Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Claudio Procesi

Complementi di sottospazi e singolarità coniche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **7** (1996), n.2, p. 113–123.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1996_9_7_2_113_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1996.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 7:113-123 (1996)

Complementi di sottospazi e singolarità coniche

Memoria (*) **di** Claudio Procesi

Abstract. — *Complements of subspaces and conical singularities.* I shall discuss a geometric construction, done with De Concini, of a blowup of a configuration of subspaces making it into a divisor with normal crossings. For hyperplanes this is related to a generalization of the Kniznik-Zamolodchikov equation and to knot theory. For root systems this produces a particularly interesting model.

Key words: Subspace configurations; Holonomy; Monodromy; Root systems.

Riassunto. — Discuterò una costruzione geometrica, fatta insieme a De Concini, di una modificazione di una configurazione di sottospazi che trasforma i sottospazi in un divisore a incroci normali. Inoltre nel caso di iperpiani questa costruzione è legata alla generalizzazione della equazione di Kniznik-Zamolodchikov ed alla teoria dei nodi, per i sistemi di radici produce dei modelli particolarmente interessati.

0. Introduzione

Discuterò due lavori scritti con C. De Concini, *Wonderful models of subspace arrangements* [12] e *Hyperplane arrangements and holonomy equations* [13] motivati dallo studio della teoria di Drinfeld dei *quantum groups*.

La soluzione di Drinfeld (cf. [16, 17]) della equazione di Kniznik-Zamolodchikov (cf. [24]) è legata ai *quantum groups*, allo studio delle trecce, all'invariante universale di Vassiliev costruito da Kontsevitch, alle categorie intrecciate ecc.

Data una famiglia di iperpiani di equazioni $\alpha_i = 0$ vi è una connessione formale $\Omega = (2\pi i)^{-1} \sum_i t_i d \log(\alpha_i)$ con la equazione di trasporto parallelo che generalizza la equazione di Kniznik-Zamolodchikov:

$$dG = \Omega G, \qquad \text{o} \qquad (d - \Omega) G = 0. \tag{0.1}$$

La forma è definita nell'aperto $\mathcal{A}$ di C^n complementare all'unione degli iperpiani dati.

Gli elementi t_i sono presi nell'algebra libera ma, per avere la piattezza della connessione si devono imporre le relazioni equivalenti a $\Omega \wedge \Omega = 0$ [22].

$$\left[\sum_{j \mid \alpha_j \in W} t_j, t_h \right] = 0, \qquad \forall h \mid \alpha_h \in W. \tag{0.2}$$

Per ogni sottospazio 2-dimensionale W generato da alcune fra le α_i.

Indicheremo con R l'algebra data dai generatori t_i modulo le relazioni (0.2). R è l'algebra inviluppante di una algebra di Lie L. Con $\hat{R}$ indichiamo il completamento di R e con $\tilde{\mathcal{A}}$ il rivestimento universale di $\mathcal{A}$.

Le soluzioni G della equazione (0.1), sono funzioni su $\tilde{\mathcal{A}}$ a valori in $\hat{R}$.

(*) Gli argomenti contenuti in questa *Memoria* furono presentati nella conferenza del Simposio Matematico, tenutosi presso l'Accademia Lincei l'8 febbraio 1996.

Analiticamente G è descritta da infinite funzioni di variabile complessa (i coefficienti della serie) e la equazione (0.1) è in effetti un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali per queste funzioni.

L'equazione K-Z si ha nel caso degli iperpiani $z_i = z_j$ in $\mathbf{C}^n$ ed è della forma

$$\Omega := (2\pi i)^{-1} \sum_{i<j} t_{ij} d \log(z_i - z_j). \tag{0.3}$$

Le relazioni di commutazione divengono

$$[t_{ij}, t_{hk}] = 0, \quad \text{se } i, j, h, k \text{ sono distinti}, \; [t_{ij}, t_{ih} + t_{jh}] = 0. \tag{0.4}$$

In Drinfeld [17] si prescrive un comportamento asintotico per le soluzioni controllato dalla geometria di una modificazione di $\mathbf{C}^n$ in cui l'unione degli iperpiani polari è sostituita con un divisore ad incroci normali (cf. [21]).

Prendiamo un intorno V di 0 in $\mathbf{C}^n$ e una mappa olomorfa da V a $\mathbf{C}^n$ che invia il complementare degli iperpiani coordinati $u_i = 0$ nel complementare di $\alpha_j = 0$ in coordinate

$$\alpha_j = \prod u_k^{m_{j,k}} p_j(u_1, \ldots, u_n)$$

con $m_{j,k} \geq 0$ e $p_j(u_1, \ldots, u_n)$ olomorfa in V e $p_j(0) \neq 0$.

