Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti Lincei
# Matematica e Applicazioni

Paolo Bisegna

## Una teoria di piastra laminata piezoelettrica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9*, Vol. **8** (1997), n.2, p. 137–165.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1997_9_8_2_137_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1997.

*Rend. Mat. Acc. Lincei*
*s. 9, v. 8:137-165 (1997)*

**Meccanica dei solidi.** — *Una teoria di piastra laminata piezoelettrica.* Nota di Paolo Bisegna, presentata (*) dal Socio E. Giangreco.

Abstract. — *A theory of piezoelectric laminates.* A theory of piezoelectric laminates is rationally derived from the three-dimensional Voigt theory of piezoelectricity. The present theory is a generalization to piezoelectric laminates of the Reissner-Mindlin-type layer-wise theory of elastic laminates. Both a differential formulation and a variational formulation of the piezoelectric laminate problem are presented. The proposed theory is adopted in the analysis of simple problems, in order to verify its effectiveness. The results it provides turn out to be in good agreement with the results supplied by the Voigt theory of piezoelectricity.

Key words: Piezoelectric laminates; Piezoelectric materials; Intelligent structures.

Riassunto. — È presentato un modello di piastra laminata piezoelettrica, dedotto razionalmente dalla teoria tridimensionale della piezoelettricità di Voigt. Si tratta di un'estensione ai laminati piezoelettrici della teoria di laminato elastico detta «alla Reissner-Mindlin». Le equazioni che governano il problema del laminato piezoelettrico sono fornite sia in forma differenziale che in forma variazionale. Il modello proposto è utilizzato nell'analisi di alcuni semplici problemi, allo scopo di saggiarne l'affidabilità. I risultati da esso forniti risultano in soddisfacente accordo con quelli ottenuti tramite l'applicazione della teoria della piezoelettricità di Voigt.

## 1. Introduzione

Lo sviluppo di tecnologie innovative costituisce oggigiorno un campo di ampio interesse in Ingegneria. Si riscontra una crescente attenzione alle applicazioni di nuovi materiali, comunemente indicati come «materiali intelligenti» (ad esempio piezoelettrici, a memoria di forma, magnetostrittivi, elettroreologici). In particolare, si sottolinea l'impiego dei materiali intelligenti come sensori od attuatori nella realizzazione delle cosiddette «strutture intelligenti», aventi la capacità di sentire le modificazioni ambientali e di adattarsi ad esse, migliorando in tal modo le proprie prestazioni. I materiali piezoelettrici risultano particolarmente idonei a siffatte applicazioni, data la loro capacità di funzionare sia da sensori che da attuatori. La sintesi di prodotti come le ceramiche piezoelettriche (ad esempio i titanati di piombo e zirconio) o i polimeri piezoelettrici (ad esempio i fluoruri di polivinile) ha reso possibile l'assemblaggio di speciali elementi strutturali compositi, quali i fibrati oppure i laminati piezoelettrici: l'elemento piezoelettrico viene a costituire parte integrante della struttura tradizionale, conferendo ad essa il carattere di «struttura intelligente».

In questa *Nota* è affrontato il problema della modellazione di piastre laminate piezoelettriche: si tratta di ordinarie piastre laminate, cui siano state applicate (in genere, su una o su entrambe le facce) lamine costituite di materiale piezoelettrico.

Il problema della piastra laminata piezoelettrica rettangolare, costituita di lamine omogenee almeno ortotrope, semplicemente appoggiata, connessa elettricamente a

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1997.

terra sul contorno laterale e soggetta a distribuzioni di carico simmetriche rispetto a ciascuna delle mediane del rettangolo, è stato diffusamente studiato in letteratura [1-11]: il laminato è riguardato come un corpo tridimensionale e modellato in applicazione della teoria della piezoelettricità di Voigt. Il problema statico è preso in esame in [1-5, 10, 11], mentre il problema delle vibrazioni libere o forzate è studiato in [6-9]; i lavori [1-7] si limitano al caso della flessione cilindrica, mentre i lavori [8-11] considerano una flessione bidirezionale. In particolare, in [4, 6, 9] è utilizzata l'equazione costitutiva approssimata formulata in [12] nella modellazione delle lamine piezoelettriche; in [11] viene esplicitamente determinato il primo termine dello sviluppo asintotico rispetto al rapporto spessore/lato della soluzione del problema della piastra piezoelettrica omogenea.

Le precedenti soluzioni possono essere utilizzate come casi di raffronto per verificare l'affidabilità di modelli di laminato piezoelettrico, più semplici e più efficienti della teoria di Voigt dal punto di vista computazionale, ed in pratica indispensabili nell'analisi di problemi applicativi che coinvolgano laminati con geometrie o condizioni di carico e di vincolo più generali di quelle considerate in [1-11]. I modelli di laminato piezoelettrico, infatti, muovendo dall'osservazione che il laminato ha due dimensioni spaziali molto maggiori della terza, riguardano il laminato stesso come un corpo bidimensionale. La riduzione dalle equazioni generali della piezoelettricità tridimensionale alle equazioni del laminato piezoelettrico in due sole dimensioni spaziali è effettuata tramite l'introduzione di opportune ipotesi semplificative concernenti la struttura dei campi elettrici e meccanici coinvolti. Naturalmente queste ipotesi riflettono la citata peculiarità geometrica del laminato. È proprio la scelta di tali ipotesi a costituire il passo fondamentale nella formulazione di un modello di laminato piezoelettrico, determinando le prime l'àmbito di applicabilità, e quindi il successo, del secondo.

Sono disponibili in letteratura numerosi modelli di laminato piezoelettrico [13-25]. I modelli presentati in [14-17, 22, 24, 25] possono essere definiti «alla Kirchhoff-Love», in quanto istituiscono una relazione fra lo spostamento nel piano del laminato ed il gradiente dell'inflessione dello stesso. I modelli in [13, 18, 21] sono invece «alla Reissner-Mindlin», essendo basati sulla rappresentazione del campo di spostamento tratta dall'omonimo modello di piastra [26-28]. In [19, 23] si assume una rappresentazione del campo di spostamento polinomiale di terzo grado nello spessore del laminato; in [20] viene invece a tal fine utilizzata una serie trigonometrica. I modelli in [14, 16-19, 21, 22] ipotizzano che il campo elettrico nelle lamine piezoelettriche sia diretto ortogonalmente al piano del laminato [12] e trascurano la rigidezza flessionale delle lamine piezoelettriche: tali assunzioni ne limitano fortemente l'àmbito di applicabilità. Il modello in [20] fa largo uso di «fattori di correzione» per rendere i propri risultati coerenti con quelli della teoria di Voigt; inoltre la condizione al bordo di potenziale elettrico imposto è fatta valere trascurando il gradiente dello spostamento elettrico nel piano del laminato. Il modello in [15] considera il solo regime flessionale di piastre piezoelettriche omogenee, ma prevede un valore della rigidezza flessionale differente da quello calcolato utilizzando le soluzioni in [1-11]. Anche i modelli in [13, 23] prevedono valori inconsistenti della rigidezza flessionale; inoltre il modello in [13], apparentemente a causa di un errore di calcolo, trascura l'interazione fra il campo elettrico trasversale e l'estensione nel piano della piastra. Il modello in [24], basato sulla teoria di piastra piezoelettrica omogenea [25], prevede il corretto valore della rigidezza flessionale e fornisce risultati in buon accordo con quelli della teoria di Voigt, purché applicato a laminati sottili (rapporto spessore/lato minore di 1/20), ma risulta poco adatto a descrivere il comportamento di laminati spessi, in quanto trascura la deformabilità tagliante nello spessore.

Le limitazioni dei precedenti modelli sono superate dal modello di piastra laminata piezoelettrica presentato in questo lavoro. Esso è dedotto razionalmente dalla teoria lineare della piezoelettricità di Voigt, brevemente richiamata nel paragrafo 2. Del problema dell'equilibrio elettroelastico sono ivi fornite sia una formulazione differenziale [29, 30] che una formulazione variazionale, ottenuta generalizzando ai corpi piezoelettrici il classico principio di Hu-Washizu. Il problema dell'equilibrio elettroelastico è quindi specializzato al caso particolare del laminato nel paragrafo 3.

Le ipotesi semplificative adottate in questo lavoro nella deduzione del modello di laminato dalla teoria della piezoelettricità di Voigt sono riportate nel paragrafo 4 ed interessano la deformazione, la tensione, il campo elettrico e lo spostamento elettrico. Le ipotesi sulla deformazione e sulla tensione sono molto simili a quelle del classico modello di piastra di Reissner-Mindlin [26-28], su cui si fonda il modello di laminato elastico detto «con deformazione a taglio del primo ordine», ovvero detto «alla Reissner-Mindlin» [31, 32]; l'ipotesi sul campo elettrico è stata introdotta da Mindlin [13]; l'ipotesi sullo spostamento elettrico è introdotta qui per la prima volta. Le citate ipotesi sono riguardate come vincoli per il corpo tridimensionale [33]. Tali vincoli esplicano reazioni vincolari, rispettivamente interpretate come una tensione, una deformazione, uno spostamento elettrico ed un campo elettrico di natura reattiva. La rappresentazione analitica delle reazioni vincolari è automaticamente ottenuta in applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange [34, 35]. In effetti, data la contemporanea presenza di vincoli sugli spazi duali della deformazione e della tensione, e sugli spazi duali del campo elettrico e dello spostamento elettrico, si tratta di un'applicazione non classica di tale metodo [36-38].

Le equazioni di equilibrio, di congruenza, costitutive, di continuità e di vincolo che governano il problema del laminato piezoelettrico, riguardato come corpo tridimensionale vincolato, sono dedotte nel paragrafo 4, sia in forma differenziale che in forma variazionale. Si mostra che tale problema è equivalente ad un problema in due sole dimensioni spaziali, del quale sono presentate sia una formulazione differenziale che una formulazione variazionale, ottenute rendendo a priori soddisfatte le equazioni di congruenza, costitutive e di vincolo.

Nel paragrafo 5 sono sviluppate alcune applicazioni numeriche, allo scopo di verificare l'affidabilità del modello proposto. È studiata una piastra omogenea, pensata dapprima costituita da un'unica lamina, quindi costituita da più lamine identiche, fra loro perfettamente vincolate ed in contatto elettrico. Successivamente è presa in esame un'effettiva struttura intelligente, costituita da un laminato composito a tre strati, recante applicata sulla faccia inferiore una lamina piezoelettrica. Nelle due diverse modalità di funzionamento del piezoelettrico, come sensore e come attuatore, sono confrontati i risultati ottenuti in applicazione del presente modello con quelli forniti dalla teoria di Voigt.

## 2. Il problema dell'equilibrio elettroelastico

Sia $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali, ${}^3\mathcal{V}$ lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale e ${}^3\mathrm{Sym}$ lo spazio vettoriale euclideo dei tensori simmetrici del secondo ordine su ${}^3\mathcal{V}$.

È assegnato un corpo continuo, la cui configurazione di riferimento $\Omega$ è una regione regolare [39] dello spazio puntuale euclideo tridimensionale. Il corpo è costituito di materiale linearmente piezoelettrico ed è soggetto a forze di volume ${}^3\boldsymbol{b}$, cariche libere di volume $\varrho$, forze di superficie ${}^3\boldsymbol{p}$ agenti sulla parte $\partial_f\Omega$ della sua frontiera $\partial\Omega$, cariche libere di superficie $\omega$ distribuite sulla parte $\partial_\omega\Omega$ di $\partial\Omega$, spostamento impresso ${}^3\boldsymbol{s}_0$ su $\partial_s\Omega := \partial\Omega\backslash\partial_f\Omega$ e potenziale elettrico imposto $\phi_0$ su $\partial_\phi\Omega := \partial\Omega\backslash\partial_\omega\Omega$. Le incognite del problema dell'equilibrio elettroelastico per $\Omega$ sono: lo spostamento ${}^3\boldsymbol{s}$ (a valori in ${}^3\mathcal{V}$), la deformazione ${}^3\boldsymbol{E}$ (a valori in ${}^3\mathrm{Sym}$), la tensione ${}^3\boldsymbol{T}$ (a valori in ${}^3\mathrm{Sym}$), il potenziale elettrico $\phi$ (a valori in $\mathbb{R}$), il campo elettrico ${}^3\boldsymbol{e}$ (a valori in ${}^3\mathcal{V}$) e lo spostamento elettrico ${}^3\boldsymbol{d}$ (a valori in ${}^3\mathcal{V}$) che hanno luogo in $\Omega$ sotto l'azione dei carichi assegnati. Nell'àmbito della teoria lineare della piezoelettricità di Voigt [29, 30], il problema dell'equilibrio elettroelastico è governato da

(*i*) equazioni di equilibrio:

$$(1)\qquad \begin{cases} -{}^3\mathrm{div}\,{}^3\boldsymbol{T} - {}^3\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega\,, \\ {}^3\boldsymbol{T}[{}^3\boldsymbol{n}] - {}^3\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} & \text{su } \partial_f\Omega\,, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -{}^3\mathrm{div}\,{}^3\boldsymbol{d} + \varrho = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ -\{{}^3\boldsymbol{d}\}\cdot{}^3\boldsymbol{n} + \omega = 0 & \text{su } \partial_\omega\Omega\,, \end{cases}$$

dove ${}^3\mathrm{div}$ denota l'operatore divergenza, ${}^3\boldsymbol{n}$ è la normale esterna a $\partial\Omega$, le parentesi quadre indicano un'applicazione lineare, il punto indica il prodotto scalare e $\{\cdot\}$ denota la discontinuità dell'argomento attraverso la frontiera di $\Omega$ [30]; in effetti, si assume che lo spostamento elettrico ${}^3\boldsymbol{d}$ si annulli all'esterno di $\Omega$: si tratta di solito di un'ipotesi accettabile, se $\Omega$ si trova nel vuoto o nell'aria [40]. Pertanto, la quantità $-\{{}^3\boldsymbol{d}\}$ sarà nel seguito sostituita da ${}^3\boldsymbol{d}$, che, come detto, rappresenta lo spostamento elettrico *all'interno* di $\Omega$;

(*ii*) equazioni di congruenza:

$$(2)\qquad \begin{cases} {}^3\widetilde{\nabla}\,{}^3\boldsymbol{s} - {}^3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega\,, \\ -{}^3\boldsymbol{s} + {}^3\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{0} & \text{su } \partial_s\Omega\,, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} {}^3\nabla\phi + {}^3\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega\,, \\ -\phi + \phi_0 = 0 & \text{su } \partial_\phi\Omega\,, \end{cases}$$

dove ${}^3\nabla$ denota l'operatore gradiente e la tilde denota la parte simmetrica;

(*iii*) equazioni costitutive:

$$(3)\qquad \begin{cases} {}^3\mathbb{C}[{}^3\boldsymbol{E}] - {}^t({}^3\boldsymbol{f})[{}^3\boldsymbol{e}] - {}^3\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega\,, \\ -{}^3\boldsymbol{f}[{}^3\boldsymbol{E}] - {}^3\boldsymbol{\varepsilon}[{}^3\boldsymbol{e}] + {}^3\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega\,, \end{cases}$$

ove ${}^3\mathcal{C}$ è un tensore simmetrico del secondo ordine su ${}^3$Sym (tensore di elasticità a campo elettrico costante), ${}^3\boldsymbol{\varepsilon}$ è un tensore simmetrico del secondo ordine su ${}^3\mathcal{V}$ (tensore dielettrico a deformazione costante) ed ${}^3f$ è un'applicazione di ${}^3$Sym in ${}^3\mathcal{V}$ (tensore piezoelettrico). L'apice $t$ denota la trasposizione.

