si osservi che $C_0(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} X/X_0^C$ dove i è la mappa iniettiva: $\varphi \to [(\varphi, \dots, 0)]$.

Inoltre $C_0(\Omega) \cap X/X_0^C \simeq C_0(\Omega)$ è denso in X/X_0^C; infatti, se $[(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N+1})] \in X/X_0^C$ si considerino le successioni $\{\varphi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ $(j = 1, \dots, N+1)$ di funzioni in $C_c^\infty(\Omega)$ tali che $\varphi_{j,n} \to \varphi_j$ in $C_0(\Omega)$, allora: $[(\varphi_{1,n} - \operatorname{div}(\varphi_{2,n}, \varphi_{3,n}, \dots, \varphi_{N+1,n}), 0, \dots, 0)] \to [(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N+1})]$ in X/X_0^C.

Per il teorema di dualità (cfr. [1, 9]) si ha che: $N^\lambda(\Omega) = (X/X_0^C, C_0(\Omega))'_{1-\lambda,1} = (C_0(\Omega), X/X_0^C)'_{\lambda,1}$.

La tesi segue osservando che $C_0(\Omega)$ è denso in $(X/X_0^C, C_0(\Omega))_{1-\lambda,1}$ (cfr. [9, Prop. 3.2.8]).

I prossimi risultati riguardano gli spazi $N^{\lambda,0}$.

TEOREMA 3.6. *Siano Ω limitato di classe $C^{0,1}$ e $\lambda \neq 1$. Se $u \in N^{\lambda,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, allora $\tilde{u} \in N^{\lambda,0}(\mathbb{R}^N)$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è immediata, osservando che $\chi_\Omega \in BV(\mathbb{R}^N)$.

COROLLARIO 3.6. *Se Ω è limitato di classe $C^{0,1}$ lo spazio $N^{\lambda,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ è separabile (per la norma di N^λ).*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teorema 3.6 e dal fatto che $N^{\lambda,0}(\mathbb{R}^N)$ è separabile.

Nell'ultima parte di questa sezione mi occupo brevemente degli spazi $L^\infty_{W^*}(0, T; N^\lambda(\Omega))$. In particolare mi interessano la convergenza e la compattezza debole $*$.

In tutto il resto della sezione Ω sarà un aperto che verifica le ipotesi del Teorema 3.5.

PROPOSIZIONE 3.1. *Lo spazio $L^\infty_{W^*}(0, T; N^\lambda(\Omega))$ è il duale di uno spazio di Banach separabile.*

DIMOSTRAZIONE. È noto (cfr. [15]) che $L^\infty_{W^*}(0, T; X_0') = (L^1(0, T; X_0))'$. La tesi segue prendendo $X_0' = N^\lambda$ e ricordando il Teor. 3.5.

PROPOSIZIONE 3.2. *Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni in $L^\infty_{W^*}(0, T; BV(\Omega))$. Allora*

$$u_n \to u \textit{ debole } * \textit{ in } L^\infty_{W^*}(0, T; BV(\Omega))$$

se e solo se

$$u_n \to u \textit{ debole } * \textit{ in } (L^1(0, T; C_0(\Omega)))',$$

$$D_i u_n \to D_i u \textit{ debole } * \textit{ in } (L^1(0, T; C_0(\Omega)))', \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla proposizione 3.1 e dal Teorema 3.5.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni in $L^\infty_{W^*}(0, T; N^\lambda(\Omega))$. Se*

$$u_n \to u \textit{ debole } * \textit{ in } L^\infty_{W^*}(0, T; N^\lambda(\Omega))$$

allora

$$u_n \to u \textit{ debole } * \textit{ in } (L^1(0, T; C_0(\Omega)))'.$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dalla proposizione 3.1 e da

$$L^\infty_{W^*}(0, T; N^\lambda(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty_{W^*}(0, T; M(\Omega, \beta_\Omega, \mathbb{R})).$$

OSSERVAZIONE 3.3. Se $\{u_n\}$ è una successione limitata in $L^\infty(\Omega \times (0, T))$, convergente ad u in $L^1(\Omega \times (0, T))$, allora $\{u_n\}$ converge ad u in $(L^1(0, T; C_0(\Omega)))'$ debole $*$.