Riscriviamo

$$\Omega = (2\pi i)^{-1} \sum_j t_j d \log\Big(\prod u_k^{m_{j,k}} p_j(u)\Big) =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \sum_{j,k} t_j m_{j,k} d \log(u_k) + \Omega_0 = \sum_{k=1}^n A_k d \log(u_k) + \Omega_0$$

Ω_0 è olomorfa in 0 e A_k è detto *residuo* in $u_k = 0$.

Dalla piattezza gli elementi A_k commutano ed esiste una soluzione di (0.2) della forma

$$f(u_1, \ldots, u_n) \prod_{k=1}^n u_k^{A_k}$$

con $f(u_1, \ldots, u_n)$ olomorfa in 0 e $f(0) = 1$ (cf. Cherednik [10, 11]).

Si possono studiare queste equazioni anche nel caso non formale, ovvero prendendo una rappresentazione esplicita dell'algebra R.

Nel caso dell'algebra della t_{ij} questo studio è legato alla equazione di Yang Baxter classica [22, 23].

Data un'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{g}$ sia

$$C := \sum_h a_h \otimes b_h$$

l'operatore di Casimir polarizzato dove a_h, b_h sono basi duali per la forma di Killing.

Presa una rappresentazione V di $\mathfrak{g}$ sullo spazio $V^{\otimes n}$ facciamo operare gli t_{ij} come C operante sulle posizioni tensoriali i, j. Le regole di commutazione canoniche sono verificate.

Un secondo esempio notevole si ha quando le α_i sono gli elementi di un sistema di radici (il caso K-Z corrisponde al diagramma di Dynkin A_{n-1}), in questo caso una rappresentazione esplicita degli elementi formali t_α coefficienti di Ω si ottiene prendendo gli elementi di Casimir per le sottoalgebre $sl(2, \mathbf{C})$ associate alle varie radici α rispetto alla forma di Killing ristretta.

La scelta delle soluzioni asintotiche si fa costruendo un modello di $\mathcal{A}$ del tipo considerato da Hironaka.

Costruiamo una varietà Z propria su $\mathbf{C}^n$, contenente $\mathcal{A}$ come aperto con complemento una unione di divisori lisci ad incroci normali. La scelta di un punto di intersezione di n divisori con equazioni u_i costituiscono i dati che prescrivono l'andamento asintotico.

L'insieme delle soluzioni non nulle su $\tilde{\mathcal{A}}$ è uno spazio omogeneo principale sul gruppo $\hat{R}^*$ degli elementi invertibili di $\hat{R}$. Per i sistemi di radici [18] è il gruppo generalizzato delle trecce B [6, 7, 14], gruppo di omotopia di $\mathcal{A}/W$ e di trasformazioni del rivestimento universale $\tilde{\mathcal{A}}$ su $\mathcal{A}/W$, (B agisce su $\hat{R}^*$ tramite il gruppo di Weyl W che è quoziente di B con la formula $w(t_\alpha) = t_{w(\alpha)}$).

Il gruppo B agisce sulle soluzioni di (0.2) come

$$(bG)(P) := b(G(b^{-1}P)) .$$

Se ne deduce, per ogni soluzione G, una rappresentazione di monodromia ϕ_G di B nel prodotto semidiretto $\hat{R}^* \ltimes W$ data dalle formule

$$b(G(b^{-1}P)) = G(P)_{\varrho_G}(b), \qquad \phi_G(b) := b \to \varrho_G(b)\bar{b} . \tag{0.5}$$

Abbiamo indicato con $\bar{b}$ l'immagine di b in W.

Due soluzioni danno rappresentazioni coniugate tramite la costante che le lega e ci si restringe a soluzioni a valori nel *pro-Lie gruppo* degli elementi di tipo gruppo di $\hat{R}$

$$G(R) := \{u \in \hat{R} \mid \Delta(u) = u \otimes u\}$$

(usando la struttura di algebra di Hopf di R per cui i t_i sono primitivi).

Nel caso A_n le formule di monodromia sono connesse al calcolo dell'invariante universale di Vassiliev [2-4, 28] tramite l'integrale di Kontsevich [9, 8, 26, 27].

Una idea chiave per il calcolo è l'associatore $\Phi(A, B)$ di Drinfeld (cf. [17]).

Per i sistemi di radici le formule dipendono solo da $\Phi(A, B)$ nei casi A_n, D_n, E_6 per gli altri casi (tranne G_2) vi è un ulteriore associatore che proviene da B_2.

1. Configurazioni iperpiane

1.1. – Sia V uno spazio vettoriale complesso (di dimensione finita) e sia $X \in V^* - \{0\}$ un insieme finito di equazioni lineari. Per $x \in X$ sia $H_x := \{u \in V \mid \langle x \mid u \rangle = 0\}$.