È immediato verificare [41] che il problema dell'equilibrio elettroelastico ammette la seguente formulazione variazionale, estensione ai corpi piezoelettrici del classico funzionale di Hu-Washizu: «si determinino lo spostamento, il potenziale elettrico, la tensione, lo spostamento elettrico, la deformazione ed il campo elettrico che rendono stazionario il funzionale

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad W({}^3\boldsymbol{s}, \phi, {}^3\boldsymbol{T}, {}^3\boldsymbol{d}, {}^3\boldsymbol{E}, {}^3\boldsymbol{e}) := & \int_\Omega ({}^3\mathcal{C}[{}^3\boldsymbol{E}]\cdot{}^3\boldsymbol{E} - 2({}^3f)[{}^3\boldsymbol{E}]\cdot{}^3\boldsymbol{e} - {}^3\boldsymbol{\varepsilon}[{}^3\boldsymbol{e}]\cdot{}^3\boldsymbol{e})/2\, dv \,+ \\
& - \int_\Omega ({}^3\boldsymbol{T}\cdot{}^3\boldsymbol{E} - {}^3\boldsymbol{d}\cdot{}^3\boldsymbol{e})\, dv + \int_\Omega ({}^3\boldsymbol{T}\cdot{}^3\widetilde{\nabla}\,{}^3\boldsymbol{s} + {}^3\boldsymbol{d}\cdot{}^3\nabla\phi)\, dv \,+ \\
& - \int_\Omega ({}^3\boldsymbol{b}\cdot{}^3\boldsymbol{s} - \varrho\phi)\, dv - \int_{\partial_f\Omega} {}^3\boldsymbol{p}\cdot{}^3\boldsymbol{s}\, da + \int_{\partial_\omega\Omega} \omega\phi\, da \,+ \\
& - \int_{\partial_s\Omega} {}^3\boldsymbol{T}[{}^3\boldsymbol{n}]\cdot({}^3\boldsymbol{s} - {}^3\boldsymbol{s}_0)\, da - \int_{\partial_\phi\Omega} {}^3\boldsymbol{d}\cdot{}^3\boldsymbol{n}(\phi - \phi_0)\, da\text{»}
\end{aligned}
$$

ove $dv$ è l'elemento di volume in $\Omega$ e $da$ è l'elemento di superficie su $\partial\Omega$. Invero, le condizioni di stazionarietà di $W$ rispetto ad ${}^3\boldsymbol{s}$ e $\phi$ forniscono le equazioni di equilibrio (1); quelle rispetto a ${}^3\boldsymbol{T}$ e ${}^3\boldsymbol{d}$ forniscono le equazioni di congruenza (2); quelle rispetto a ${}^3\boldsymbol{E}$ ed ${}^3\boldsymbol{e}$ forniscono le equazioni costitutive (3).

La densità di energia libera immagazzinata nel corpo in una trasformazione isoterma è definita [42], in ogni punto $x \in \Omega$, da:

$$
(5)\qquad \mathcal{E}(x) = ({}^3\boldsymbol{T}(x)\cdot{}^3\boldsymbol{E}(x) + {}^3\boldsymbol{d}(x)\cdot{}^3\boldsymbol{e}(x))/2\,,
$$

ove $({}^3\boldsymbol{T}, {}^3\boldsymbol{d})$ ed $({}^3\boldsymbol{E}, {}^3\boldsymbol{e})$ sono legati dalle equazioni costitutive (3). Di conseguenza, risulta:

$$
(6)\qquad \mathcal{E}(x) = ({}^3\mathcal{C}(x)[{}^3\boldsymbol{E}(x)]\cdot{}^3\boldsymbol{E}(x) + {}^3\boldsymbol{\varepsilon}(x)[{}^3\boldsymbol{e}(x)]\cdot{}^3\boldsymbol{e}(x))/2\,.
$$

Al fine di garantire un comportamento stabile del materiale, si suppone che esistano costanti positive $a$, $b$, $\bar{a}$ e $\bar{b}$, tali che, per ogni deformazione ${}^3\boldsymbol{E}$ e campo elettrico ${}^3\boldsymbol{e}$, ed in ogni punto $x \in \Omega$:

$$
(7)\qquad a\,|{}^3\boldsymbol{E}(x)|^2 + b\,|{}^3\boldsymbol{e}(x)|^2 \leq \mathcal{E}(x) \leq \bar{a}\,|{}^3\boldsymbol{E}(x)|^2 + \bar{b}\,|{}^3\boldsymbol{e}(x)|^2\,,
$$

ove $|\cdot|$ indica la norma dell'argomento.

Si osservi che, in virtù dell'ipotesi (7), la predetta formulazione variazionale può essere precisata come segue:

$$
(8)\qquad \overline{W} = \inf_{{}^3s}\,\sup_{\phi}\left\{\sup_{{}^3T}\,\inf_{{}^3d}\left[\inf_{{}^3E}\,\sup_{{}^3e}\, W({}^3\boldsymbol{s}, \phi, {}^3\boldsymbol{T}, {}^3\boldsymbol{d}, {}^3\boldsymbol{E}, {}^3\boldsymbol{e})\right]\right\}.
$$

## 3. Il problema della piastra laminata piezoelettrica

Si suppone d'ora in poi che $\Omega$ sia un corpo a forma di piastra, avente sezione media $\mathcal{M}$ e spessore $2\delta$: pertanto, $\Omega = \mathcal{M} \times ]-\delta, \delta[$. È fissato un riferimento cartesiano ortonormale $(O, x_1, x_2, \zeta)$, con l'origine $O$ e gli assi $x_1$ e $x_2$ appartenenti al piano medio. La struttura geometrica di prodotto cartesiano posseduta da $\Omega$ suggerisce di introdurre la seguente decomposizione degli spazi ${}^3\mathcal{V}$ e ${}^3\mathrm{Sym}$:

$$ (9) \qquad {}^3\mathcal{V} = \mathcal{V} \oplus \mathbb{R} \quad \text{e} \quad {}^3\mathrm{Sym} = \mathrm{Sym} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathbb{R}, $$

ove $\oplus$ denota la somma diretta, $\mathcal{V}$ è lo spazio dei vettori paralleli ad $\mathcal{M}$ e Sym è lo spazio dei tensori simmetrici del secondo ordine su $\mathcal{V}$. Pertanto, un generico vettore ${}^3\boldsymbol{a} \in {}^3\mathcal{V}$ ed un generico tensore simmetrico ${}^3\boldsymbol{S} \in {}^3\mathrm{Sym}$ saranno rispettivamente identificati con la coppia $(\boldsymbol{a}; a) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}$ e con la terna $(\boldsymbol{S}; \boldsymbol{s}; s) \in \mathrm{Sym} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}$, univocamente determinate dalle equazioni:

$$ (10) \qquad {}^3\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + {}^3\boldsymbol{k}a \quad \text{e} \quad {}^3\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S} + 2(\boldsymbol{s} \otimes {}^3\boldsymbol{k})^{\sim} + {}^3\boldsymbol{k} \otimes {}^3\boldsymbol{k}s, $$

dove ${}^3\boldsymbol{k}$ è il versore dell'asse $\zeta$ e $\otimes$ denota il prodotto tensore. Quali uniche eccezioni a tale simbologia, dovute ad una questione di tradizione, la deformazione ${}^3\boldsymbol{E}$ sarà rappresentata dalla terna $(\boldsymbol{E}; \boldsymbol{\gamma}/2; \varepsilon)$ in luogo di $(\boldsymbol{E}; \boldsymbol{e}; e)$ e la tensione ${}^3\boldsymbol{T}$ sarà rappresentata dalla terna $(\boldsymbol{T}; \boldsymbol{\tau}; \sigma)$ in luogo di $(\boldsymbol{T}; \boldsymbol{t}; t)$. Gli operatori gradiente $({}^3\nabla)$ e divergenza $({}^3\mathrm{div})$ subiscono un'analoga decomposizione: denotando con $\nabla$ e div rispettivamente il gradiente e la divergenza rispetto alle sole variabili $x_1$ e $x_2$ e con $(\cdot)_{,\zeta}$ la derivazione rispetto a $\zeta$, risulta:

$$ (11) \qquad {}^3\widetilde{\nabla}\,{}^3\boldsymbol{s} = (\widetilde{\nabla}\boldsymbol{s}; (\nabla s + \boldsymbol{s}_{,\zeta})/2; s_{,\zeta}) \quad \text{e} \quad {}^3\mathrm{div}\,{}^3\boldsymbol{T} = (\mathrm{div}\,\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\tau}_{,\zeta}; \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} + \sigma_{,\zeta}). $$

Il corpo $\Omega$ sia un laminato composto da $N$ lamine: qualsiasi quantità relativa alla $i^{\text{esima}}$ lamina sarà affetta dall'apice $(i)$; è comunque esclusa la sommatoria rispetto ad indici ripetuti. La $i^{\text{esima}}$ lamina occupa la regione $\Omega^{(i)} = \mathcal{M} \times ]h_-^{(i)}, h_+^{(i)}[$, ove gli scalari $h_\pm^{(i)}$ sono tali che $h_+^{(i)} = h_-^{(i+1)}$. Lo spessore della $i^{\text{esima}}$ lamina è pari a $2\delta^{(i)} = h_+^{(i)} - h_-^{(i)}$ ed il piano medio della stessa si trova alla quota $h_m^{(i)} = (h_+^{(i)} + h_-^{(i)})/2$.

Sulla piastra agiscono le forze di volume ${}^3\boldsymbol{b}^{(i)}$ e le cariche libere di volume $\varrho^{(i)}$. Sulle facce inferiore $(-)$ e superiore $(+)$ agiscono le forze superficiali ${}^3\boldsymbol{p}^{\pm}$ e le cariche libere superficiali $\omega^{\pm}$. Siano $\{\partial_s\mathcal{M}, \partial_f\mathcal{M}\}$ e $\{\partial_\phi\mathcal{M}, \partial_\omega\mathcal{M}\}$ due partizioni di $\partial\mathcal{M}$ tali che $\partial_s\mathcal{M}$, $\partial_f\mathcal{M}$, $\partial_\phi\mathcal{M}$ e $\partial_\omega\mathcal{M}$ siano vuoti o costituiti da curve generalmente regolari. Sulle due parti complementari $\partial_s\Omega^{(i)} = \partial_s\mathcal{M} \times ]h_-^{(i)}, h_+^{(i)}[$ e $\partial_f\Omega^{(i)} = \partial_f\mathcal{M} \times ]h_-^{(i)}, h_+^{(i)}[$ della superficie laterale $\partial\mathcal{M} \times ]h_-^{(i)}, h_+^{(i)}[$ di $\Omega^{(i)}$ sono rispettivamente assegnati gli spostamenti ${}^3\boldsymbol{s}_0^{(i)}$ e le forze superficiali ${}^3\boldsymbol{p}^{(i)}$. Infine, su $\partial_\phi\Omega^{(i)} = \partial_\phi\mathcal{M} \times ]h_-^{(i)}, h_+^{(i)}[$ e $\partial_\omega\Omega^{(i)} = \partial_\omega\mathcal{M} \times ]h_-^{(i)}, h_+^{(i)}[$ sono rispettivamente assegnati il potenziale elettrico $\phi_0^{(i)}$ e le cariche libere superficiali $\omega^{(i)}$.

Ogni lamina della piastra è omogenea e composta di materiale linearmente piezoelettrico, avente almeno simmetria monoclina (classe $C_2$ nella nomenclatura di Schönflies, oppure 2 in quella di Hermann-Maugin [29]), con l'asse binario di simmetria ortogonale a $\mathcal{M}$. Per tale classe di simmetria materiale, ed adottando la presente simbologia, le equazioni costitutive (3) sono così riscritte:

$$\mathcal{C}^{(i)}[\boldsymbol{E}^{(i)}] + \boldsymbol{A}^{(i)}\varepsilon^{(i)} - \boldsymbol{B}^{(i)}e^{(i)} - \boldsymbol{T}^{(i)} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega^{(i)}\,, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{G}^{(i)}[\boldsymbol{\gamma}^{(i)}] - {}^t\boldsymbol{L}^{(i)}[\boldsymbol{e}^{(i)}] - \boldsymbol{\tau}^{(i)} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega^{(i)}\,, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{A}^{(i)}\cdot\boldsymbol{E}^{(i)} + \kappa^{(i)}\varepsilon^{(i)} - h^{(i)}e^{(i)} - \sigma^{(i)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(i)}\,, \tag{14}$$

$$-\boldsymbol{L}^{(i)}[\boldsymbol{\gamma}^{(i)}] - \boldsymbol{M}^{(i)}[\boldsymbol{e}^{(i)}] + \boldsymbol{d}^{(i)} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega^{(i)}\,, \tag{15}$$

$$-\boldsymbol{B}^{(i)}\cdot\boldsymbol{E}^{(i)} - h^{(i)}\varepsilon^{(i)} - l^{(i)}e^{(i)} + d^{(i)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(i)}, \tag{16}$$

ove $\mathcal{C}^{(i)}$ è un tensore simmetrico del secondo ordine su Sym; $\boldsymbol{A}^{(i)}$, $\boldsymbol{B}^{(i)}$, $\boldsymbol{G}^{(i)}$ e $\boldsymbol{M}^{(i)}$ sono tensori simmetrici del secondo ordine su $\mathbb{R}$; $\boldsymbol{L}^{(i)}$ è un tensore del secondo ordine su $\mathbb{R}$; infine, $\kappa^{(i)}$, $h^{(i)}$ ed $l^{(i)}$ sono scalari. Complessivamente, $\mathcal{C}^{(i)}$, $\boldsymbol{A}^{(i)}$, $\boldsymbol{B}^{(i)}$, $\boldsymbol{G}^{(i)}$, $\boldsymbol{M}^{(i)}$, $\boldsymbol{L}^{(i)}$, $\kappa^{(i)}$, $h^{(i)}$ ed $l^{(i)}$ dipendono da venticinque costanti materiali [29]. Si noti che le equazioni costitutive di un materiale linearmente elastico monoclino si ottengono come caso particolare delle (12)-(16), ponendo $\boldsymbol{B}^{(i)} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{L}^{(i)} = \boldsymbol{0}$ ed $h^{(i)} = 0$.

Le lamine sono fra loro perfettamente vincolate ed in contatto elettrico, in corrispondenza delle superfici interlaminari: pertanto, valgono le equazioni di continuità ($i = 1 \ldots N-1$):

$$(\boldsymbol{s}^{(i+1)} - \boldsymbol{s}^{(i)})|_{h_+^{(i)}} = \boldsymbol{0}\,, \qquad (s^{(i+1)} - s^{(i)})|_{h_+^{(i)}} = 0 \quad \text{e} \quad (\phi^{(i+1)} - \phi^{(i)})|_{h_+^{(i)}} = 0\,, \tag{17}$$

dove $(\cdot)|_{\bar{\zeta}}$ è il valore della quantità $(\cdot)$ per $\zeta = \bar{\zeta}$.