4. IL PROBLEMA DI STEFAN BIFASE

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, di classe $C^{0,1}$; si denoti con Γ la frontiera di Ω, e per $T > 0$ si ponga $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma := \Gamma \times (0, T)$. Si consideri una funzione β

della seguente forma:

$$\beta(r) = \begin{cases} \beta_1(r) & \text{se } r \geqslant \nu\,, \\ 0 & \text{se } 0 < r < \nu\,, \\ \beta_2(r) & \text{se } r \leqslant 0\,, \end{cases} \tag{4.0}$$

ove $\nu > 0$ è una costante e

$$0 < \alpha_0 \leqslant \beta_i'(r) \leqslant \alpha_1\,, \qquad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

con α_0 e α_1 costanti positive e $\beta_1(\nu) = \beta_2(0) = 0$.

Seguendo [20] studieremo il seguente problema (si veda anche l'Oss. 4.2), che indicheremo con (P),

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial t - \Delta\beta(u) = 0 && \text{in } Q\,, \\ &\beta(u) = 0 && \text{su } \Sigma\,, \\ &u(x, 0) = u_0(x) && \text{in } \Omega\,, \end{aligned}$$

dove $\beta(\cdot)$ è data dalle (4.0) e (4.1) ed $u_0(x) \in L^\infty(\Omega) \cap Y(\Omega)$ ove Y è BV, N^λ o $N^{\lambda, 0}$.

Il problema (P) è da intendersi nel senso della seguente *formulazione debole.*

Trovare $u \in L^2(Q)$ tale che:

$$\beta(u) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))\,, \tag{4.2a}$$

$$\iint_Q \left[(u_0 - u)\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla\beta(u)\cdot\nabla v\right] dx\,dt = 0\,, \tag{4.2b}$$

$$\forall v \in H^1(Q)\,, \;\; v(\cdot, T) = 0 \text{ in } \Omega\,, v = 0 \text{ su } \Sigma\,.$$

Il problema (P) può essere approssimato (cfr. [20]) da una famiglia di *problemi regolarizzati* (P_ε), con $\varepsilon > 0$, dove β_ε ed $u_{0,\varepsilon}$, verificano le seguenti condizioni:

$$\beta_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})\,, \quad \beta_\varepsilon \to \beta \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}; \tag{4.3}$$

$$\varepsilon \leqslant \beta_\varepsilon'(r) \leqslant \max(\alpha_0, \alpha_1)\,, \quad \forall r \in \mathbb{R}; \;\; \beta_\varepsilon(\nu) = 0\,, \;\; \alpha_0 \leqslant \beta_\varepsilon'(r) \leqslant \alpha_1 \text{ se } r \geqslant \nu\,;$$

$$u_{0,\varepsilon} \in C^2(\overline{\Omega}), \quad u_{0,\varepsilon} \to u_0 \text{ q.o. in } \Omega\,; \quad \|u_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)\cap Y(\Omega)} \leqslant K\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)\cap Y(\Omega)}\,, \tag{4.4}$$

dove K è una costante non negativa indipendente da ε.

Il problema (P_ε) ammette una ed una sola soluzione, in senso classico (cfr. [16, pagg. 452, 501]), $u_\varepsilon \in C^1(\overline{Q})$ tale che $D_x^2 u_\varepsilon \in C^0(\Omega)$ e le condizioni (P_ε) sono puntualmente verificate. Vale allora il seguente

TEOREMA 4.1. *A) Sia* $\lambda \in (0, 1)$. *Sotto le ipotesi* (4.0)-(4.4), e $Y = N^{\lambda, 0}$ *il problema* (P) *ha una ed una sola soluzione debole* $u(x, t)$ *tale che:*

$$u \in L^\infty(Q) \cap L^\infty(0, T; N_{\mathrm{loc}}^{\lambda, 0}(\Omega)) \cap C^{0, \lambda/2}(0, T; L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega))\,. \tag{4.5a}$$

B) Sia $\lambda \in (0, 1]$. *Sotto le ipotesi* (4.0)-(4.4) *e* $Y = N^\lambda$ *il problema* (P) *ha* *una ed una sola soluzione debole $u(x,t)$ tale che:*

$$u \in L^\infty(Q) \cap L^\infty_{W^*}(0,T; N^\lambda_{\mathrm{loc}}(\Omega)) \cap C^{0,\lambda/2}(0,T; L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)) . \tag{4.5b}$$