Abbiamo dunque una configurazione di iperpiani. Sia $\mathcal{A} := V - \bigcup_{x \in X} H_x$ il complementare degli H_x. Indichiamo con $\mathcal{C}$ la famiglia dei sottospazi $\langle A \rangle$ generati da sottoinsiemi $A \subset X$.

In [12] abbiamo introdotto la famiglia $\mathcal{F}$ degli irriducibili $\mathcal{C}$ e gli insiemi *nested* in $\mathcal{F}$.

DEFINIZIONE. 1) $A \subset X$ è *completo* se $A = \langle A \rangle \cap X$.

2) $Y \subset V^* - \{0\}$ è *riducibile* se esistono sottoinsiemi non vuoti Y_1, Y_2 in Y con $Y = Y_1 \cup Y_2$ e $\langle Y \rangle = \langle Y_1 \rangle \oplus \langle Y_2 \rangle$. Altrimenti è *irriducibile*.

3) Un insieme $\mathcal{S} := \{F_1, \ldots, F_k\}$ di irriducibili in $\mathcal{C}$ è nested (relativamente ad X). Se comunque scelti fra essi un sottoinsieme formato da elementi non-comparabili, essi sono gli elementi della decomposizione della loro unione.

Denotiamo $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathcal{C}$ completi ed irriducibili.

Ogni insieme completo A si decompone canonicamente tramite gli insiemi irriducibili massimali in esso contenuti.

TEOREMA. 1) *Dato* $Z \subset V - \{0\}$, *esiste una unica decomposizione*

$$Z = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$$

in irriducibili disgiunti con

$$< Z > = \bigoplus_{i=1}^{n} < Z_i > .$$

(*La decomposizione irriducibile di* Z).

2) *Se* $A \subset Z$ *è irriducibile, allora* A *è contenuto in esattamente uno dei* Z_i.

3) *Se* A *è irriducibile ogni elemento* $x \in A$ *è dipendente da* $A - \{x\}$.

1.2. – Torniamo alla famiglia $\mathcal{C}$ i cui elementi sono gli spazi generati dai vettori in X.

Una bandiera massimale in $\mathcal{C}$ è necessariamente la bandiera $C_h := \langle x_1, x_2, \ldots, x_h \rangle$ associata ad una base (ordinata) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estratta da X.

Si vede facilmente che un insieme nested massimale $\mathcal{S}$ è generato da una tale bandiera prendendo la decomposizione degli spazi C_h. Per ogni h dalla decomposizione di C_{h+1} troviamo esattamente un elemento A_{h+1} dell'insieme nested che non è nella lista delle decomposizioni degli spazi C_i, $i \leqslant h$.

Si ottiene dunque un ordinamento totale A_i dell'insieme nested, che raffina l'inclusione, con la proprietà $\dim\left(\sum_{i \leqslant h} A_i\right) = h$.

La condizione $\dim\left(\sum_{i \leqslant h} A_i\right) = h$ è equivalente a

$$\sum_{A_j \text{ massimale fra } A_1, \ldots, A_h} \dim(A_j) = h .$$

Definiamo un ordinamento $A_1, \ldots, A_h$ *compatibile* se soddisfa alle precedenti condizioni.

PROPOSIZIONE.

(1) *La decomposizione induce una corrispondenza biiettiva fra bandiere massimali in* $\mathcal{C}$ *e insiemi nested massimali con un ordinamento compatibile.*

Se $C_h := \langle x_1, x_2, \ldots, x_h \rangle$ è associata ad una base (ordinata) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estratta da X e genera un nested set $\mathcal{S}$, diremo che $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è una base *adattata* a $\mathcal{S}$.

Introduciamo il *grafico delle bandiere* che ha come vertici le bandiere massimali, uniamo due vertici con un segmento se differiscono solo in un punto. Similmente formiamo un grafo con gli insiemi nested massimali unendo due vertici con un segmento se differiscono solo per un elemento.

TEOREMA. *I grafi delle bandiere e degli insiemi nested massimali sono connessi.*

Nella costruzione del modello Y_X si costruiscono degli aperti canonici $\mathcal{U}_S$ associati agli insiemi nested massimali con coordinate canoniche u_i della forma x_i/x_j, $u_B = x_B/x_{c(B)}$ associate alla base adattata, dove se $B = A_i$ con $c(B)$ indichiamo il minimo elemento dell'insieme nested che contiene B (oppure $x_{c(B)} = 1$), questa infatti è la chiave delle costruzioni effettuate in quel lavoro.

1.3. – In [12] abbiamo costruito una varietà canonica.