Denotando con $\boldsymbol{t}^{(i)}$, $t^{(i)}$ e $g^{(i)}$ ($i = 1 \ldots N-1$) i moltiplicatori di Lagrange delle (17) e ponendo $\boldsymbol{t}^{(0)} = -\boldsymbol{p}^-$, $\boldsymbol{t}^{(N)} = \boldsymbol{p}^+$, $t^{(0)} = -p^-$, $t^{(N)} = p^+$, $g^{(0)} = \omega^-$, $g^{(N)} = -\omega^+$, il funzionale (4) diventa, nel caso di un laminato:

$$\begin{aligned}
W_l = {} & \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(i)}} [\mathcal{C}^{(i)}[\boldsymbol{E}^{(i)}]\cdot[\boldsymbol{E}^{(i)}] + \kappa^{(i)}\varepsilon^{(i)2} - l^{(i)}e^{(i)^2} + 2\varepsilon^{(i)}\boldsymbol{A}^{(i)}\cdot\boldsymbol{E}^{(i)} + \\
& -2e^{(i)}\boldsymbol{B}^{(i)}\cdot\boldsymbol{E}^{(i)} - 2h^{(i)}\varepsilon^{(i)}e^{(i)} + \boldsymbol{G}^{(i)}[\boldsymbol{\gamma}^{(i)}]\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(i)} - \boldsymbol{M}^{(i)}[\boldsymbol{e}^{(i)}]\cdot\boldsymbol{e}^{(i)} - 2\boldsymbol{L}^{(i)}[\boldsymbol{\gamma}^{(i)}]\cdot\boldsymbol{e}^{(i)}]\,dv + \\
& - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega^{(i)}} (\boldsymbol{T}^{(i)}\cdot\boldsymbol{E}^{(i)} + \sigma^{(i)}\varepsilon^{(i)} + \boldsymbol{\tau}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(i)} - \boldsymbol{d}^{(i)}\cdot\boldsymbol{e}^{(i)} - d^{(i)}e^{(i)})\,dv + \\
& + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega^{(i)}} [\boldsymbol{T}^{(i)}\cdot\widetilde{\nabla}\boldsymbol{s}^{(i)} + \sigma^{(i)}s^{(i)}_{,\zeta} + \boldsymbol{\tau}^{(i)}\cdot(\nabla s^{(i)} + \boldsymbol{s}^{(i)}_{,\zeta}) + \boldsymbol{d}^{(i)}\cdot\nabla\phi^{(i)} + d^{(i)}\phi^{(i)}_{,\zeta}]\,dv + \\
& - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega^{(i)}} (\boldsymbol{b}^{(i)}\cdot\boldsymbol{s}^{(i)} + b^{(i)}s^{(i)} - \varrho^{(i)}\phi^{(i)})\,dv - \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial_f\Omega^{(i)}} (\boldsymbol{p}^{(i)}\cdot\boldsymbol{s}^{(i)} + p^{(i)}s^{(i)})\,dl\,d\zeta + \\
& - \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial_s\Omega^{(i)}} [\boldsymbol{T}^{(i)}[\boldsymbol{n}]\cdot(\boldsymbol{s}^{(i)} - \boldsymbol{s}_0^{(i)}) + \boldsymbol{\tau}^{(i)}\cdot\boldsymbol{n}(s^{(i)} - s_0^{(i)})]\,dl\,d\zeta + \\
& + \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial_\omega\Omega^{(i)}} \omega^{(i)}\phi^{(i)}\,dl\,d\zeta - \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial_\phi\Omega^{(i)}} \boldsymbol{d}^{(i)}\cdot\boldsymbol{n}(\phi^{(i)} - \phi_0^{(i)})\,dl\,d\zeta +
\end{aligned} \tag{18}$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{M}} [\boldsymbol{t}^{(i)}\cdot \boldsymbol{s}^{(i)}|_{h_+^{(i)}} - \boldsymbol{t}^{(i-1)}\cdot \boldsymbol{s}^{(i)}|_{h_-^{(i)}} + t^{(i)}\cdot s^{(i)}|_{h_+^{(i)}} - t^{(i-1)}\cdot s^{(i)}|_{h_-^{(i)}} +$$
$$+ g^{(i)}\cdot \phi^{(i)}|_{h_+^{(i)}} - g^{(i-1)}\cdot \phi^{(i)}|_{h_-^{(i)}}]\, da\,,$$

ove $dl$ è l'elemento d'arco lungo $\partial\mathcal{M}$ ed $\boldsymbol{n}$ è la normale esterna a $\partial\mathcal{M}$.

Le equazioni che governano il problema dell'equilibrio elettroelastico del laminato, *riguardato come corpo tridimensionale*, si ottengono imponendo la stazionarietà del funzionale $W_l$. In particolare, le condizioni di stazionarietà di $W_l$ rispetto a $\boldsymbol{s}^{(i)}$, $s^{(i)}$ e $\phi^{(i)}$ forniscono le equazioni di equilibrio:

$$(19)\quad \begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{T}^{(i)} - \boldsymbol{\tau}^{(i)}_{,\zeta} - \boldsymbol{b}^{(i)} = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega^{(i)}, \\ \boldsymbol{\tau}^{(i)}|_{h_+^{(i)}} - \boldsymbol{t}^{(i)} = \boldsymbol{0} & \text{su } \mathcal{M}, \\ -\boldsymbol{\tau}^{(i)}|_{h_-^{(i)}} + \boldsymbol{t}^{(i-1)} = \boldsymbol{0} & \text{su } \mathcal{M}, \\ \boldsymbol{T}^{(i)}[\boldsymbol{n}] - \boldsymbol{p}^{(i)} = \boldsymbol{0} & \text{su } \partial_f \Omega^{(i)}; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{(i)} - \sigma^{(i)}_{,\zeta} - b^{(i)} = 0 & \text{in } \Omega^{(i)}, \\ \sigma^{(i)}|_{h_+^{(i)}} - t^{(i)} = 0 & \text{su } \mathcal{M}, \\ -\sigma^{(i)}|_{h_-^{(i)}} + t^{(i-1)} = 0 & \text{su } \mathcal{M}, \\ \boldsymbol{\tau}^{(i)}\cdot \boldsymbol{n} - p^{(i)} = 0 & \text{su } \partial_f \Omega^{(i)}; \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{d}^{(i)} - d^{(i)}_{,\zeta} + \varrho^{(i)} = 0 & \text{in } \Omega^{(i)}, \\ d^{(i)}|_{h_+^{(i)}} - g^{(i)} = 0 & \text{su } \mathcal{M}, \\ -d^{(i)}|_{h_-^{(i)}} + g^{(i-1)} = 0 & \text{su } \mathcal{M}, \\ \boldsymbol{d}^{(i)}\cdot \boldsymbol{n} + \omega^{(i)} = 0 & \text{su } \partial_\omega \Omega^{(i)}; \end{cases}$$

le condizioni di stazionarietà di $W_l$ rispetto a $\boldsymbol{T}^{(i)}$, $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$, $\sigma^{(i)}$, $\boldsymbol{d}^{(i)}$ e $d^{(i)}$ forniscono le equazioni di congruenza:

$$(22)\quad \widetilde{\nabla} \boldsymbol{s}^{(i)} - \boldsymbol{E}^{(i)} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega^{(i)} \quad \text{e} \quad -\boldsymbol{s}^{(i)} + \boldsymbol{s}_0^{(i)} = \boldsymbol{0} \quad \text{su } \partial_s \Omega^{(i)},$$

$$(23)\quad \boldsymbol{s}^{(i)}_{,\zeta} + \nabla s^{(i)} - \boldsymbol{\gamma}^{(i)} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega^{(i)} \quad \text{e} \quad -s^{(i)} + s_0^{(i)} = 0 \quad \text{su } \partial_s \Omega^{(i)},$$

$$(24)\quad s^{(i)}_{,\zeta} - \varepsilon^{(i)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(i)},$$

$$(25)\quad \nabla \phi^{(i)} + \boldsymbol{e}^{(i)} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega^{(i)} \quad \text{e} \quad -\phi^{(i)} + \phi_0^{(i)} = 0 \quad \text{su } \partial_\phi \Omega^{(i)},$$

$$(26)\quad \phi^{(i)}_{,\zeta} + e^{(i)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(i)};$$

le condizioni di stazionarietà di $W_l$ rispetto a $\boldsymbol{E}^{(i)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$, $\varepsilon^{(i)}$, $\boldsymbol{e}^{(i)}$ ed $e^{(i)}$ forniscono le equazioni costitutive (12)-(16); infine, le condizioni di stazionarietà di $W_l$ rispetto a $\boldsymbol{t}^{(i)}$, $t^{(i)}$ e $g^{(i)}$ forniscono le equazioni di continuità in corrispondenza delle superfici interlaminari (17).

## 4. Il modello di piastra laminata piezoelettrica

In questo paragrafo viene formulato un modello di laminato piezoelettrico. Il laminato è riguardato come corpo bidimensionale: si tratta perciò di una modellazione meno ricca, o più approssimativa, di quella presentata nel paragrafo precedente, ma assai più efficiente dal punto di vista computazionale. La riduzione da tre a due delle dimensioni spaziali coinvolte nel problema del laminato piezoelettrico è effettuata tramite l'introduzione di opportune ipotesi semplificative intorno alla struttura dei campi incogniti. Tali ipotesi hanno l'ufficio di individuare a priori particolari sottoclassi di ammissibilità per i campi incogniti. Sono introdotte sia ipotesi «cinematiche», sulla deformazione e sul campo elettrico, che ipotesi «statiche», sulla tensione e sullo spostamento elettrico. In virtù di (8), le approssimazioni introdotte dalle ipotesi cinematiche e le approssimazioni introdotte dalle ipotesi statiche inducono errori di segno opposto sul valore ottimo $\overline{W}$ del funzionale $W$: ciò suggerisce di scegliere ipotesi cinematiche ed ipotesi statiche fra loro duali.

Le ipotesi semplificative poste a base del presente modello sono riguardate come vincoli interni lisci [33], introdotti nella formulazione tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange [34, 35]. I moltiplicatori di Lagrange hanno il significato meccanico di reazioni vincolari: in particolare, è mostrato che le reazioni dei vincoli interni sulla deformazione e sul campo elettrico hanno il significato di tensione e spostamento elettrico reattivi, mentre le reazioni dei vincoli interni sulla tensione e sullo spostamento elettrico hanno il significato di deformazione e campo elettrico reattivi. A causa della presenza delle reazioni vincolari, le grandezze fisiche coinvolte risultano artificialmente sdoppiate. Per economia di esposizione, sono perciò poste le seguenti definizioni: sono detti *totali* lo spostamento elettrico e la tensione che soddisfano le equazioni di equilibrio; analogamente, sono detti *totali* il campo elettrico e la deformazione che soddisfano le equazioni di congruenza. Dal canto opposto, la deformazione, la tensione, il campo elettrico e lo spostamento elettrico *costitutivi* sono quelli legati dalle equazioni costitutive piezoelettriche. Ovviamente nel modello tridimensionale presentato nel paragrafo 3, esente da vincoli, campi totali e campi costitutivi coincidono.

Allo scopo di caratterizzare i campi reattivi, sono dapprima fatte valere *solamente* le ipotesi cinematiche oppure *solamente* le ipotesi statiche.

Si supponga quindi che valgano solamente le seguenti ipotesi cinematiche:

*i'*) l'elongazione in direzione trasversale $\varepsilon^{(i)}$ è nulla;

*ii'*) lo scorrimento in direzione trasversale $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ è costante rispetto a $\zeta$ (la costante potendo dipendere dall'indice di lamina $(i)$);

*iii'*) il campo elettrico in direzione trasversale $e^{(i)}$ è costante rispetto a $\zeta$ (la costante potendo dipendere dall'indice di lamina $(i)$).

Le ipotesi *i'*) e *ii'*) sono alla base della teoria di laminato elastico detta «con deformazione a taglio del primo ordine», ovvero detta «alla Reissner-Mindlin» [31, 32]: infatti, essa mutua le stesse ipotesi dal modello di piastra di Reissner-Mindlin [26-28]. L'ipotesi *iii'*) è introdotta da Mindlin [13].

Denotando rispettivamente con $\alpha^{(i)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$ ed $\eta^{(i)}$ i moltiplicatori di Lagrange dei vincoli *i'*), *ii'*) e *iii'*), si ottiene la lagrangiana:

$$L_l' = W_l + \Lambda_l' \,, \tag{27}$$

ove

$$\Lambda_l' = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega^{(i)}} (\alpha^{(i)} \varepsilon^{(i)} + \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(i)}_{,\zeta} + \eta^{(i)} e^{(i)}_{,\zeta})\, dv\,. \tag{28}$$

Le condizioni di stazionarietà di $L_l'$ rispetto a $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$, $\varepsilon^{(i)}$ ed $e^{(i)}$ sono differenti dalle corrispondenti condizioni di stazionarietà di $W_l$, riportate in (13), (14) e (16), e risultano, rispettivamente:

$$\boldsymbol{G}^{(i)}[\boldsymbol{\gamma}^{(i)}] - {}^t\boldsymbol{L}^{(i)}[\boldsymbol{e}^{(i)}] - \boldsymbol{\tau}^{(i)} - \boldsymbol{\lambda}^{(i)}_{,\zeta} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{(i)} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\lambda}^{(i)}|_{h^{(i)}_\pm} = \mathbf{0} \ \text{su } \mathcal{M}, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{A}^{(i)} \cdot \boldsymbol{E}^{(i)} + \kappa^{(i)} \varepsilon^{(i)} - h^{(i)} e^{(i)} - \sigma^{(i)} + \alpha^{(i)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(i)}, \tag{30}$$

$$-\boldsymbol{B}^{(i)} \cdot \boldsymbol{E}^{(i)} - h^{(i)} \varepsilon^{(i)} - l^{(i)} e^{(i)} + d^{(i)} - \eta^{(i)}_{,\zeta} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(i)} \quad \text{e} \quad \eta^{(i)}|_{h^{(i)}_\pm} = 0 \ \text{su } \mathcal{M}. \tag{31}$$

Pertanto, nel vigore di *i'*), *ii'*) e *iii'*), la tensione e lo spostamento elettrico sono sdoppiati: in particolare, dalle (19) e (20), e dalle (12), (29) e (30), segue che la tensione totale e la tensione costitutiva sono, rispettivamente:

$$(\boldsymbol{T}^{(i)}; \boldsymbol{\tau}^{(i)}; \sigma^{(i)}) \quad \text{e} \quad (\boldsymbol{T}^{(i)}; \boldsymbol{\tau}^{(i)} + \boldsymbol{\lambda}^{(i)}_{,\zeta}; \sigma^{(i)} - \alpha^{(i)}) \ \text{con } \boldsymbol{\lambda}^{(i)}|_{h^{(i)}_\pm} = \mathbf{0}, \tag{32}$$

mentre dalla (21), e dalle (15) e (31), segue che lo spostamento elettrico totale e lo spostamento elettrico costitutivo sono, rispettivamente:

$$(\boldsymbol{d}^{(i)}; d^{(i)}) \quad \text{e} \quad (\boldsymbol{d}^{(i)}; d^{(i)} - \eta^{(i)}_{,\zeta}) \ \text{con } \eta^{(i)}|_{h^{(i)}_\pm} = 0\,. \tag{33}$$

Si supponga quindi di far valere solamente le seguenti ipotesi statiche, duali delle precedenti ipotesi cinematiche:

*i''*) la tensione normale in direzione trasversale $\sigma^{(i)}$ è nulla;

*ii''*) la tensione tangenziale in direzione trasversale $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$ è costante rispetto a $\zeta$ (la costante potendo dipendere dall'indice di lamina $(i)$);

*iii''*) lo spostamento elettrico in direzione trasversale $d^{(i)}$ è costante rispetto a $\zeta$ (la costante potendo dipendere dall'indice di lamina $(i)$).

Denotando con $\beta^{(i)}$, $\boldsymbol{\mu}^{(i)}$ e $\xi^{(i)}$ i corrispondenti moltiplicatori di Lagrange, si ottiene la lagrangiana:

$$L_l'' = W_l + \Lambda_l''\,, \tag{34}$$

ove

$$\Lambda_l'' = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega^{(i)}} (\beta^{(i)} \sigma^{(i)} + \boldsymbol{\mu}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(i)}_{,\zeta} + \xi^{(i)} d^{(i)}_{,\zeta})\, dv\,. \tag{35}$$

Le condizioni di stazionarietà di $L_l''$ rispetto a $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$, $\sigma^{(i)}$ e $d^{(i)}$ sono in parte differenti dalle corrispondenti condizioni di stazionarietà di $W_l$. In particolare, le $(23)_1$, (24) e (26) sono rispettivamente sostituite da:

$$\boldsymbol{s}^{(i)}_{,\zeta} + \nabla s^{(i)} - \boldsymbol{\gamma}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}^{(i)}_{,\zeta} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{(i)} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mu}^{(i)}|_{h^{(i)}_\pm} = \mathbf{0} \quad \text{su } \mathcal{M}, \tag{36}$$

$$s^{(i)}_{,\zeta} - \varepsilon^{(i)} + \beta^{(i)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(i)}, \tag{37}$$

$$\phi^{(i)}_{,\zeta} + e^{(i)} - \xi^{(i)}_{,\zeta} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(i)} \quad \text{e} \quad \xi^{(i)}|_{h^{(i)}_\pm} = 0 \quad \text{su } \mathcal{M}. \tag{38}$$

Dunque, valendo *i''* ), *ii''* ) e *iii''* ), la deformazione ed il campo elettrico sono sdoppiati: in particolare, dalle (22), (36) e (37), e dalle (12), (13) e (14) segue che la deformazione totale e la deformazione costitutiva risultano, rispettivamente:

$$(39) \qquad (\boldsymbol{E}^{(i)}; \boldsymbol{\gamma}^{(i)} + \boldsymbol{\mu}^{(i)}_{,\zeta}; \varepsilon^{(i)} - \beta^{(i)}) \text{ con } \boldsymbol{\mu}^{(i)}\,|_{b^{(i)}_{\pm}} = \mathbf{0} \qquad \text{ed} \qquad (\boldsymbol{E}^{(i)}; \boldsymbol{\gamma}^{(i)}; \varepsilon^{(i)}),$$

mentre dalle (25) e (38), e dalle (15) e (16) segue che il campo elettrico totale ed il campo elettrico costitutivo risultano, rispettivamente:

$$(40) \qquad (\boldsymbol{e}^{(i)}; e^{(i)} - \xi^{(i)}_{,\zeta}) \text{ con } \xi^{(i)}\,|_{b^{(i)}_{\pm}} = 0 \qquad \text{ed} \qquad (\boldsymbol{e}^{(i)}; e^{(i)}).$$

Si supponga ora di far valere *contemporaneamente* sia le ipotesi cinematiche *i'* )-*iii'* ) che le ipotesi statiche *i''* )-*iii''* ). In tale situazione gli enunciati stessi delle precedenti ipotesi devono essere precisati: invero, essendo deformazione, tensione, campo elettrico e spostamento elettrico sdoppiati in un campo totale ed in un campo costitutivo, occorre specificare quale di essi si intenda assoggettare al vincolo.