C) La soluzione $u_\varepsilon(x,t)$ del problema (P_ε) verifica, qualunque sia $\Omega' \subset\subset \Omega$,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;Y(\Omega'))} \leqslant C(\Omega'), \qquad \int_{\Omega'} |u_\varepsilon(x,t+\Delta t) - u_\varepsilon(x,t)|\, dx \leqslant C(\Omega')\Delta t^{\lambda/2} \tag{4.6}$$

dove $C(\Omega')$ è una costante non negativa che dipende solo da Ω'. Infine

$$u_\varepsilon \to u \quad \textit{in } L^1(Q). \tag{4.7}$$

Dimostrazione. Seguendo [20] si ha immediatamente la prima di (4.6) poiché:

$$\|u_{\varepsilon,h}(\cdot,t) - u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega_{|h|})} = o(|h|^\lambda), \quad \forall t \in [0,T], \ \forall \varepsilon > 0 \text{ se } Y = N^{\lambda,0}, \tag{4.8a}$$

$$\|u_{\varepsilon,h}(\cdot,t) - u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega_{|h|})} \leqslant C(\Omega')|h|^\lambda, \forall t \in [0,T], \ \forall \varepsilon > 0 \text{ se } Y = N^\lambda . \tag{4.8b}$$

Passiamo alla dimostrazione della seconda stima (4.6).

Si prendano $\delta \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \delta < d/2 = \mathrm{dist}(\Omega', \Gamma)/2$ e $\varrho \in C_c^\infty(\Omega)$ con le seguenti proprietà:

$$\varrho \geqslant 0, \quad \mathrm{supp}(\varrho) \subset B_1(\underline{0}), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varrho\, dx = 1 .$$

Si ha che:

$$\int_{\Omega'} |u_\varepsilon(x,t+\Delta t) - u_\varepsilon(x,t)|\, dx \leqslant \int_{\Omega'} |u_\varepsilon(x,t+\Delta t) - u_{\varepsilon,\delta}(x,t+\Delta t)|\, dx +$$
$$+ \int_{\Omega'} |u_{\varepsilon,\delta}(x,t+\Delta t) - u_{\varepsilon,\delta}(x,t)|\, dx + \int_{\Omega'} |u_{\varepsilon,\delta}(x,t) - u_\varepsilon(x,t)| = I_1 + I_2 + I_3$$

dove $u_{\varepsilon,\delta}$ è la funzione

$$u_{\varepsilon,\delta}(x,t) := \delta^{-N} \int u_\varepsilon(x-y,t)\varrho(y/\delta)\, dy = \int u_\varepsilon(x-y,t)\varrho_\delta(y)\, dy .$$

Usando le (4.8) si ha

$$I_1 \leqslant C(\Omega') \int_{B_\delta(\underline{0})} |y|^\lambda \varrho_\delta(y)\, dy \leqslant C(\Omega')\delta^\lambda . \tag{4.9}$$

Analogamente si ricava che

$$I_3 \leqslant C(\Omega')\delta^\lambda . \tag{4.10}$$

Ricordando che u_ε è soluzione del problema (P_ε) ed integrando per parti si ha:

$$I_2 = \int_{\Omega'} \left| \int_{B_\delta(x)} [u_\varepsilon(y,t+\Delta t) - u_\varepsilon(y,t)]\varrho_\delta(x-y)\, dy \right| dx =$$

$$= \int_{\Omega'} \left| \int_t^{t+\Delta t} \int_{B_\delta(x)} \frac{\partial u_\varepsilon(y,\tau)}{\partial t} \varrho_\delta(x-y)\,dy\,d\tau \right| dx =$$

$$= \int_{\Omega'} \left| \int_t^{t+\Delta t} \int_{B_\delta(x)} \{\Delta_y [\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(y,\tau)) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x,\tau))]\} \varrho_\delta(x-y)\,dy\,d\tau \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant C(\|\Delta_y \varrho\|_\infty, \Omega')\,\delta^{\lambda-2}\Delta t\,.$$

Osservando che la costante $C(\|\Delta_y \varrho\|_\infty, \Omega')$ dipende solo da Ω' si ha:

$$I_2 \leqslant C(\Omega')[\delta^{\lambda-2}\Delta t + \delta^\lambda + \Delta t]\,. \tag{4.11}$$

Grazie alle (4.9), (4.10), (4.11) e scelto $\delta = \Delta t^{1/2} < d/2$ si ricava:

$$\int_{\Omega'} |u_\varepsilon(x,t+\Delta t) - u_\varepsilon(x,t)|\,dx \leqslant C(\Omega')[\Delta t^{\lambda/2}]\,, \qquad 0 < \Delta t^{1/2} < d/2\,. \tag{4.12}$$