Detto $V_{\mathcal{F}} := \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A^{\perp} = \bigcup_{x \in X} H_x$ denotiamo con $\boldsymbol{P}_A = \boldsymbol{P}(V/A^{\perp})$ lo spazio proiettivo delle rette in $V/A^{\perp}$.

Abbiamo un morfismo regolare $\mathcal{A} \to \prod_{A \in \mathcal{F}} \boldsymbol{P}_A$, il suo grafo è un sottoinsieme chiuso di $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \times \prod_{A \in \mathcal{F}} \boldsymbol{P}_A$ si immerge come aperto di $V \times \prod_{A \in \mathcal{F}} \boldsymbol{P}_A$. Finalmente abbiamo l'immersione

$$\varrho\colon \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \to V \times \prod_{A \in \mathcal{F}} \boldsymbol{P}_A$$

come insieme localmente chiuso.

DEFINIZIONE. Poniamo Y_X la chiusura della immagine di $\mathcal{A}$ attraverso ϱ.

Il teorema principale di [12] è (nel caso di una configurazione irriducibile di iperpiani):

TEOREMA.

(1) *Y_X è una varietà liscia coperta dagli aperti $\mathcal{U}_S$ al variare di $\mathcal{S}$ negli insiemi nested massimali X.*

(2) *Y_X è lo spazio totale di un fibrato lineare su una varietà liscia proiettiva $\overline{Y}_X$. Vi è una mappa canonica di $\overline{Y}_X$ a $\boldsymbol{P}(V)$ per cui Y_X è il* pullback *del fibrato tautologico.*

(3) *La mappa $Y_X \to V$ è propria ed un isomorfismo su $\mathcal{A}$. Il complemento di $\mathcal{A}$ in Y_X è un divisore ad incroci normali con componenti irriducibili D_B liscie indicizzate dagli irreducibili $B \in \mathcal{F}$. La sezione zero corrisponde a X.*

(4) *Una famiglia $\{D_B\}_{B \in \mathcal{G}}$ di divisori al bordo ha intersezione non nulla se e solo se $\mathcal{G}$ è nested. In questo caso la intersezione è trasversa (liscia) e irriducibile.*

(5) *Y_X si ottiene da V con una sequenza di scoppiamenti su centri lisci trasformate proprie di sottospazi intersezione di H_x.*

La coomologia di Y_X si ottiene (cf. [12, section 5]).

PROPOSIZIONE. *Se* $\mathcal{C}$ *è nested in* X *sia* $D_{\mathcal{C}}$ *la sottovarietà intersezione dei divisori* D_C, $C \in \mathcal{C}$. *Si ha* $H^*(D_{\mathcal{C}}, \mathbf{Z})$ *è l'algebra generata dalle classi* c_A (*indotte dai duali dei divisori* D_A) *per* $A \in \mathcal{F}$ *con relazioni*

$$\prod_{A \in \mathcal{M}} c_A , \quad \text{se } \mathcal{M} \cup \mathcal{C} \text{ non è nested},$$

$$\sum_{x \in A} c_A \text{ per tutti gli } x \in X .$$

2. La teoria di Drinfeld

2.1. – Torniamo alla equazione (0.1) le cui soluzioni speciali sono indicizzate da insiemi nested massimali $\mathcal{S}$ per cui l'intersezione $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} D_A$ è ridotta ad un punto $P_{\mathcal{S}}$, la soluzione ha un andamento asintotico prescritto in $P_{\mathcal{S}}$. Usiamo le notazioni della introduzione R, L ecc.

Per $t \in R$ un elemento di grado 1 e $x \in X$, si considera la serie $x^t := e^{t \log(x)}$ ben definita in una regione in cui si è scelta una determinazione di $\log(x)$.

Nel caso 2-dimensionale $X = \{x, y\}$, X è riducibile, l'algebra L è commutativa e vi è una soluzione canonica $G = x^{t_x} y^{t_y}$. Altrimenti X è irriducibile, $T := \sum_{x \in X} t_x$ è nel centro di L, un insieme nested con base adattata è associato ad una base $x_B, x_X \in X$. Poniamo $u := u_B = x_B / x_X$, $v = x_X$, per ogni $x \in X$, $x \neq x_B$, si ha $x = \alpha_x v(1 + c_x u)$ e

$$\Omega = \frac{T\, dv}{v} + \frac{t_{x_B}\, du}{u} + \left(\sum_{x \neq x_B} \frac{c_x t_x}{1 + c_x u} \right) du , \tag{2.1.1}$$

una soluzione di $dG = \Omega G$ si scrive nella forma $F v^T$ dove (v^T è centrale) F è soluzione di

$$\frac{dF}{du} = \left(\frac{t_{x_B}}{u} + \left(\sum_{x} \frac{c_x t_x}{1 + c_x u} \right) \right) F \tag{2.1.2}$$

vi è una unica soluzione in un intorno 0 della forma $f(u) u^{t_{x_B}}$ con f olomorfa e $f(0) = 1$.