Le ipotesi *i'* ) e *ii'* ) sono classicamente utilizzate per rappresentare il campo di spostamento [26-28], mentre l'ipotesi *i''* ) ha l'ufficio di modificare il legame costitutivo [43]. Dunque *i'* ) e *ii'* ) riguardano la deformazione totale, mentre *i''* ) interessa la tensione costitutiva. L'ipotesi *iii'* ) è utilizzata per rappresentare il potenziale elettrico [13]: dunque si tratta di un'ipotesi sul campo elettrico totale. Le ipotesi *ii''* ) e *iii''* ), duali delle *ii'* ) e *iii'* ), sono introdotte in questo lavoro e sono rispettivamente riguardate come vincoli sulla tensione e sullo spostamento elettrico costitutivi.

In formule, il presente modello di laminato piezoelettrico è governato dalle equazioni di equilibrio (19)-(21), dalle equazioni di congruenza (22), $(23)_2$, (25), (36)-(38), dalle equazioni costitutive (12), (15), (29)-(31), dalle equazioni di continuità in corrispondenza delle superfici interlaminari (17), e si basa sulle seguenti ipotesi, riguardate come equazioni di vincolo:

*i*) l'elongazione *totale* e la tensione normale *costitutiva* in direzione trasversale sono nulle:

$$(41) \qquad \varepsilon^{(i)} - \beta^{(i)} = 0\,,$$

$$(42) \qquad \sigma^{(i)} - \alpha^{(i)} = 0\,;$$

*ii*) lo scorrimento *totale* e la tensione tangenziale *costitutiva* in direzione trasversale sono costanti rispetto a $\zeta$ (le costanti potendo dipendere dall'indice di lamina $(i)$):

$$(43) \qquad \begin{cases} (\boldsymbol{\gamma}^{(i)} + \boldsymbol{\mu}^{(i)}_{,\zeta})_{,\zeta} = \mathbf{0}\,, \\ \boldsymbol{\mu}^{(i)}\,|_{b^{(i)}_{\pm}} = \mathbf{0}\,, \end{cases}$$

$$(44) \qquad \begin{cases} (\boldsymbol{\tau}^{(i)} + \boldsymbol{\lambda}^{(i)}_{,\zeta})_{,\zeta} = \mathbf{0}\,, \\ \boldsymbol{\lambda}^{(i)}\,|_{b^{(i)}_{\pm}} = \mathbf{0}\,; \end{cases}$$

*iii*) il campo elettrico *totale* e lo spostamento elettrico *costitutivo* in direzione trasversale sono costanti rispetto a $\zeta$ (le costanti potendo dipendere dall'indice di lamina $(i)$):

$$(45)\qquad \begin{cases} (e^{(i)} - \xi^{(i)}_{,\zeta})_{,\zeta} = 0\,, \\ \xi^{(i)}\,|_{h^{(i)}_{\pm}} = 0\,, \end{cases}$$

$$(46)\qquad \begin{cases} (d^{(i)} - \eta^{(i)}_{,\zeta})_{,\zeta} = 0\,, \\ \eta^{(i)}\,|_{h^{(i)}_{\pm}} = 0\,. \end{cases}$$

La questione della compatibilità dei vincoli (41)-(46) è affrontata più oltre.

È facile provare [41] che il problema posto ammette una formulazione variazionale, basata sul funzionale:

$$(47)\qquad L_l = W_l + \Lambda'_l + \Lambda''_l + \Lambda_l$$

ove

$$(48)\qquad \Lambda_l = -\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega^{(i)}} (\alpha^{(i)}\beta^{(i)} + \boldsymbol{\lambda}^{(i)}_{,\zeta}\cdot\boldsymbol{\mu}^{(i)}_{,\zeta} - \eta^{(i)}_{,\zeta}\cdot\xi^{(i)}_{,\zeta})\,dv +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathfrak{M}} [\boldsymbol{\lambda}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\mu}^{(i)}_{,\zeta} + \boldsymbol{\lambda}^{(i)}_{,\zeta}\cdot\boldsymbol{\mu}^{(i)} - \eta^{(i)}\xi^{(i)}_{,\zeta} - \eta^{(i)}_{,\zeta}\xi^{(i)}]^{h^{(i)}_{+}}_{h^{(i)}_{-}}\,da$$

e $[\cdot]^{\zeta_2}_{\zeta_1}$ rappresenta la differenza fra i valori della quantità $[\cdot]$ per $\zeta = \zeta_2$ e $\zeta = \zeta_1$. Invero, le condizioni di stazionarietà del funzionale $L_l$ forniscono le predette equazioni di equilibrio, di congruenza, costitutive, di continuità e di vincolo che governano il problema dell'equilibrio elettroelastico del laminato *riguardato come corpo tridimensionale, vincolato* come prescritto dalle ipotesi *i*)-*iii*).

Si noti che $L_l$ non coincide con il funzionale $\overline{L}_l = W_l + \Lambda'_l + \Lambda''_l$, che intuitivamente sarebbe stato costruito in applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ove non fosse stato tenuto in conto il fatto che i vincoli da imporre agiscono su spazi duali (deformazione e tensione, campo elettrico e spostamento elettrico). In effetti, il funzionale $\overline{L}_l$ è la lagrangiana di un problema con differenti vincoli (agenti su deformazione e campo elettrico costitutivi, e su tensione e spostamento elettrico totali) [36-38].

La dipendenza dalla variabile $\zeta$ delle funzioni incognite può essere resa esplicita: in altri termini, è possibile rappresentare lo spostamento, il potenziale elettrico, la deformazione, il campo elettrico, la tensione e lo spostamento elettrico, sia totali che costitutivi, utilizzando funzioni che dipendono da $x_1$ e $x_2$ solamente. Così operando, si ottiene un modello di laminato piezoelettrico, *riguardato come corpo bidimensionale*, equivalente al modello tridimensionale vincolato.

Sono determinate dapprima le rappresentazioni dello spostamento $(\mathbf{s}^{(i)}, s^{(i)})$ e del potenziale elettrico $\phi^{(i)}$. Le (37) e (41) implicano:

$$(49)\qquad s^{(i)}(x_1, x_2, \zeta) = w^{(i)}(x_1, x_2)\,,$$

essendo $w^{(i)}$ una funzione scalare incognita; le $(36)_1$, $(43)_1$ e (49) implicano:

$$s^{(i)}(x_1, x_2, \zeta) = \boldsymbol{u}^{(i)}(x_1, x_2) + (\zeta - h_m^{(i)})\,\boldsymbol{\varphi}^{(i)}(x_1, x_2), \tag{50}$$

essendo $\boldsymbol{u}^{(i)}$ e $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$ due funzioni incognite a valori in $\mathcal{V}$; infine, le $(38)_1$ e $(45)_1$ implicano:

$$\phi^{(i)}(x_1, x_2, \zeta) = \pi^{(i)}(x_1, x_2) + (\zeta - h_m^{(i)})\,\chi^{(i)}(x_1, x_2), \tag{51}$$

essendo $\pi^{(i)}$ e $\chi^{(i)}$ due funzioni scalari incognite. In particolare, dalle (37), $(36)_1$ e $(38)_1$ si ritrova rispettivamente che l'elongazione totale in direzione trasversale $\varepsilon^{(i)} - \beta^{(i)}$ è nulla; lo scorrimento totale in direzione trasversale è costante rispetto a $\zeta$:

$$\boldsymbol{\gamma}^{(i)} + \boldsymbol{\mu}^{(i)}_{,\zeta} = \boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)}; \tag{52}$$

il campo elettrico totale in direzione trasversale è costante rispetto a $\zeta$:

$$e^{(i)} - \xi^{(i)}_{,\zeta} = -\chi^{(i)}. \tag{53}$$

La deformazione nel piano del laminato $\boldsymbol{E}^{(i)}$ ed il campo elettrico nel piano del laminato $\boldsymbol{e}^{(i)}$, sia totali che costitutivi, si ricavano dalle $(22)_1$ e $(25)_1$, utilizzando le (50) e (51):

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = \tilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)} + (\zeta - h_m^{(i)})\,\tilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{(i)} \quad \text{ed} \quad \boldsymbol{e}^{(i)} = -\nabla\pi^{(i)} - (\zeta - h_m^{(i)})\,\nabla\chi^{(i)}. \tag{54}$$

Allo scopo di calcolare l'elongazione costitutiva in direzione trasversale $\varepsilon^{(i)}$ ed il campo elettrico costitutivo in direzione trasversale $e^{(i)}$, si nota che dalle (30) e $(31)_1$, utilizzando le (42), $(46)_1$ e $(54)_1$, segue:

$$\begin{cases} \kappa^{(i)}\varepsilon^{(i)} - h^{(i)}e^{(i)} = -\boldsymbol{A}^{(i)}\cdot[\tilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)} + (\zeta - h_m^{(i)})\,\tilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}]; \\ h^{(i)}\varepsilon^{(i)} + l^{(i)}e^{(i)} = -\boldsymbol{B}^{(i)}\cdot[\tilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)} + (\zeta - h_m^{(i)})\,\tilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}] + f^{(i)}(x_1, x_2), \end{cases} \tag{55}$$

essendo $f^{(i)}$ una funzione scalare incognita. Essa coincide con lo spostamento elettrico costitutivo in direzione trasversale $d^{(i)} - \eta^{(i)}_{,\zeta}$ e si ricava osservando che le (38) implicano:

$$\int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} (e^{(i)} + \phi^{(i)}_{,\zeta})\,d\zeta = 0. \tag{56}$$

Sostituendo infatti nella (56) $e^{(i)}$ ottenuto dalle (55) e $\phi^{(i)}$ riportato nella (51), con semplici passaggi si ottiene:

$$f^{(i)} = d^{(i)} - \eta^{(i)}_{,\zeta} = -\bar{l}^{(i)}\chi^{(i)} + \overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}\cdot\tilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)}, \tag{57}$$

ove

$$\bar{l}^{(i)} = l^{(i)} + h^{(i)2}/\kappa^{(i)} \quad \text{e} \quad \overline{\boldsymbol{B}}^{(i)} = \boldsymbol{B}^{(i)} - h^{(i)}\boldsymbol{A}^{(i)}/\kappa^{(i)}. \tag{58}$$

Quindi, dalle (55):

$$\begin{cases} \varepsilon^{(i)} = -[h^{(i)}\chi^{(i)} + \boldsymbol{A}^{(i)}\cdot\tilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)} + (\zeta - h_m^{(i)})(l^{(i)}\boldsymbol{A}^{(i)} + h^{(i)}\boldsymbol{B}^{(i)})\cdot\tilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}/\bar{l}^{(i)}]/\kappa^{(i)}, \\ e^{(i)} = -[\chi^{(i)} + (\zeta - h_m^{(i)})\,\overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}\cdot\tilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}/\bar{l}^{(i)}]. \end{cases} \tag{59}$$

Incidentalmente, si nota che $\kappa^{(i)} > 0$ e $\bar{l}^{(i)} > 0$, in virtù dell'ipotesi (7).

Lo scorrimento costitutivo in direzione trasversale $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ si determina osservando che le $(29)_1$ e $(44)_1$ implicano:

$$G^{(i)}[\boldsymbol{\gamma}^{(i)}] - {}^t\boldsymbol{L}^{(i)}[\boldsymbol{e}^{(i)}] = \boldsymbol{v}^{(i)}(x_1, x_2), \tag{60}$$

ove $\boldsymbol{v}^{(i)}$ è una funzione incognita a valori in $\mathcal{V}$, che coincide con la tensione tangenziale costitutiva in direzione trasversale $\boldsymbol{\tau}^{(i)} + \boldsymbol{\lambda}^{(i)}_{,\zeta}$. D'altro canto, le (36) implicano:

$$\int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} (\boldsymbol{s}^{(i)}_{,\zeta} + \nabla s^{(i)} - \boldsymbol{\gamma}^{(i)})\, d\zeta = \boldsymbol{0}. \tag{61}$$

Da questa, utilizzando le (49), (50), $(54)_2$ e (60), segue:

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = \boldsymbol{\tau}^{(i)} + \boldsymbol{\lambda}^{(i)}_{,\zeta} = \boldsymbol{G}^{(i)}[\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)}] + {}^t\boldsymbol{L}^{(i)}[\nabla \pi^{(i)}] \tag{62}$$

e quindi, dalle (60) e $(54)_2$:

$$\boldsymbol{\gamma}^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)} - (\zeta - h_m^{(i)})(\boldsymbol{G}^{(i)})^{-1}\,{}^t\boldsymbol{L}^{(i)}[\nabla \chi^{(i)}]. \tag{63}$$

In particolare, l'invertibilità di $\boldsymbol{G}^{(i)}$ è conseguenza dell'ipotesi (7).

La tensione nel piano del laminato $\boldsymbol{T}^{(i)}$ e lo spostamento elettrico nel piano del laminato $\boldsymbol{d}^{(i)}$, sia totali che costitutivi, si ottengono dalle (12) e (15), utilizzando le (54), (59) e (63):

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}^{(i)} = \overline{\mathcal{C}}^{(i)}[\widetilde{\nabla}\, \boldsymbol{u}^{(i)}] + \overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}\chi^{(i)} + (\zeta - h_m^{(i)})\,\widehat{\mathcal{C}}^{(i)}[\widetilde{\nabla}\, \boldsymbol{\varphi}^{(i)}], \\ \boldsymbol{d}^{(i)} = \boldsymbol{L}^{(i)}[\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)}] - \boldsymbol{M}^{(i)}[\nabla \pi^{(i)}] - (\zeta - h_m^{(i)})\, \overline{\boldsymbol{M}}^{(i)}[\nabla \chi^{(i)}], \end{cases} \tag{64}$$

ove

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{C}}^{(i)} = \mathcal{C}^{(i)} - \boldsymbol{A}^{(i)} \otimes \boldsymbol{A}^{(i)} / \kappa^{(i)}, \qquad \widehat{\mathcal{C}}^{(i)} = \overline{\mathcal{C}}^{(i)} + \overline{\boldsymbol{B}}^{(i)} \otimes \overline{\boldsymbol{B}}^{(i)} / \bar{l}^{(i)}, \\ \overline{\boldsymbol{M}}^{(i)} = \boldsymbol{M}^{(i)} + \boldsymbol{L}^{(i)}(\boldsymbol{G}^{(i)})^{-1}\,{}^t\boldsymbol{L}^{(i)}. \end{cases} \tag{65}$$

La tensione normale costitutiva in direzione trasversale $\sigma^{(i)} - \alpha^{(i)}$ è nulla, giusta la (42). Infine, la tensione tangenziale totale in direzione trasversale $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$, la tensione normale totale in direzione trasversale $\sigma^{(i)}$ e lo spostamento elettrico totale in direzione trasversale $d^{(i)}$ si determinano dalle $(19)_{1,2}$, $(20)_{1,2}$ e $(21)_{1,2}$, utilizzando le (64):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}^{(i)} = \boldsymbol{t}^{(i)} + \displaystyle\int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} \boldsymbol{b}^{(i)}\, d\zeta + \int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} \operatorname{div} \boldsymbol{T}^{(i)}\, d\zeta, \\ \sigma^{(i)} = t^{(i)} + \displaystyle\int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} b^{(i)}\, d\zeta + \int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{(i)}\, d\zeta, \\ d^{(i)} = g^{(i)} - \displaystyle\int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} \varrho^{(i)}\, d\zeta + \int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} \operatorname{div} \boldsymbol{d}^{(i)}\, d\zeta. \end{cases} \tag{66}$$

I moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{t}^{(i)}$, $t^{(i)}$ e $g^{(i)}$ hanno rispettivamente il significato di tensione tangenziale, tensione normale e spostamento elettrico totali all'interfaccia fra la lamina $i$ e la lamina $i + 1$. Si ricavano dalle (66) e dalle $(19)_3$, $(20)_3$ e $(21)_3$, utilizzando le (64),

(62) e $(29)_2$:

$$
(67)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{t}^{(i)} = \boldsymbol{t}^{(i-1)} - \boldsymbol{r}^{(i)} - 2\delta^{(i)} \operatorname{div}(\overline{\mathcal{C}}^{(i)}[\widetilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)}] + \overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}\chi^{(i)}), \\ t^{(i)} = t^{(i-1)} - r^{(i)} - 2\delta^{(i)} \operatorname{div}(\boldsymbol{G}^{(i)}[\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)}] + {}^{t}\boldsymbol{L}^{(i)}[\nabla \pi^{(i)}]), \\ g^{(i)} = g^{(i-1)} + \psi^{(i)} - 2\delta^{(i)} \operatorname{div}(\boldsymbol{L}^{(i)}[\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)}] - \boldsymbol{M}^{(i)}[\nabla \pi^{(i)}]), \end{cases}
$$

ricordando che $\boldsymbol{t}^{(0)} = -\boldsymbol{p}^{-}$, $t^{(0)} = -p^{-}$, e $g^{(0)} = \omega^{-}$ e avendo posto:

$$
(68)\qquad \boldsymbol{r}^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} \boldsymbol{b}^{(i)}\, d\zeta, \quad r^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} b^{(i)}\, d\zeta \quad \text{e} \quad \psi^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} \varrho^{(i)}\, d\zeta .
$$

Si rileva esplicitamente che $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$, $\sigma^{(i)}$ e $d^{(i)}$ risultano continue nello spessore del laminato, ed in particolare in corrispondenza delle superfici interlaminari.