Si fissi $r \in \mathbb{R}$ tale che $0 < r^{1/2} < d/2$ e $T = rM$ con $M \in \mathbf{N}$. Dati $(t,t') \in [0,T]^2$ con $t < t'$ esistono $M-1$ punti $t_1, \dots, t_{M-1}$ tali che:

$$t := t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M := t' \quad \text{e} \quad |t_i - t_{i-1}| \leqslant r\,.$$

Da (4.12) segue che:

$$\int_{\Omega'} |u_\varepsilon(x,t') - u_\varepsilon(x,t)|\,dx \leqslant C(\Omega') \sum_{i=1}^M |t_i - t_{i-1}|^{\lambda/2} \leqslant C(\Omega') \cdot M |t'-t|^{\lambda/2}\,.$$

Osservando che M dipende solo da Ω' la precedente disuguaglianza prova la seconda di (4.6).

Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà si ha che l'insieme $\{u_\varepsilon\}$ è relativamente compatto in $L^1(Q)$. A questo punto scrivendo il problema (P_ε) in forma debole è possibile, grazie alle note tecniche di compattezza e monotonia usate per il problema di Stefan (cfr. [16, 26]), passare al limite (eventualmente estraendo una sottosuccessione) per $\varepsilon \to 0$ dimostrando così l'esistenza di una soluzione debole del problema (P). L'unicità della soluzione si ottiene con metodi standard per lo spazio L^1 (cfr. [20]). Si noti che queste tecniche implicano la convergenza di tutta la successione $\{u_\varepsilon\}$ dimostrando così la (4.7).

Grazie alla Prop. 3.1 ed a (4.6) esistono una sottosuccessione $\{u_{\varepsilon_k}\}$ ed una $v \in L^\infty_{W^*}(0,T; N^\lambda(\Omega'))$ tali che $u_{\varepsilon_k} \to v$ debole $*$ in $L^\infty_{W^*}(0,T; N^\lambda(\Omega'))$. Ma dalla (4.7) e dall'Osservazione 3.3 segue che $u_\varepsilon \to u$ debole $*$ in $(L^1(0,T; C_0(\Omega')))'$ e quindi $u = v$ per l'unicità del limite. Nel caso di $Y = N^{\lambda,0}$ si ha $u \in L^\infty_{W^*}(0,T; N^{\lambda,0}(\Omega'))$ come si vede facilmente passando al limite nella (4.8*a*). Da quanto appena visto e dalle (4.6), (4.7) si ha la (4.5*a*) e la (4.5*b*).

Resta solo da dimostrare la misurabilità forte di u nel caso di $Y = N^{\lambda,0}$. Per questo basta invocare il Teor. 3.5 ed il Cor. 3.6 e poi concludere applicando il Teor. 2.2.

OSSERVAZIONE 4.1. Il Teorema 4.1 continua a valere anche se Y viene sostituito da Y_{loc}.

OSSERVAZIONE 4.2. La medesima tecnica permette anche di studiare il problema non omogeneo con $F(x,t,u) = f(u) + b(x,t)$ ove $f = f_1 + f_2$ con f_1 non decrescente ed f_2 lipschitziana, $b \in L^\infty(Q) \cap L^\infty(0,T;Y)$ (al primo membro) e $g = g(x,t) \in L^\infty(\Omega) \cap H'(Q)$ (al secondo membro) e di ottenere ancora il Teorema 4.1. Inoltre se g è sufficientemente regolare e $g \geqslant \delta > 0$ su Σ, combinando la tecnica di [20] con la presente si riesce ad ottenere un risultato globale (per es. sostituendo nella (4.5*a*) $N^{\lambda,0}_{\mathrm{loc}}$, L^1_{loc} con $N^{\lambda,0}$, L^1), precisando meglio così il risultato di [20], in quanto la soluzione u è debole $*$ misurabile. Inoltre, grazie al Teorema 4.1, la soluzione nel caso considerato in [20] è fortemente misurabile come funzione a valori in $N^{\lambda,0}$. Resta aperto il problema di ottenere la regolarità globale del tipo (4.5*a*), (4.5*b*) e (4.6) nel caso di ipotesi meno restrittive su g (ad es. $g = 0$ su Σ). Un secondo problema aperto è quello della misurabilità forte di u.

RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare, per le utili discussioni sull'argomento, il Prof. G. Gilardi, la Dott.ssa C. Bondioli ed il Dott. G. Savarè.

La presente *Nota* contiene i risultati derivanti dalle ricerche effettuate per la tesi di laurea «Spazi BV e di Nikolskii e applicazioni al problema di Stefan» discussa presso l'Università di Pavia il 25/5/1994 di cui erano relatori il Prof. E. Magenes e la Dott.ssa C. Bondioli.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. BERGH - J. LÖFSTRÖM, *Interpolation Spaces.* Springer-Verlag, Berlin-New York 1976.

[2] M. P. BERNARDI - C. BONDIOLI, *Alcune osservazioni sugli spazi di Nikolskii.* Rend. Ist. Lomb. Sc., A, 126, 1992, 93-104.

[3] M. P. BERNARDI - C. BONDIOLI, *Nikolskii spaces and the BV space characterized by motions in* $\mathbb{R}^N$. 1994, to appear.

[4] O. V. BESOV - V. P. ILIN - S. M. NIKOLSKII, *Integral Rappresentation of Functions and Imbedding Theorems.* Vol. II. V.H. Winston & Sons, 1979.

[5] C. BONDIOLI, *Function spaces of Nikolskii type on compact manifolds.* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 3, 1992, 185-194.

[6] C. BONDIOLI, *A regularity result of Nikolskii type for an evolution equation on compact homogeneous spaces.* Mathematische Nachrichten, 166, 1994, 273-285.

[7] H. BREZIS, *Analyse fonctionelle.* Masson, Paris 1983.

[8] BUI HUY QUI, *Remark on the dual of some Lipschitz spaces.* Hiroshima Math. J., 10, 1980, 163-173.

[9] P. L. BUTZER - H. BERENS, *Semi-Groups of Operators and Approximation.* Springer-Verlag, Berlin-New York 1967.

[10] A. DAMLAMIAN, *On the Stefan problem. The variational approach and some applications.* Math. Models and Methods in Mechanics, Banach center publ., vol. 15, Warsaw 1985, 253-275.

[11] J. DIESTEL - J. J. UHL JR., *Vector Measures.* Am. Math. Soc., Providence 1977.

[12] E. GIUSTI, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Birkhäuser Inc., Boston 1984.

[13] I. G. GÖTZ - B. B. ZALTZMAN, *Nonincrease of a mushy region in a nonhomogeneous Stefan problem.* Quarterly of applied Math., vol. XLIX, 4, 741-746.

[14] S. HUANG, *Regularity of the enthalpy for two-phase Stefan problem in several space variables.* Preprint 1992.

[15] A. Ionescu Tulcea - C. Ionescu Tulcea, *Topics in the Theory of Lifting*. Springer-Verlag, Berlin-New York 1969.

[16] O. A. Ladyzhenskaya - V. Solonnikov - N. Uralceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Trans. Math. Monographs, 23, 1968.

[17] J. L. Lions - E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Vol. I. Springer-Verlag, Berlin-New York 1972.

[18] J. L. Lions - J. Peetre, *Sur une classe d'espace d'interpolation*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19, 1964, 5-68.

[19] E. Magenes, *Spazi di interpolazione ed equazioni alle derivate parziali*. Atti del VII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Genova 1963, 134-197.

[20] E. Magenes - C. Verdi - A. Visintin, *Some theoretical and numerical results on the two-phase Stefan problem*. SIAM J. Numer. Anal., 26, 1989, 1425-1438.

[21] Y. Meyer, *Ondelettes. Ondelettes et opérateurs I*. Hermann, Paris 1990.

[22] M. H. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-spaces I. Principal Properties*. J. Math. Mech., 13, 1964, 407-479.

[23] R. Temam - G. Strang, *Function of bounded deformation*. Archive Rat. Mech. and Analysis, 75, 1980, 7-21.

[24] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. North-Holland, Amsterdam-New York 1978.

[25] C. Verdi, *BV regularity of the entalpy for semidiscrete two-phase Stefan problems*. Rend. Ist. Lomb. Sc., A, 126, 1992, 29-42.

[26] A. Visintin, *Sur le problème de Stefan avec flux non linéaire*. Boll. Un. Mat. Ital., C(6), 18, 1981, 63-86.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pavia
Via Abbiategrasso, 209 - 27100 Pavia