Vi è una interessante combinatoria da trovare che collega le varie soluzioni (che differiscono da costanti) associate a queste soluzioni asintotiche.

Il caso di 3 vettori normalizzati a $x, y, x + y$ corrisponde al sistema di radici A_2 lo scriviamo come

$$t_{12} d \log(z_1 - z_2) + t_{13} d \log(z_1 - z_3) + t_{23} d \log(z_2 - z_3) .$$

($x = z_1 - z_2 = \alpha_1$, $y = z_2 - z_3 = \alpha_2$ le radici semplici). A meno della simmetria del gruppo di Weyl S_3, ci si riduce a 2 insiemi nested massimali associati a x, y con basi adattate $x, x + y$; $y, x + y$ coordinate $u = x/x + y$; $1 - u = y/x + y$. La forma è

$$T d \log(x + y) + t_{12} d \log(u) + t_{23}\, d \log(1 - u) .$$

Le due soluzioni asintotiche

$$G_0 = f(u)u^{t_{12}}, \qquad G_1 = g(u)(1-u)^{t_{23}}, \qquad f(0) = g(1) = 1$$

di

$$dF/du = (2\pi i)^{-1}(A/u + B/(1-u))F$$

intorno a 0 ed 1 (con $A = 2\pi i t_{12}$ e $B = 2\pi i t_{23}$).

Si definisce la costante $\Phi(A,B)$, tramite

$$G_0\,\Phi(A,B) = G_1\,,$$

$\Phi(A,B)$ è una serie formale nelle indeterminate non commutative A, B è un soggetto fondamentale della teoria di Drinfeld che soddisfa delle notevoli identità, i suoi coefficienti sono numeri trascendenti complicati esprimibili in varie forme integrali (cf. [1, 17, 15]).

Nel caso generale per un insieme nested massimale $\mathcal{S}$ e $B \in \mathcal{S}$, sia $R_B := \sum_{p(x)=B} t_x$, abbiamo $t_B = \sum_{x \in B} t_x = \sum_{C \in \mathcal{S},\, C \subset B} R_C$ da cui

$$\text{(2.1.3)} \qquad \begin{cases} \sum_{B \in \mathcal{S}} R_B\, d\log x_B = \sum_{B \in \mathcal{S}} t_B\, d\log u_B\,, \\ \prod_{A \in \mathcal{S}} u_A^{t_A} = \prod_{A \in \mathcal{S}} u_A^{\Sigma_{C \subseteq A} R_C} = \prod_{C \in \mathcal{S}} \left(\prod_{A \supseteq C} u_A\right)^{R_C} = \prod_{C \in \mathcal{S}} x_C^{R_C}. \end{cases}$$

TEOREMA.

(1) *Se $A \in \mathcal{F}$, il residuo di Ω sul divisore D_A nel modello $Y_{\mathcal{F}}$ è t_A. Se $\{A, B\}$ è nested* $[t_A, t_B] = 0$.

(2) *Dato un insieme nested massimale $\mathcal{S}$ e una base adattata x_B, G è soluzione di $dG = \Omega G$ se e solo se $F := G \prod_{A \in \mathcal{S}} x_A^{-R_A}$ è soluzione della equazione*

$$\text{(2.1.4)} \qquad dF = \left[\sum_{A \in \mathcal{S}} R_A\, d\log x_A, F\right] + \Omega_{\mathcal{S}} F = \left[\sum_{A \in \mathcal{S}} t_A\, d\log u_A, F\right] + \Omega_{\mathcal{S}} F\,,$$

dove

$$\text{(2.1.5)} \qquad \Omega_{\mathcal{S}} = \Omega - \sum_{A \in \mathcal{S}} R_A\, d\log x_A = \sum_x t_x\, d\log P_x$$

è olomorfa in $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$.

(3) *Se $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ è semplicemente connesso e contiene $P_{\mathcal{S}}$ esiste una unica funzione olomorfa $F_{\mathcal{S}}$ su $\mathcal{B}$, con $F(P_{\mathcal{S}}) = 1$ per cui la funzione $G_{\mathcal{S}} = F_{\mathcal{S}} \prod_{A \in \mathcal{S}} x_A^{R_A} = F_{\mathcal{S}} \prod_{A \in \mathcal{S}} u_A^{t_A}$ è soluzione della* (0.1).

DIMOSTRAZIONE. La soluzione della equazione $dG = \Omega G$ si costruisce induttivamente sul grado. In grado $n+1$ abbiamo l'equazione $dG_{n+1} = \Omega G_n$ compatibile per la condizione $\Omega \wedge \Omega = 0$.