Dalle (41), (42), (62), (52), (57) e (53), utilizzando le $(29)_2$, $(36)_2$, $(31)_2$ e $(38)_2$, si ricava rispettivamente:

$$
(69)\qquad \begin{cases} \alpha^{(i)} = \sigma^{(i)}, & \beta^{(i)} = \varepsilon^{(i)}, \\ \boldsymbol{\lambda}^{(i)} = \displaystyle\int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} (\boldsymbol{\tau}^{(i)} - \boldsymbol{v}^{(i)})\, d\zeta, & \boldsymbol{\mu}^{(i)} = \displaystyle\int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} (\boldsymbol{\gamma}^{(i)} - \boldsymbol{\varphi}^{(i)} - \nabla w^{(i)})\, d\zeta, \\ \eta^{(i)} = \displaystyle\int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} (f^{(i)} - d^{(i)})\, d\zeta, & \xi^{(i)} = \displaystyle\int_{\zeta}^{h_+^{(i)}} (-e^{(i)} - \chi^{(i)})\, d\zeta . \end{cases}
$$

Restano da determinare le funzioni incognite $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$, $w^{(i)}$, $\pi^{(i)}$ e $\chi^{(i)}$, definite su $\mathcal{M}$. Le equazioni di campo per tali funzioni possono essere ottenute per integrazione nello spessore di ciascuna lamina delle equazioni di equilibrio $(19)_1$, $(20)_1$ e $(21)_1$, ovvero, in alternativa, per via variazionale. Tale secondo approccio appare preferibile, essendo in grado di fornire automaticamente anche le condizioni al contorno compatibili con le equazioni di campo [44]. Al fine di ottenere un funzionale del tipo energia potenziale totale, dipendente solamente dalle funzioni incognite $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$, $w^{(i)}$, $\pi^{(i)}$ e $\chi^{(i)}$ e dalle azioni interlaminari $\boldsymbol{t}^{(i)}$, $t^{(i)}$ e $g^{(i)}$, basta trasformare il funzionale lagrangiano $L_l$ rendendo soddisfatte a priori le sue condizioni di stazionarietà rispetto a $\boldsymbol{T}^{(i)}$, $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$, $\sigma^{(i)}$, $\boldsymbol{d}^{(i)}$, $d^{(i)}$, $\boldsymbol{E}^{(i)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$, $\varepsilon^{(i)}$, $\boldsymbol{e}^{(i)}$, $e^{(i)}$, $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$, $\boldsymbol{\mu}^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ e $\xi^{(i)}$. In altri termini, basta sostituire le rappresentazioni (49)-(51), (54), (59) e (63) in $L_l$ ed utilizzare le (41)-(46). Eseguendo l'integrazione rispetto alla variabile $\zeta$, si ottiene il funzionale:

$$
(70)\qquad \Psi_l = \mathcal{E}_l^m + \mathcal{E}_l^e + \mathcal{E}_l^{em} + \mathcal{U}_l^m + \mathcal{U}_l^e ,
$$

ove

$$
(71)\qquad \mathcal{E}_l^m = \sum_{i=1}^{N} \delta^{(i)} \int_{\mathcal{M}} \overline{\mathcal{C}}^{(i)}[\widetilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)}]\cdot\widetilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)}\, da + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta^{(i)3}}{3} \int_{\mathcal{M}} \widehat{\mathcal{C}}^{(i)}[\widetilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}]\cdot\widetilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\, da + \\ + \sum_{i=1}^{N} \delta^{(i)} \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{G}^{(i)}[\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)}]\cdot(\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)})\, da ,
$$

$$\mathcal{E}_l^e = -\sum_{i=1}^{N} \delta^{(i)} \int_{\mathcal{M}} \bar{l}^{(i)} \chi^{(i)2}\, da - \sum_{i=1}^{N} \delta^{(i)} \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{M}^{(i)}[\nabla \pi^{(i)}] \cdot \nabla \pi^{(i)}\, da + \\ - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta^{(i)3}}{3} \int_{\mathcal{M}} \overline{\boldsymbol{M}}^{(i)}[\nabla \chi^{(i)}] \cdot \nabla \chi^{(i)}\, da\,, \tag{72}$$

$$\mathcal{E}_l^{em} = \sum_{i=1}^{N} 2\delta^{(i)} \int_{\mathcal{M}} \chi^{(i)} \overline{\boldsymbol{B}}^{(i)} \cdot \widetilde{\nabla}\, \boldsymbol{u}^{(i)}\, da + \sum_{i=1}^{N} 2\delta^{(i)} \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{L}^{(i)}[\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)}] \cdot \nabla \pi^{(i)}\, da\,, \tag{73}$$

$$\mathcal{U}_l^m = -\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{M}} (\boldsymbol{r}^{(i)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} + \boldsymbol{m}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(i)} + r^{(i)} w^{(i)})\, da + \\ - \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial_f \mathcal{M}} (\widehat{\boldsymbol{r}}^{(i)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} + \widehat{\boldsymbol{m}}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \widehat{r}^{(i)} w^{(i)})\, dl + \\ - \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{M}} [(\boldsymbol{t}^{(i)} - \boldsymbol{t}^{(i-1)}) \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} + \delta^{(i)} (\boldsymbol{t}^{(i)} + \boldsymbol{t}^{(i-1)}) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(i)} + (t^{(i)} - t^{(i-1)}) w^{(i)}]\, da\,, \tag{74}$$

$$\mathcal{U}_l^e = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{M}} (\psi^{(i)} \pi^{(i)} + \theta^{(i)} \chi^{(i)})\, da + \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial_\omega \mathcal{M}} (\widehat{\psi}^{(i)} \pi^{(i)} + \widehat{\theta}^{(i)} \chi^{(i)})\, dl + \\ - \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{M}} [(g^{(i)} - g^{(i-1)}) \pi^{(i)} + \delta^{(i)} (g^{(i)} + g^{(i-1)}) \chi^{(i)}]\, da\,. \tag{75}$$

Nell'espressione di $\mathcal{U}_l^m$ intervengono le quantità:

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{r}}^{(i)} = \displaystyle\int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} \boldsymbol{p}^{(i)}\, d\zeta\,, & \widehat{r}^{(i)} = \displaystyle\int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} p^{(i)}\, d\zeta\,, \\ \boldsymbol{m}^{(i)} = \displaystyle\int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} (\zeta - h_m^{(i)})\, \boldsymbol{b}^{(i)}\, d\zeta\,, & \widehat{\boldsymbol{m}}^{(i)} = \displaystyle\int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} (\zeta - h_m^{(i)})\, \boldsymbol{p}^{(i)}\, d\zeta\,; \end{cases} \tag{76}$$

nell'espressione di $\mathcal{U}_l^e$ intervengono le quantità:

$$\widehat{\psi}^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} \omega^{(i)}\, d\zeta\,, \quad \theta^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} (\zeta - h_m^{(i)})\, \varrho^{(i)}\, d\zeta\,, \quad \widehat{\theta}^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} (\zeta - h_m^{(i)})\, \omega^{(i)}\, d\zeta\,. \tag{77}$$

Il funzionale $\Psi_l$ è soggetto alle condizioni al contorno essenziali, su $\partial_s \mathcal{M}$:

$$w^{(i)} = s_0^{(i)}\,, \qquad \boldsymbol{u}^{(i)} + (\zeta - h_m^{(i)})\, \boldsymbol{\varphi}^{(i)} = \boldsymbol{s}_0^{(i)}\,, \qquad \text{per } \zeta \in ]h_-^{(i)}, h_+^{(i)}[ \tag{78}$$

e su $\partial_\phi \mathcal{M}$:

$$\pi^{(i)} + (\zeta - h_m^{(i)})\, \chi^{(i)} = \phi_0^{(i)}\,, \qquad \text{per } \zeta \in ]h_-^{(i)}, h_+^{(i)}[\,. \tag{79}$$

Le condizioni di stazionarietà di $\Psi_l$ rispetto a $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$, $w^{(i)}$, $\pi^{(i)}$ e $\chi^{(i)}$ forniscono le equazioni di campo:

$$(80)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}\boldsymbol{N}^{(i)} - \boldsymbol{r}^{(i)} - \boldsymbol{t}^{(i)} + \boldsymbol{t}^{(i-1)} = \boldsymbol{0}\,, \\ -\operatorname{div}\boldsymbol{F}^{(i)} + \boldsymbol{v}^{(i)} - \boldsymbol{m}^{(i)} - \delta^{(i)}(\boldsymbol{t}^{(i)} + \boldsymbol{t}^{(i-1)}) = \boldsymbol{0}\,, \\ -\operatorname{div}\boldsymbol{v}^{(i)} - r^{(i)} - t^{(i)} + t^{(i-1)} = 0\,, \\ -\operatorname{div}\boldsymbol{q}^{(i)} + \psi^{(i)} - g^{(i)} + g^{(i-1)} = 0\,, \\ -\operatorname{div}\boldsymbol{h}^{(i)} + q^{(i)} + \theta^{(i)} - \delta^{(i)}(g^{(i)} + g^{(i-1)}) = 0\,, \end{cases}$$

e le condizioni al contorno naturali, su $\partial_f \mathfrak{M}$:

$$(81)\qquad \boldsymbol{N}^{(i)}[\boldsymbol{n}] - \widehat{\boldsymbol{r}}^{(i)} = \boldsymbol{0}\,, \qquad \boldsymbol{F}^{(i)}[\boldsymbol{n}] - \widehat{\boldsymbol{m}}^{(i)} = \boldsymbol{0} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v}^{(i)}\cdot\boldsymbol{n} - \widehat{r}^{(i)} = 0$$

e su $\partial_\omega \mathfrak{M}$:

$$(82)\qquad \boldsymbol{q}^{(i)}\cdot\boldsymbol{n} + \widehat{\psi}^{(i)} = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{h}^{(i)}\cdot\boldsymbol{n} + \widehat{\theta}^{(i)} = 0\,,$$

essendo state introdotte le seguenti caratteristiche della sollecitazione:

Sforzo normale: $$\boldsymbol{N}^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} \boldsymbol{T}^{(i)}\, d\zeta = 2\delta^{(i)}(\overline{\mathcal{C}}^{(i)}[\widetilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)}] + \overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}\chi^{(i)})\,;$$

Momento flettente: $$\boldsymbol{F}^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} (\zeta - h_m^{(i)})\boldsymbol{T}^{(i)}\, d\zeta = 2\delta^{(i)^3}\,\overline{\mathcal{C}}^{(i)}[\widetilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}]/3\,;$$

Taglio: $$\boldsymbol{v}^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} \boldsymbol{\tau}^{(i)}\, d\zeta = 2\delta^{(i)}(\boldsymbol{G}^{(i)}[\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)}] + {}^t\boldsymbol{L}^{(i)}[\nabla\pi^{(i)}])\,;$$

Flusso elettrico nel piano: $$\boldsymbol{q}^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} \boldsymbol{d}^{(i)}\, d\zeta = 2\delta^{(i)}(-\boldsymbol{M}^{(i)}[\nabla\pi^{(i)}] + \boldsymbol{L}^{(i)}[\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \nabla w^{(i)}])\,;$$

Flusso di dipolo elettrico: $$\boldsymbol{h}^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} (\zeta - h_m^{(i)})\boldsymbol{d}^{(i)}\, d\zeta = -2\delta^{(i)^3}\overline{\boldsymbol{M}}^{(i)}[\nabla\chi^{(i)}]/3\,;$$

Flusso elettrico trasversale: $$q^{(i)} = \int_{h_-^{(i)}}^{h_+^{(i)}} d^{(i)}\, d\zeta = 2\delta^{(i)}(-\bar{l}^{(i)}\chi^{(i)} + \overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}\cdot\widetilde{\nabla}\boldsymbol{u}^{(i)})\,.$$

Le condizioni di stazionarietà di $\Psi_l$ rispetto a $\boldsymbol{t}^{(i)}$, $t^{(i)}$ e $g^{(i)}$ forniscono le equazioni di continuità in corrispondenza delle superfici interlaminari, dello spostamento:

$$(83)\qquad w^{(i+1)} = w^{(i)}\,, \qquad \boldsymbol{u}^{(i+1)} - \delta^{(i+1)}\boldsymbol{\varphi}^{(i+1)} = \boldsymbol{u}^{(i)} + \delta^{(i)}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,,$$

e del potenziale elettrico:

$$(84)\qquad \pi^{(i+1)} - \delta^{(i+1)}\chi^{(i+1)} = \pi^{(i)} + \delta^{(i)}\chi^{(i)}\,.$$

Le equazioni di campo (80) e (83)-(84), insieme con le condizioni al bordo (78)-(79) e (81)-(82), definiscono il problema dell'equilibrio elettroelastico del laminato piezoelettrico *riguardato come corpo bidimensionale*.