Posto $\Omega_{\mathcal{S}} = \sum_{A \in \mathcal{S}} P_A du_A$ e $F_{\mathcal{S}} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i$ (F_i di grado i) con $F_0(P_{\mathcal{S}}) = 1$, $F_i(P_{\mathcal{S}}) = 0$,

$i > 0$, l'equazione è equivalente al sistema

$$(2.1.7) \qquad dF_{i+1} = \left[\sum_{A \in S} t_A d \log u_A, F_i\right] + \Omega_S F_i = \sum_{A \in S} ([t_A d \log u_A, F_i] + P_A F_i du_A)$$

con le date condizioni iniziali.

$dF_0 = 0$ implica $F_0 = 1$ e $\left[\sum_{A \in S} R_A d \log x_A, F_0\right] = 0$. Assumendo induttivamente che $\left[\sum_{A \in S} t_A d \log u_A, F_i\right] + \Omega_S F_i$ è olomorfa la compatibilià di (2.1.4) è equivalente alla piattezza Ω. Proviamo che, scegliendo F_{i+1} soluzione di (2.1.7) con la condizione iniziale $F_{i+1}(P_S) = 0$, $\left[\sum_{A \in S} t_A d \log u_A, F_{i+1}\right]$ è olomorfa.

Basta mostrare che $[t_A, F_{i+1}]$ è divisibile per u_A o che $[t_A, F_{i+1}]$ svanisce su $u_A = 0$. Poiché $[t_A, F_{i+1}]$ svanisce in P_S di coordinate $u_B = 0$, basta mostrare che $[t_A, F_{i+1}]$ è costante su $u_A = 0$ o che $[t_A, dF_{i+1}]_{u_A = 0} = 0$.

Da $[t_A, dF_{i+1}] = \left[\sum_{B \in S} t_B d \log u_B, [t_A, F_i]\right] + [t_A, \Omega_S] F_i + \Omega_S [t_A, F_i]$ ponendo $u_A = 0$ per induzione tutti i termini svaniscono tranne eventualmente $[t_A, \Omega_S] F_i$. Per la piattezza $\Omega \wedge \Omega = 0$, abbiamo $[t_A / u_A + P_A, t_B / u_B + P_B] = 0$, $\forall B \neq A$ moltiplicando per u_A si ha $[t_A, t_B / u_B + P_B]_{u_A = 0} = 0$ e quindi $[t_A, \Omega_S]_{u_A = 0} = 0$. ■

2.2. – In [13] si procede studiando opportune restrizioni al bordo delle soluzioni costruite per poter ricondurre il calcolo della costante che lega due soluzioni asintotiche distinte al caso di dimensione 1, rimandiamo per questa discussione un po' tecnica al lavoro suddetto.

3. La monodromia per sistemi di radici

3.1. – La configurazione degli iperpiani associata ad un sistema di radici Φ è particolarmente interessante ed ammette come gruppo di simmetrie il gruppo di Weyl (cf. [5, 18]). Per definizione Φ è un insieme finito di uno spazio Euclideo $\boldsymbol{E}$, usando il prodotto scalare su $\boldsymbol{E}$, $\alpha \in \Phi$ induce una funzione lineare sulla complessificazione V di $\boldsymbol{E}$. L'iperpiano definito da α è la complessificazione dell'iperpiano di $\boldsymbol{E}$ ortogonale ad α.

Siano Φ_+, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ radici positive e semplici, W il gruppo di Weyl generato dalle riflessioni s_i rispetto agli iperpiani ortogonali alle radici semplici.

È usuale presentare tali radici semplici come vertici di un diagramma, il diagramma di Dynkin, che è connesso se e solo se il sistema di radici è irriducibile.

W agisce sul modello canonico associato alla famiglia degli irriducibili che denoteremo Y_Φ.

Lemma.

(1) *La decomposizione di un sistema di radici Φ in irriducibili è la decomposizione astratta in irreducibili.*

(2) *Ogni insieme completo irriducibile è W equivalente a un sottosistema di radici generato da un insieme connesso (nel diagramma di Dynkin) di radici semplici.*

PROPOSIZIONE.

(1) *Ogni insieme nested massimale è* W *equivalente ad un generato da un ordinamento delle radici semplici, tali insiemi si dicono* insiemi nested fondamentali.

(2) *Ordinando i vertici del diagramma di Dynkin la decomposizione degli insiemi delle bandiera è la decomposizione in componenti connesse dei corrispondenti sottodiagrammi.*

Nel caso A_n gli insiemi nested massimali fondamentali si possono descrivere con i monomi non associativi in $n+1$ variabili x_i ordinate *e.g.* $((x_1x_2)x_3)(x_4x_5)$.

Posto che $z_i - z_j$, $1 \leq i < j \leq n+1$ è la radice più lunga del diagramma che unisce i nodi $i, j-1$, se tale sottodiagramma è nell'insieme nested mettiamo una parentesi $(x_i \dots x_j)$. Questo algoritmo stabilisce la corrispondenza.

3.2. – Sia $Y_{\mathbf{R}}$ l'insieme dei punti reali di Y_Φ.

PROPOSIZIONE. *$Y_{\mathbf{R}}$ è una varietà analitica reale spazio totale di un fibrato lineare su una varietà compatta Π_Φ consistente dei punti reali del divisore D_Φ.*

L'unione delle camere di Weyl $\mathbf{E}^0$ è aperto denso in $Y_{\mathbf{R}}$.

L'aspetto più interessante di questa teoria è che la chiusura della camera di Weyl ha la struttura di un poliedro convesso con vertici in corrispondenza biunivoca con gli insiemi nested massimali fondamentali e le facce in corrispondenza con i vari insiemi nested fondamentali (cf. Bar Natan [3, 19]).

3.3. – Tornando alla olonomia per un sistema di radici

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha \in \Phi^+} t_\alpha d \log(\alpha) = \frac{1}{4\pi i} \sum_{\alpha \in \Phi} t_\alpha d \log(\alpha), \qquad (t_\alpha = t_{-\alpha}) \tag{3.3.1}$$

abbiamo visto che W agisce con $w(t_\alpha) = t_{w(\alpha)}$ ed abbiamo anche visto che una soluzione della (0.1) induce una rappresentazione di monodromia del gruppo delle trecce generalizzato, per calcolarla si procede come segue. Si fissa un insieme nested fondamentale massimale $\mathcal{S}$ a cui è associata una soluzione asintotica $G_{\mathcal{S}}$ ed una rappresentazione di monodromia $\varrho_{\mathcal{S}}$.

PROPOSIZIONE. *Se α_i è una radice semplice e $\{\alpha_i\} \in \mathcal{S}$ allora: $\varrho_{\mathcal{S}}(T_{\alpha_i}) = e^{t_{\alpha_i}/2}$.*

Dati due insiemi nested massimali fondamentali $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ con soluzioni $G_{\mathcal{S}}, G_{\mathcal{T}}$ vi è una costante $k_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ per cui

$$G_{\mathcal{S}} k_{\mathcal{S},\mathcal{T}} = G_{\mathcal{T}}$$

ci si riduce a calcolarla quando $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ differiscono per un solo elemento.

Quindi si assume che vi è un sottodiagramma irriducibile A del diagramma di Dynkin e 2 nodi i, j in A tali che $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ contengono A e differiscono solo poiché $\mathcal{S}$ contiene la decomposizione di $A - \{i\}$ e $\mathcal{T}$ quella di $A - \{j\}$. Siano x, y le restrizioni di α_i, α_j allo spazio due dimensionale ortogonale alle altre radici semplici. Le altre radici si restringono a combinazioni lineari $ax + by$ di cui quelle non nulle inducono una equazione di olonomia in 2 variabili che ha due soluzioni asintotiche speciali associate ad x, y la costante che lega queste due soluzioni è la costante $k_{\mathcal{S},\mathcal{C}}$.

Questo metodo può essere usato per ridurre il calcolo della monodromia a calcoli di associatori in due variabili, ad esempio per A_n prendiamo come insieme nested massimale $\mathcal{S} := \{A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n\}$, A_i è il sottodiagramma generato dalle radici $\alpha_j = z_j - z_{j+1}$, $j \leq i$,

Teorema. *Il fattore di monodromia* ϱ *associato a* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$ *è*

$$\varrho(T_k) = \Phi\Big(\sum_{i<k} t_{ik}, t_{k(k+1)}\Big)^{-1} e^{(t_{k\,k+1})/2} (k\; k+1)\, \Phi\Big(\sum_{i<k} t_{ik}, t_{k(k+1)}\Big)(k\; k+1)^{-1} = \tag{3.7.1}$$

$$= \Phi\Big(\sum_{i<k} t_{ik}, t_{k(k+1)}\Big)^{-1} e^{(t_{k\,k+1})/2}\, \Phi\Big(\sum_{i<k} t_{i\,k+1}, t_{k(k+1)}\Big), \qquad k \leq n\,.$$

Dalla formula (3.7.1) si ottengono identità per Φ, dovute a Drinfeld. Lo stesso enunciato appare in [3, 27] in un contesto differente.

Per completare questa breve rassegna andrebbero citate le applicazioni alla teoria dei nodi e le generalizzazioni alle configurazioni di sottospazi ma ci fermeremo qui rimandando il lettore alla letteratura (cf. [20, 25, 28]).