Dal punto di vista astratto, si tratta di un problema classico [39, 45]: di seguito si riporta qualche considerazione in merito alla questione dell'esistenza e dell'unicità di una sua soluzione debole. Sia $H^m$ la varietà affine costituita dalle funzioni $(\boldsymbol{u}^{(i)}, \boldsymbol{\varphi}^{(i)}, w^{(i)})$, $i = 1 \dots N$, appartenenti, per componenti, allo spazio di Sobolev $H^1(\mathcal{M})$, e tali che siano soddisfatte le (78) e (83); analogamente, sia $H^e$ la varietà affine costituita dalle funzioni $(\pi^{(i)}, \chi^{(i)})$, $i = 1 \dots N$, appartenenti allo spazio di Sobolev $H^1(\mathcal{M})$, e tali che siano soddisfatte le (79) e (84). Si definisce soluzione debole del problema in esame un punto di stazionarietà di $\Psi_l$ in $H^m \times H^e$. Affinché tale insieme risulti non vuoto, è necessario che i dati $s_0^{(i)}$, $\boldsymbol{s}_0^{(i)}$ e $\phi_0^{(i)}$ soddisfino delle ovvie condizioni di compatibilità, del tutto usuali nelle teorie di piastra. In particolare, le $s_0^{(i)}$ devono raccordarsi in modo da costituire una funzione costante in $]-\delta, \delta[$, mentre le $\boldsymbol{s}_0^{(i)}$ e $\phi_0^{(i)}$ devono essere lineari in ogni lamina e raccordarsi in modo da costituire una funzione continua in $]-\delta, \delta[$. L'insieme $H^m \times H^e$ è una varietà affine chiusa in $H^1(\mathcal{M})^{7N}$, essendo di codimensione finita. I dati $\boldsymbol{b}^{(i)}, b^{(i)}, \varrho^{(i)}, \boldsymbol{p}^{(i)}, p^{(i)}, \omega^{(i)}, \boldsymbol{p}^{\pm}, p^{\pm}$ e $\omega^{\pm}$ si suppongono sufficientemente regolari, in modo da garantire la continuità dei funzionali lineari $\mathcal{U}_l^m$ e $\mathcal{U}_l^e$. In virtù dell'ipotesi (7) si tratta di risolvere il seguente problema di min-max:

$$\overline{\Psi}_l = \inf_{(\boldsymbol{u}^{(i)}, \boldsymbol{\varphi}^{(i)}, w^{(i)}) \in H^m} \; \sup_{(\pi^{(i)}, \chi^{(i)}) \in H^e} \left(\mathcal{E}_l^m + \mathcal{E}_l^e + \mathcal{E}_l^{em} + \mathcal{U}_l^m + \mathcal{U}_l^e\right). \tag{85}$$

Sotto opportune ipotesi di regolarità su $\mathcal{M}$, è noto [39] che, se $\partial_s \mathcal{M}$ è non vuoto, $\mathcal{E}_l^m$ è coercitivo sullo spazio vettoriale parallelo ad $H^m$, mentre, se $\partial_\phi \mathcal{M}$ è non vuoto, $-\mathcal{E}_l^e$ è coercitivo sullo spazio vettoriale parallelo ad $H^e$. In tali ipotesi, il funzionale $\Psi_l$ ammette un unico punto di stazionarietà in $H^m \times H^e$ [45]. Se, viceversa, $\partial_s \mathcal{M}$ è vuoto, un punto di stazionarietà di $\Psi_l$ esiste se e solo se $\mathcal{U}_l^m$ è identicamente nullo sopra il nucleo di $\mathcal{E}_l^m$, cioè se e solo se sono soddisfatte le seguenti equazioni di equilibrio meccanico:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{M}} r^{(i)}\, da + \sum_{i=1}^N \int_{\partial\mathcal{M}} \hat{r}^{(i)}\, dl + \int_{\mathcal{M}} (p^- + p^+)\, da = 0\,,\\
&\sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{r}^{(i)}\, da + \sum_{i=1}^N \int_{\partial\mathcal{M}} \hat{\boldsymbol{r}}^{(i)}\, dl + \int_{\mathcal{M}} (\boldsymbol{p}^- + \boldsymbol{p}^+)\, da = \mathbf{0}\,,\\
&\sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{r}^{(i)} \cdot \boldsymbol{W}[\boldsymbol{x}]\, da + \sum_{i=1}^N \int_{\partial\mathcal{M}} \hat{\boldsymbol{r}}^{(i)} \cdot \boldsymbol{W}[\boldsymbol{x}]\, dl + \int_{\mathcal{M}} (\boldsymbol{p}^- + \boldsymbol{p}^+) \cdot \boldsymbol{W}[\boldsymbol{x}]\, da = 0\,,\\
&\sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{M}} (h_m^{(i)} \boldsymbol{r}^{(i)} - \boldsymbol{x} r^{(i)} + \boldsymbol{m}^{(i)})\, da + \sum_{i=1}^N \int_{\partial\mathcal{M}} (h_m^{(i)} \hat{\boldsymbol{r}}^{(i)} - \boldsymbol{x} \hat{r}^{(i)} + \hat{\boldsymbol{m}}^{(i)})\, dl \,+\\
&\qquad + \int_{\mathcal{M}} [\delta(\boldsymbol{p}^+ - \boldsymbol{p}^-) - (p^- + p^+)\boldsymbol{x}]\, da = \mathbf{0}\,,
\end{aligned}\right. \tag{86}$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ è il vettore posizione del generico punto di $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{x}] = (-x_2, x_1)$. Il punto di stazionarietà è in tal caso determinato a meno di elementi del nucleo di $\mathcal{E}_l^m$, cioè a meno di moti rigidi. Analogamente, se $\partial_\phi \mathcal{M}$ è vuoto, un punto di stazionarietà di $\Psi_l$ esiste se e solo se $\mathcal{U}_l^e$ è identicamente nullo sopra il nucleo di $\mathcal{E}_l^e$, cioè se e solo se è soddisfatta la seguente equazione di equilibrio elettrico:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{M}} \psi^{(i)}\, da + \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\mathcal{M}} \widehat{\psi}^{(i)}\, dl + \int_{\mathcal{M}} (\omega^- + \omega^+)\, da = 0 . \tag{87}$$

In altri termini, la carica elettrica libera sul laminato deve in tal caso avere risultante nulla, in conseguenza dell'ipotesi che lo spostamento elettrico si annulli al di fuori del laminato. Naturalmente, il punto di stazionarietà è determinato a meno di elementi del nucleo di $\mathcal{E}^e_l$, cioè a meno di un valore costante del potenziale elettrico.

Una soluzione $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$, $w^{(i)}$, $\pi^{(i)}$, $\chi^{(i)}$ del problema del laminato riguardato come corpo bidimensionale permette di determinare le funzioni $\boldsymbol{s}^{(i)}$, $s^{(i)}$, $\phi^{(i)}$, $\boldsymbol{E}^{(i)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$, $\varepsilon^{(i)}$, $\boldsymbol{e}^{(i)}$, $e^{(i)}$, $\boldsymbol{T}^{(i)}$, $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$, $\sigma^{(i)}$, $\boldsymbol{d}^{(i)}$, $d^{(i)}$, $\boldsymbol{t}^{(i)}$, $t^{(i)}$, $g^{(i)}$, $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$, $\boldsymbol{\mu}^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ e $\xi^{(i)}$, tramite le (49)-(51), (54), (59), (63), (64), (66), (67) e (69). È immediato verificare che tali funzioni soddisfano (in senso debole) il problema del laminato riguardato come corpo tridimensionale vincolato. In effetti, le equazioni di equilibrio al bordo $(19)_4$, $(20)_4$ e $(21)_4$ risultano soddisfatte solo in senso medio, giuste le (81)-(82), nelle quali i carichi $\boldsymbol{p}^{(i)}$, $p^{(i)}$ e $\omega^{(i)}$ intervengono soltanto attraverso i loro momenti $\widehat{\boldsymbol{r}}^{(i)}$, $\widehat{\boldsymbol{m}}^{(i)}$, $\widehat{r}^{(i)}$, $\widehat{\psi}^{(i)}$ e $\widehat{\theta}^{(i)}$. Pertanto le $(19)_4$, $(20)_4$ e $(21)_4$ impongono delle condizioni di compatibilità sui dati $\boldsymbol{p}^{(i)}$, $p^{(i)}$ e $\omega^{(i)}$.

Si osservi che tali ultime condizioni di compatibilità, così come le summenzionate condizioni di compatibilità su $\boldsymbol{s}_0^{(i)}$, $s_0^{(i)}$ e $\phi_0^{(i)}$ sono conseguenza delle sole ipotesi cinematiche introdotte, nel senso che esse sarebbero presenti anche se non fossero state poste, contemporaneamente, le ipotesi statiche. Viceversa, la contemporanea presenza di ipotesi cinematiche e statiche non ha determinato l'insorgere di ulteriori condizioni di compatibilità: le ipotesi statiche assunte in questo lavoro *non* risultano perciò in contraddizione con le ipotesi cinematiche.

Incidentalmente si osserva che, ove mai le ipotesi statiche non fossero state poste, sarebbe stato ottenuto un funzionale molto simile a $\Psi_l$, ma recante $\mathbb{C}^{(i)}$ in luogo di $\overline{\mathbb{C}}^{(i)}$ e $\widehat{\mathbb{C}}^{(i)}$, $\boldsymbol{B}^{(i)}$ in luogo di $\overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}$, $l^{(i)}$ in luogo di $\overline{l}^{(i)}$, $\boldsymbol{M}^{(i)}$ in luogo di $\overline{\boldsymbol{M}}^{(i)}$. È immediato verificare che un modello di laminato piezoelettrico basato sopra un siffatto funzionale avrebbe, tra l'altro, stimato in modo errato, anche per laminati sottili, l'inflessione prodotta da un carico trasversale: cioè, avrebbe fornito un valore inconsistente della rigidezza flessionale del laminato.

## 5. Applicazioni

In questo paragrafo sono presentate alcune applicazioni del suesposto modello di laminato piezoelettrico. È considerata una piastra piezoelettrica quadrata di lato $L$. Il riferimento cartesiano $(O, x_1, x_2, \zeta)$ è fissato in modo che la sezione media della piastra sia il quadrato $[0, L] \times [0, L] \times \{0\}$. Il versore dell'asse $x_h$ è $e_h$; le componenti cartesiane sono denotate con pedici: ad esempio, se $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{A} \in$ Sym e $\mathbb{C}$ è un tensore del secondo ordine su Sym, $v_h = \boldsymbol{v} \cdot e_h$, $A_{hk} = \boldsymbol{A}[e_k] \cdot e_h$ e $\mathbb{C}_{hklm} = \mathbb{C}[e_l \,\widetilde{\otimes}\, e_m] \cdot e_h \,\widetilde{\otimes}\, e_k$.

La piastra è soggetta a distribuzioni di carico simmetriche rispetto a ciascuna delle mediane del quadrato e variabili con legge sinusoidale di periodo $2L$. Il potenziale elettrico è posto a zero sul contorno laterale, ove sono impediti per tutto lo spessore gli spostamenti trasversali e quelli tangenziali, risultando invece liberi gli spostamenti normali al contorno medesimo. Tale condizione di vincolo corrisponde all'appoggio semplice, rigido nel proprio piano. La piastra è omogenea nel primo esempio, laminata nel secondo. I materiali costituenti hanno simmetria almeno ortotropa, con gli assi di ortotropia paralleli agli assi cartesiani. Come osservato nel paragrafo 1, di tale classe di problemi sono ben note le soluzioni, di riferimento, fornite dalla teoria della piezoelettricità di Voigt. D'altro canto, è molto agevole ottenere anche le soluzioni in forma chiusa in applicazione del presente modello: basta infatti osservare che tali soluzioni hanno la forma:

$$
(88)\qquad \begin{cases}
u_1^{(i)} = U_1^{(i)} \cos(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L), & u_2^{(i)} = U_2^{(i)} \sin(\pi x_1/L) \cos(\pi x_2/L), \\
\varphi_1^{(i)} = \Phi_1^{(i)} \cos(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L), & \varphi_2^{(i)} = \Phi_2^{(i)} \sin(\pi x_1/L) \cos(\pi x_2/L), \\
t_1^{(i)} = R_1^{(i)} \cos(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L), & t_2^{(i)} = R_2^{(i)} \sin(\pi x_1/L) \cos(\pi x_2/L), \\
w^{(i)} = W^{(i)} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L), & \\
\pi^{(i)} = \Pi^{(i)} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L), & \chi^{(i)} = X^{(i)} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L), \\
t^{(i)} = R^{(i)} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L), & g^{(i)} = G^{(i)} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L),
\end{cases}
$$

ove $\boldsymbol{U}^{(i)}$, $\boldsymbol{\Phi}^{(i)}$, $\boldsymbol{R}^{(i)}$ sono elementi di $\mathcal{V}$, e $W^{(i)}$, $\Pi^{(i)}$, $X^{(i)}$, $R^{(i)}$, $G^{(i)}$ sono scalari, soddisfacenti le condizioni di continuità dedotte da (83)-(84) e determinati dal sistema algebrico lineare ottenuto sostituendo le (88) nelle (80). Si osservi che le condizioni al bordo sul contorno laterale della piastra sono banalmente soddisfatte.

Il primo problema considerato riguarda una piastra omogenea di spessore $2\delta = L/4$, costituita della ceramica piezoelettrica PZT-5H, le cui costanti materiali [46] sono riportate in tab. I. Tale materiale è trasversalmente isotropo ed è disposto con l'asse di trasversa isotropia parallelo a $\zeta$. Il legame costitutivo piezoelettrico si specializza perciò come segue:

$$
(89)\qquad \begin{cases}
\mathcal{C} = (c_{11} - c_{12})\,\mathfrak{I} + c_{12}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}, & \boldsymbol{A} = c_{13}\boldsymbol{I}, & \boldsymbol{B} = e_{31}\boldsymbol{I}, \\
\kappa = c_{33} & h = e_{33}, & l = \varepsilon_{33}, \\
\boldsymbol{G} = c_{44}\boldsymbol{I}, & \boldsymbol{M} = \varepsilon_{11}\boldsymbol{I}, & \boldsymbol{L} = e_{15}\boldsymbol{I},
\end{cases}
$$

ove $c_{11}$, $c_{12}$, $c_{13}$, $c_{33}$, $c_{44}$, $\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{33}$, $e_{31}$, $e_{33}$, $e_{15}$ sono dieci costanti materiali, $\boldsymbol{I}$ denota l'identità di Sym e $\mathfrak{I}$ è il tensore identico del secondo ordine su Sym.

La piastra è stata riguardata una volta come un laminato costituito da un'unica lamina (2D-1), un'altra volta come un laminato costituito da otto lamine identiche (2D-8). Naturalmente, quest'ultimo approccio, assai più oneroso dal punto di vista computazionale, fornisce risultati più soddisfacenti, ed in effetti prossimi a quelli ottenuti tramite l'utilizzo della teoria della piezoelettricità di Voigt (3D).

La piastra è stata dapprima assoggettata al carico trasversale:

$$
(90)\qquad p^{\pm} = p_0/2 \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L),
$$

essendo $p_0$ una costante. Nella schematizzazione 2D-1 è stata ottenuta la soluzione (per semplicità l'indice di lamina è stato omesso):

$$
(91)\qquad \begin{cases} U_1 = U_2 = 0\,, \\ \Phi_1 = \Phi_2 = -3p_0L^3/(8\pi^3\delta^3\hat{c}_{11})\,, \\ W = 3p_0L^4/(8\pi^4\delta^3\hat{c}_{11}) + p_0L^2\varepsilon_{11}/(4\pi^2\delta\bar{\varepsilon}_{11}c_{44})\,, \\ \Pi = p_0L^2e_{15}/(4\pi^2\delta\bar{\varepsilon}_{11}c_{44})\,, \\ X = 0\,, \end{cases}
$$

avendo posto:

$$
(92)\qquad \begin{cases} \bar{c}_{11} = c_{11} - c_{13}^2/c_{33}\,, \quad \bar{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} + e_{33}^2/c_{33}\,, \quad \bar{e}_{31} = e_{31} - c_{13}e_{33}/c_{33}\,, \\ \hat{c}_{11} = \bar{c}_{11} + \bar{e}_{31}^2/\bar{\varepsilon}_{33}\,, \quad \bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} + e_{15}^2/c_{44}\,. \end{cases}
$$

Risulta che $\boldsymbol{U} + \zeta\boldsymbol{\Phi}$ ed il termine in $\delta^{-3}$ di $W$ coincidono con i primi termini dei rispettivi sviluppi asintotici nel rapporto spessore/lato della soluzione 3D [11], mentre $\Pi + \zeta X$ è costante e coincide con la media nello spessore del primo termine del corrispondente sviluppo asintotico della soluzione 3D. Ciò implica, in particolare, che il presente modello stima esattamente la rigidezza flessionale di una piastra piezoelettrica sottile.