4. Singolarità coniche

4.1. – Le analisi della risoluzione delle singolarità di una configurazione di sottospazi porta ad una generalizzazione che è in fase di messa a punto con Bob Mac Pherson. Si tratta di analizzare una stratificazione le cui singolarità siano *coniche* nel senso che viene definito induttivamente come segue.

Per ogni punto in uno strato la sezione normale con la sua stratificazione indotta sia localmente analiticamente un cono su una varietà di dimensione inferiore stratificata con singolarità coniche.

Si può vedere che, con restrizioni abbastanza leggere, si possono trattare queste stratificazioni come se fossero quelle indotte da una famiglia di sottospazi e definire tutti gli oggetti sia combinatori che geometrici propri della teoria dei sottospazi. Si ha in questo modo un meccanismo generale per costruire esplicitamente modelli di Hironaka che si può ad esempio applicare anche a singolarità determinantali ritrovando in modo diverso le costruzioni delle varietà simmetriche complete.

Questa ricerca è stata finanziata da M.U.R.S.T. (40%).

Bibliografia

[1] K. Aomoto, *Functions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotents.* J. Fac. Univ. Tokyo, 25, 1978, 149-156.

[2] V. I. Arnold, *The Vassiliev theory of discriminants and knots.* In: First European Congress of Mathematics. Birkhäuser, Basel 1994.

[3] D. Bar Natan, *Non associative tangles.* Harvard 1993, preprint.

[4] D. Bar Natan, *On the Vassiliev knot invariants.* Topology, 34, 1995, 423-472.

[5] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie Ch. 4-5-6.* Hermann, Paris 1981.

[6] E. Brieskorn, *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe.* Inv. Math., 12, 1971, 57-61.

[7] E. Brieskorn, *Sur les groupes de tresses (d'après V. I. Arnold).* Séminaire Bourbaki 1971/72, S.L.N., 317, 1973.

[8] P. Cartier, *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevich des noeuds.* C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 316, 1993, 1205-1210.

[9] K. T. Chen, *Iterated integrals of differential forms and loop space cohomology.* Ann. of Math., 1973, 217-246.

[10] I. V. Cherednik, *Generalized Braid Groups and local r-matrix systems.* Doklady Akad. Nauk SSSR, 307, 1989, 27-34.

[11] I. V. Cherednik, *Monodromy representations for generalized Knizhnik-Zamolodchikov equations and Hecke algebras.* Publ. RIMS, Kyoto Univ., 27, 1991, 711-726.

[12] C. De Concini - C. Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements.* Selecta Mathematica, 1, 1995, 459-494.

[13] C. De Concini - C. Procesi, *Hyperplane arrangements and holonomy equations.* Selecta Mathematica, 1, 1995, 495-535.

[14] P. Deligne, *Les immeubles de groupes de tresses généralisés.* Invent. Math., 17, 1972, 273-302.

[15] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points.* In: *Galois groups over Q.* Ed. Ihara, Ribet, Serre, Publ. M.S.R.I., 16, 1987, 79-298.

[16] V. G. Drinfeld, *Quasi Hopf algebras.* Leningrad Math. J., 1, 1990, 1419-1457.

[17] V. G. Drinfeld, *On quasi triangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* $Gal(\overline{Q}/Q)$. Leningrad Math. J., 2, 1991, 829-860.

[18] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge Studies in Adv. Math., 29, 1992.

[19] M. M. Kapranov, *The permutoassociahedron, Mac Lane's coherence theorem and asymptotic zones for the KZ equation.* J. Pure and Appl. Alg., 85, 1993, 119-142.

[20] C. Kassel, *Quantum Groups.* Graduate Texts in Math. Springer, 155, 1995.

[21] S. Keel, *Intersection theory of moduli space of stable N-pointed curves of genus* 0. T.A.M.S., 330, 1992, 545-574.

[22] T. Khono, *On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces.* Nagoya Math. J., 93, 1983, 21-37.

[23] T. Khono, *Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations.* Ann. Inst. Fourier, 37, 1987, 139-160.

[24] V. G. Kniznik - A. B. Zamolodchikov, *Current algebra and the Wess-Zumino model in two dimensions.* Soviet J. on Nuclear Physics, 247, 1984, 83-103.

[25] M. Kontsevich, *Vassilev's knot invariant.* Advances in Soviet Math., 16, 1993, 137-150.

[26] T. Q. T. Le - J. Murakani, *Representations of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral.* Max-Planck-Institut Bonn, preprint.

[27] S. Piunikhin, *Combinatorial expression for universal Vassilev's link invariant.* Harvard Univ. 1993, preprint.

[28] V. A. Vassiliev, *Complements of discriminants of smooth maps.* A.M.S. Transl., 98, 1992.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale Aldo Moro, 2 - 00185 Roma