In fig. 1 sono diagrammate, nello spessore della piastra, le seguenti quantità adimensionali:

$$
(93)\qquad \begin{cases} a)\ \ \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) = (\bar{\varepsilon}_{11}c_{44}/e_{15})\,\delta\varphi(L/2, L/2, \delta\bar{\zeta})/(p_0L^2)\,, \\ b)\ \ \bar{T}_{11}(\bar{\zeta}) = \delta^2 T_{11}(L/2, L/2, \delta\bar{\zeta})/(p_0L^2)\,, \\ c)\ \ \bar{\tau}_1(\bar{\zeta}) = \delta\tau_1(0, L/2, \delta\bar{\zeta})/(p_0L)\,, \\ d)\ \ \bar{d}_1(\bar{\zeta}) = (c_{44}/e_{15})\,\delta d_1(0, L/2, \delta\bar{\zeta})/(p_0L)\,, \end{cases}
$$

essendo $\bar{\zeta}$ un'ascissa adimensionale lungo lo spessore della piastra. La fig. 1*a* mostra come l'effetto piezoelettrico, cioè l'insorgere di differenze di potenziale elettrico a sèguito di sollecitazioni meccaniche, sia soddisfacentemente descritto dal presente modello di piastra nella schematizzazione ad otto lamine. Viceversa, la schematizzazione a lamina unica fornisce soltanto il potenziale elettrico medio: ciò è conseguenza del vincolo *iii*) sul campo elettrico totale in direzione trasversale, che implica una legge di variazione lineare a tratti nello spessore per il potenziale elettrico. Invece, un'ottima approssimazione della tensione normale nel piano della piastra $T_{11}$ (fig. 1*b*) si può ottenere anche con la schematizzazione a lamina unica. In fig. 1*c* è mostrato il diagramma della tensione tangenziale trasversale $\tau_1$. Il presente modello implica per tale quantità, come detto, una distinzione fra campo totale e costitutivo: si tratta di due differenti stime della medesima grandezza fisica. La divaricazione fra tali stime, cioè l'entità del campo reattivo, fornisce una misura della bontà delle ipotesi di approssimazione poste. Non è apprezzabile la differenza fra la $\tau_1$ totale fornita dalle schematizzazioni ad unica lamina o ad otto lamine. Inoltre, è proprio la $\tau_1$ totale ad approssimarsi maggiormente alla $\tau_1$ fornita dalla soluzione 3D. Infatti, la $\tau_1$ totale è stata calcolata utilizzando le equazioni di equilibrio (19), a partire dalle tensioni $\boldsymbol{T}$ approssimate in modo soddisfacente, e sod-

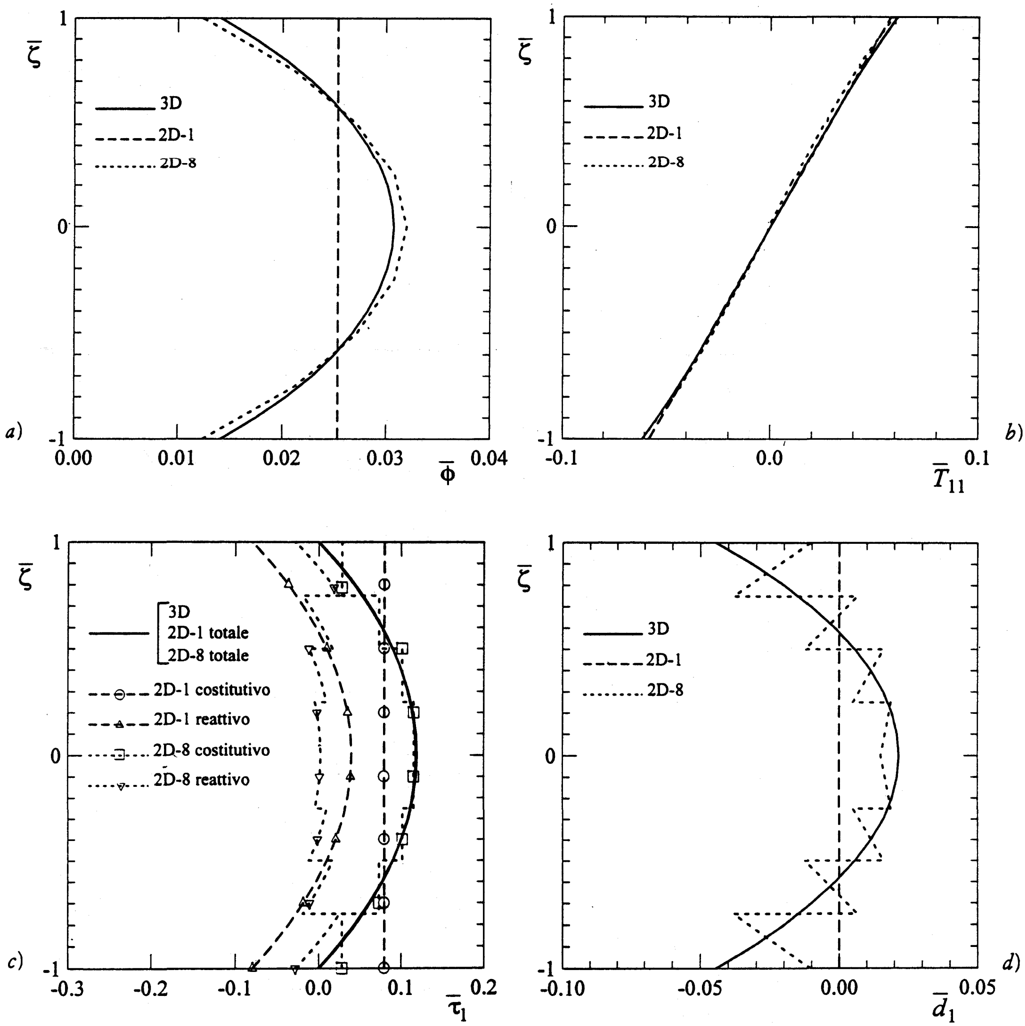


Fig. 1. – Piastra omogenea. Carico trasversale $p^{\pm} = p_0/2 \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/L)$. *a*) Potenziale elettrico $\bar{\phi}$. *b*) Tensione normale nel piano $\bar{T}_{11}$. *c*) Tensione tangenziale trasversale $\bar{\tau}_1$. *d*) Spostamento elettrico nel piano $\bar{d}_1$.

disfa le condizioni al bordo sulle facce superiore ed inferiore della piastra, come la $\tau_1$ della soluzione 3D ma a differenza della $\tau_1$ costitutiva. Un'approssimazione meno buona si ottiene per lo spostamento elettrico nel piano della piastra $d_1$ (fig. 1*d*): la schematizzazione a lamina unica fornisce soltanto la media, nulla, della soluzione 3D; la schematizzazione ad otto lamine fornisce una soluzione che si approssima globalmente alla soluzione 3D, discostandosene però marcatamente in certi punti. Ciò è dovuto al vincolo *ii*) sullo scorrimento totale in direzione trasversale. Nelle applicazioni in cui $d_1$ riveste particolare interesse potrebbe perciò convenire l'uso di una teoria di ordine superiore, in cui tale vincolo sia stato opportunamente rilassato.

Quindi, la piastra è stata assoggettata ad una distribuzione di cariche libere superficiali:

$$\omega^{\pm} = \pm\omega_0 \sin(\pi x_1/L)\sin(\pi x_2/L), \tag{94}$$

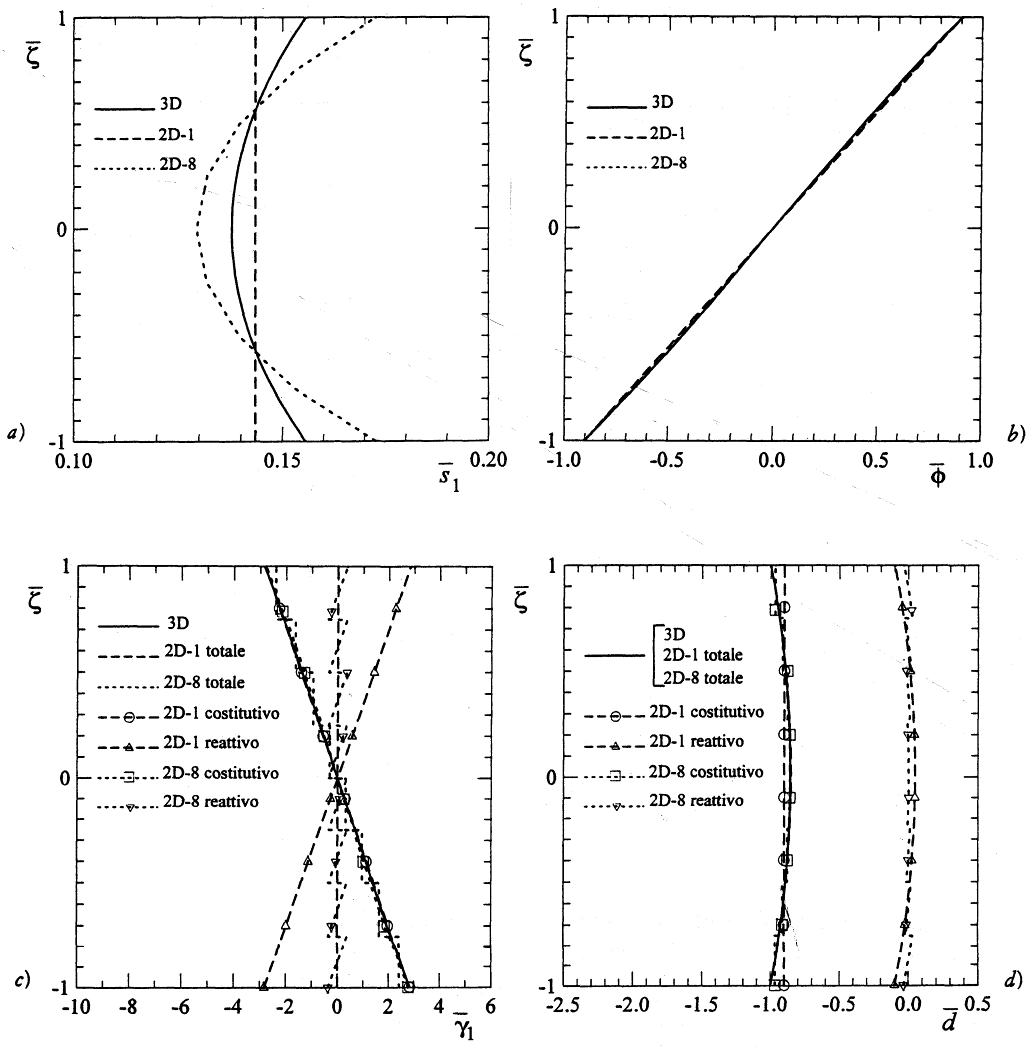


Fig. 2. – Piastra omogenea. Cariche elettriche $\omega^{\pm} = \pm\omega_0 \sin(\pi x_1/L)\sin(\pi x_2/L)$. *a*) Spostamento nel piano $\bar{s}_1$. *b*) Potenziale elettrico $\bar{\phi}$. *c*) Scorrimento trasversale $\bar{\gamma}_1$. *d*) Spostamento elettrico trasversale $\bar{d}$.

essendo $\omega_0$ una costante. Nella schematizzazione 2D-1 è stata ottenuta la soluzione:

$$(95)\quad \begin{cases} U_1 = U_2 = \omega_0 L \bar{e}_{31} / [2\pi \bar{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11} + 4\pi^3 \delta^2 \bar{c}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} / (3L^2)]\,, \\ \Phi_1 = \Phi_2 = 0\,, \\ W = 0\,, \\ X = \omega_0 \bar{c}_{11} / [\bar{\varepsilon}_{33} \hat{c}_{11} + 2\pi^2 \delta^2 \bar{c}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} / (3L^2)]\,, \\ \Pi = 0\,. \end{cases}$$

I termini in $\delta^0$ di $\boldsymbol{U} + \zeta \boldsymbol{\Phi}$ e di $\Pi + \zeta X$ coincidono con i primi termini dei rispettivi sviluppi asintotici nel rapporto spessore/lato della soluzione 3D, mentre $W$ è nullo, così come nulla è la media nello spessore del primo termine del corrispondente sviluppo asintotico della soluzione 3D. Nelle applicazioni in cui risulta essenziale stimare la variazione dello spostamento trasversale $s$ nello spessore è necessario utilizzare una teoria di ordine superiore, ottenuta rilassando opportunamente il vincolo $i$).

In fig. 2 sono diagrammate, nello spessore della piastra, le seguenti quantità adimensionali:

$$(96)\quad \begin{cases} a)\ \bar{s}_1(\bar{\zeta}) = (\hat{c}_{11} \bar{\varepsilon}_{33} / \bar{e}_{31}) s_1(0, L/2, \delta \bar{\zeta}) / (\omega_0 L)\,, \\ b)\ \bar{\phi}(\bar{\zeta}) = (\hat{c}_{11} \bar{\varepsilon}_{33} / \bar{c}_{11}) \phi(L/2, L/2, \delta \bar{\zeta}) / (\omega_0 \delta)\,, \\ c)\ \bar{\gamma}_1(\bar{\zeta}) = ((\hat{c}_{11} \bar{\varepsilon}_{33} c_{44}) / (\bar{c}_{11} e_{15})) L \gamma_1(0, L/2, \delta \bar{\zeta}) / (\omega_0 \delta)\,, \\ d)\ \bar{d}(\bar{\zeta}) = d(L/2, L/2, \delta \bar{\zeta}) / \omega_0\,. \end{cases}$$

TABELLA I. – *Costanti elastiche, dielettriche e piezoelettriche della ceramica PZT-5H e del composito resina epossidica rinforzata con fibre di vetro (G-E), con orientazione delle fibre a* 0° *e* 90° *rispetto all'asse* $x_1$. *Le costanti non indicate sono nulle.*

| | | PZT-5H | G-E (0°) | G-E (90°) |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{C}_{1111}$ | [GPa] | 126. | 31.2 | 10.2 |
| $\mathcal{C}_{2222}$ | [GPa] | 126. | 10.2 | 31.2 |
| $\mathcal{C}_{1122}$ | [GPa] | 79.5 | 3.87 | 3.87 |
| $\mathcal{C}_{1212}$ | [GPa] | 23.3 | 2.83 | 2.83 |
| $\kappa$ | [GPa] | 117. | 10.2 | 10.2 |
| $l$ | [nF/m] | 13.0 | 0.037 | 0.037 |
| $A_{11}$ | [GPa] | 84.1 | 3.87 | 3.90 |
| $A_{22}$ | [GPa] | 84.1 | 3.90 | 3.87 |
| $B_{11}$ | [C/m²] | −6.5 | 0. | 0. |
| $B_{22}$ | [C/m²] | −6.5 | 0. | 0. |
| $h$ | [C/m²] | 23.3 | 0. | 0. |
| $G_{11}$ | [GPa] | 23.0 | 2.83 | 2.26 |
| $G_{22}$ | [GPa] | 23.0 | 2.26 | 2.83 |
| $M_{11}$ | [nF/m] | 15.0 | 0.037 | 0.037 |
| $M_{22}$ | [nF/m] | 15.0 | 0.037 | 0.037 |
| $L_{11}$ | [C/m²] | 17.0 | 0. | 0. |
| $L_{22}$ | [C/m²] | 17.0 | 0. | 0. |

Lo spostamento nel piano della piastra $s_1$ (fig. 2*a*) è poco variabile nello spessore, ed è discretamente stimato, con errori di segno opposto, nelle due modellazioni a lamina unica oppure ad otto lamine. Ottime risultano le approssimazioni del potenziale elettrico $\phi$ (fig. 2*b*) e dello spostamento elettrico in direzione trasversale $d$ (fig. 2*d*): quest'ultimo risulta sdoppiato in campo totale e campo costitutivo, ma la divaricazione fra essi è molto modesta, particolarmente nella schematizzazione ad otto lamine. In fig. 2*c* è mostrato il diagramma dello scorrimento trasversale $\gamma_1$. Anch'esso è sdoppiato in campo totale e campo costitutivo: il primo, in conseguenza del vincolo *ii*), è costante a tratti

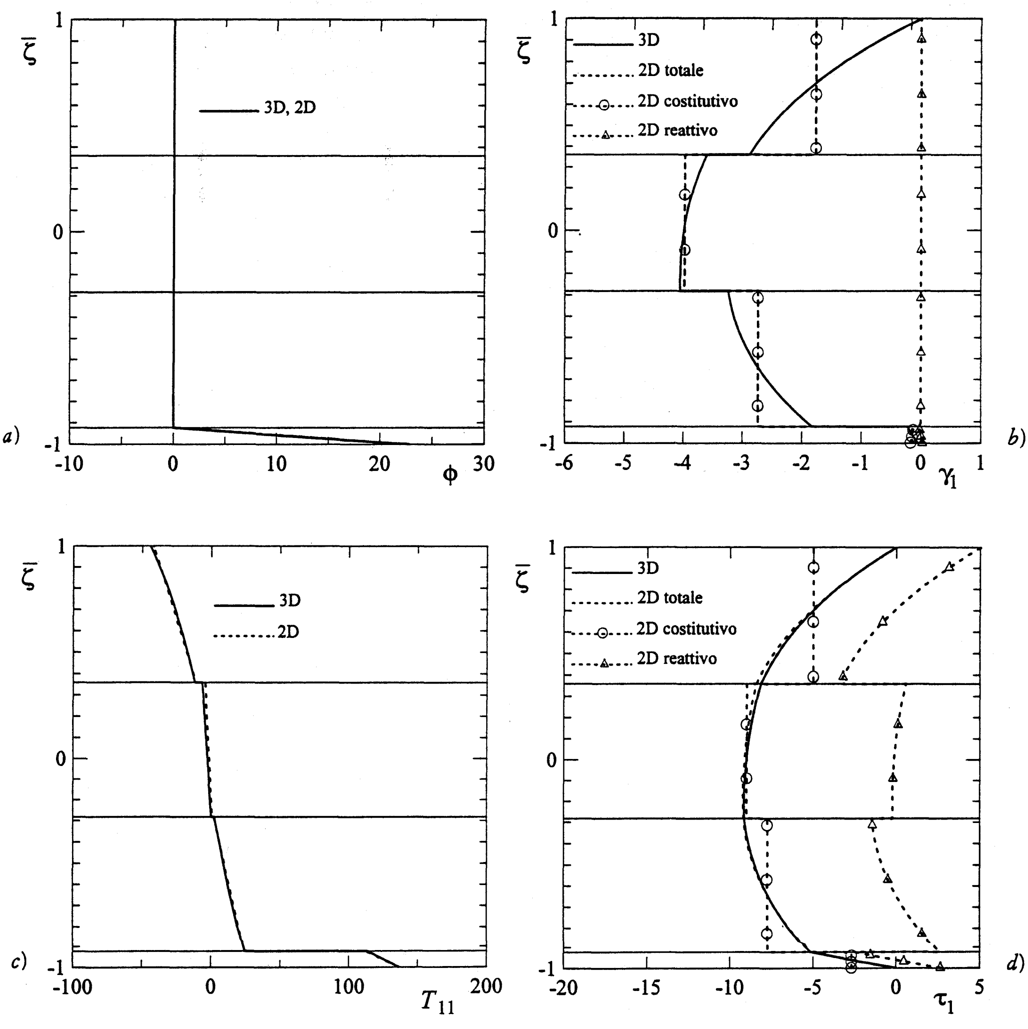


Fig. 3. – Piastra laminata. Funzionamento del piezoelettrico da sensore. *a*) Potenziale elettrico $\phi(V)$. *b*) Scorrimento trasversale $\gamma_1$ ($\mu$epsilon). *c*) Tensione normale del piano $T_{11}$ (kPa). *d*) Tensione tangenziale trasversale $\tau_1$ (kPa).

nello spessore (in particolare, è nullo nella schematizzazione a lamina unica, così come la media nello spessore della soluzione 3D). Viceversa, lo scorrimento costitutivo in direzione trasversale, non direttamente soggetto ad ipotesi di approssimazione, è in buon accordo con la soluzione 3D.

Il secondo esempio ha una valenza più spiccatamente applicativa. È considerata una piastra di lato $L = 1\text{m}$ e spessore $2\delta = 0.26\,\text{m}$, costituita da quattro lamine: dal basso verso l'alto, una lamina piezoelettrica di ceramica PZT-5H di spessore 0.01 m e tre lamine egualmente spesse di composito a matrice epossidica rinforzata con fibre di vetro

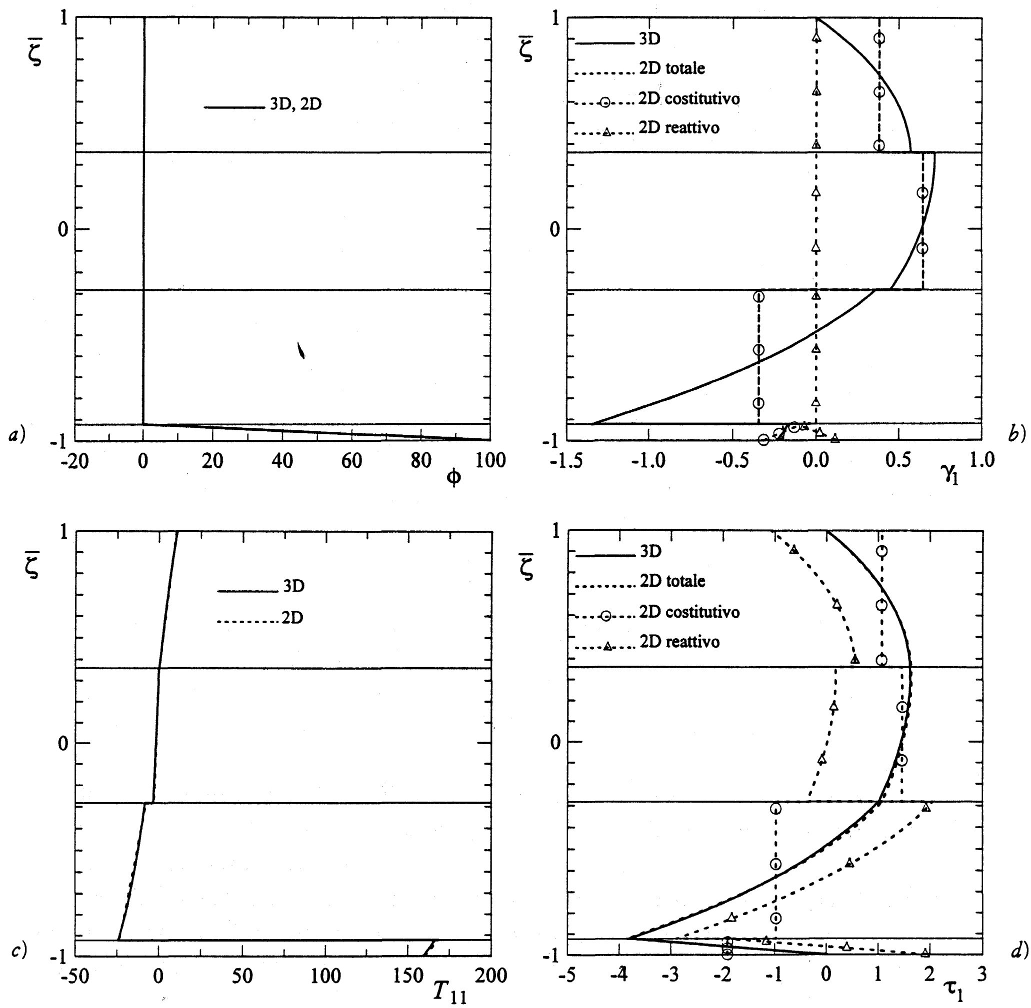


Fig. 4. – Piastra laminata. Funzionamento del piezoelettrico da attuatore. *a*) Potenziale elettrico $\phi(V)$. *b*) Scorrimento trasversale $\gamma_1$ ($\mu$epsilon). *c*) Tensione normale del piano $T_{11}$ (kPa). *d*) Tensione tangenziale trasversale $\tau_1$ (kPa).

parallele, con orientazione 0°-90°-0° rispetto all'asse $x_1$. Le costanti materiali della ceramica e del composito sono riportate in tab. I.

Sono state studiate le due distinte modalità di funzionamento del piezoelettrico come sensore (fig. 3) oppure come attuatore (fig. 4). In entrambi i casi è stato posto a zero il potenziale elettrico della faccia superiore della lamina piezoelettrica. Nel funzionamento da sensore, la misura del potenziale elettrico indotto sulla faccia inferiore del piezoelettrico dai carichi applicati fornisce informazioni sullo stato di deformazione e di sforzo nel laminato. Tale stato di deformazione e di sforzo, viceversa, può essere modificato valendosi della capacità della lamina piezoelettrica di funzionare da attuatore: a tale scopo, basta applicare una differenza di potenziale elettrico fra le facce di tale lamina.

In fig. 3 il laminato è soggetto al carico trasversale

$$p^+ = p_0 \sin(\pi x_1/L)\sin(\pi x_2/L) \tag{97}$$

agente sulla faccia superiore, con $p_0 = 10\,\mathrm{kPa}$. In fig. 4, viceversa, l'unica sollecitazione è dovuta al potenziale elettrico imposto

$$\phi^- = \phi_0 \sin(\pi x_1/L)\sin(\pi x_2/L) \tag{98}$$

agente sulla faccia inferiore, con $\phi_0 = 100\,\mathrm{V}$.

È stato diagrammato l'andamento nello spessore del potenziale elettrico $\phi(L/2, L/2, \delta\bar{\zeta})$ (figg. 3*a*, 4*a*), dello scorrimento trasversale $\gamma_1(0, L/2, \delta\bar{\zeta})$ (figg. 3*b*, 4*b*), della tensione normale nel piano $T_{11}(L/2, L/2, \delta\bar{\zeta})$ (figg. 3*c*, 4*c*) e della tensione tangenziale trasversale $\tau_1(0, L/2, \delta\bar{\zeta})$ (figg. 3*d*, 4*d*). Le linee orizzontali rappresentano le superfici interlaminari. La soluzione fornita dalla teoria della piezoelettricità di Voigt è confrontata con le soluzioni fornite dal presente modello. Si evidenzia in tutti i diagrammi un soddisfacente accordo fra le due soluzioni.

## 6. Conclusioni

È stato formulato un nuovo modello di piastra laminata piezoelettrica, estendendo ai laminati piezoelettrici la teoria di laminato elastico detta «alla Reissner-Mindlin». Il presente modello consente l'analisi di laminati piezoelettrici moderatamente spessi, ed ha un più ampio campo di applicabilità dei modelli già disponibili, essendo basato su ipotesi meno restrittive.

È stato seguíto un procedimento di deduzione dalla teoria della piezoelettricità di Voigt, tramite l'introduzione di vincoli sulla deformazione, sulla tensione, sul campo elettrico e sullo spostamento elettrico. A tal fine, è stato utilizzato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Dal funzionale lagrangiano, che governa il problema del laminato riguardato come corpo tridimensionale vincolato, è stato dedotto un funzionale del tipo energia potenziale totale. Questo funzionale potrà costituire la base di formulazioni discretizzate agli elementi finiti.

L'affidabilità del modello proposto in questo lavoro è stata verificata nello studio di semplici problemi applicativi, dei quali risultano note le soluzioni di riferimento, ottenute in applicazione della teoria della piezoelettricità di Voigt.

Si è evidenziato un soddisfacente accordo fra tali soluzioni e i risultati forniti dal presente modello.


## Ringraziamenti

L'autore desidera ringraziare il Prof. Franco Maceri ed il Prof. Elio Sacco per i suggerimenti e le osservazioni intorno al presente lavoro, ed il Consiglio Nazionale delle Ricerche, il Ministero per l'Università e la Ricerca Scientifica e Tecnologica, e l'Agenzia Spaziale Italiana per il supporto finanziario ricevuto.


## Bibliografia


[1] H. A. Sosa, *On the modelling of piezoelectric laminated structures*. Mech. Res. Commun., 19, 1992, 541-546.

[2] M. C. Ray - K. M. Rao - B. Samanta, *Exact analysis of coupled electroelastic behaviour of a piezoelectric plate under cylindrical bending*. Comp. & Struct., 45, 1992, 667-677.

[3] M. C. Ray - K. M. Rao - B. Samanta, *Exact solution for static analysis of an intelligent structure under cylindrical bending*. Comp. & Struct., 47, 1993, 1031-1042.

[4] Y. S. Zhou - H. F. Tiersten, *Elastic analysis of laminated composite plates in cylindrical bending due to piezoelectric actuators*. Smart Mater. Struct., 3, 1994, 255-265.

[5] S. Brooks - P. Heyliger, *Static behaviour of piezoelectric laminates with distributed and patched actuators*. J. Intell. Mat. Syst. and Struct., 5, 1994, 635-646.

[6] J. S. Yang - R. C. Batra - X. Q. Liang, *The cylindrical bending vibration of a laminated elastic plate due to piezoelectric actuators*. Smart Mater. Struct., 3, 1994, 485-493.

[7] P. Heyliger - S. Brooks, *Free vibration of piezoelectric laminates in cylindrical bending*. Int. J. Solids Structures, 32, 1995, 2945-2960.

[8] P. Heyliger - D. A. Saravanos, *Exact free-vibration analysis of laminated plates with embedded piezoelectric layers*. J. Acoust. Soc. Am., 98, 1995, 1547-1557.

[9] R. C. Batra - X. Q. Liang, *The vibration of a simply supported rectangular elastic plate due to piezoelectric actuators*. Int. J. Solids Structures, 33, 1996, 1597-1618.

[10] J. S. Lee - L. Z. Jiang, *Exact electroelastic analysis of piezoelectric laminae via state space approach*. Int. J. Solids Structures, 33, 1996, 977-990.

[11] P. Bisegna - F. Maceri, *An exact three-dimensional solution for simply-supported rectangular piezoelectric plates*. J. Appl. Mech., 63, 1996, 628-638.

[12] H. F. Tiersten, *Electroelastic equations for electroded thin plates subject to large driving voltages*. J. Appl. Phys., 74, 1993, 3389-3393.

[13] R. D. Mindlin, *High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates*. Int. J. Solids Structures, 8, 1972, 895-906.

[14] C. K. Lee, *Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. Part I. Governing equations and reciprocal relationships*. J. Acoust. Soc. Am., 87, 1990, 1144-1158.

[15] G. A. Maugin - D. Attou, *An asymptotic theory of thin piezoelectric plates*. Q. Jl. Mech. Appl. Math., 43, 1990, 347-362.

[16] E. F. Crawley - K. B. Lazarus, *Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plates*. AIAA Jnl., 29, 1991, 944-951.

[17] Ph. Destuynder - I. Legrain - L. Castel - N. Richard, *Theoretical, numerical and experimental discussion on the use of piezoelectric devices for control-structure interaction*. Eur. J. Mech., A/Solids, 11, 1992, 181-213.

[18] H. S. Tzou - J. P. Zhong, *Electromechanics and vibrations of piezoelectric shell distributed systems*. J. Dynamic Systems, Measurement and Control, 115, 1993, 506-517.

[19] P. F. Pai - A. H. Nayfeh - K. Oh - D. T. Mook, *A refined nonlinear model of composite plates with integrated piezoelectric actuators and sensors*. Int. J. Solids Structures, 30, 1993, 1603-1630.

[20] Y.-K. YONG - J. T. STEWART, *A laminated plate theory for high frequency piezoelectric thin-film resonators*. J. Appl. Phys., 74, 1993, 3028-3046.

[21] V. BIRMAN - A. SIMONYAN, *Theory and applications of cylindrical sandwich shells with piezoelectric sensors and actuators*. Smart Mater. Struct., 3, 1994, 391-396.

[22] H. S. TZOU - J. P. ZHONG, *A linear theory of piezoelastic shell vibrations*. J. Sound and Vibration, 175, 1994, 77-88.

[23] J. A. MITCHELL - J. N. REDDY, *A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminae*. Int. J. Solids Structures, 32, 1995, 2345-2367.

[24] P. BISEGNA, *Analisi del comportamento statico di laminati piezoelettrici*. In: G. MEDRI - G. NICOLETTO (a cura di), *Atti del XXIV Convegno Nazionale AIAS (Parma, 27-30/9/1995)*. Parma 1995, 374-381.

[25] P. BISEGNA - F. MACERI, *A consistent theory of thin piezoelectric plates*. J. Intell. Mat. Syst. and Struct., 7, 1996, 372-389.

[26] E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*. J. Appl. Mech., 12, 1945, 69-77.

[27] H. HENCKY, *Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten*. Ing. Arch., 16, 1947, 72-76.

[28] R. D. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. J. Appl. Mech., 38, 1951, 31-38.

[29] T. IKEDA, *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford University Press, Oxford 1990.

[30] A. C. ERINGEN - G. A. MAUGIN, *Electrodynamics of continua*. Springer-Verlag, New York 1990.

[31] J. N. REDDY, *A generalization of two-dimensional theories of laminated plates*. Commun. Appl. Numer. Meth., 3, 1987, 173-180.

[32] E. J. BARBERO - J. N. REDDY - J. L. TEPLY, *An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory*. Int. J. Numer. Meth. Engng., 29, 1990, 1-14.

[33] P. PODIO-GUIDUGLI, *An exact derivation of thin plates equations*. J. Elasticity, 22, 1989, 121-133.

[34] L. A. LYUSTERNIK, *On constrained extrema of functionals*. Mat. Sb., 41, 1934, 390-401.

[35] D. G. LUENBERGER, *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, New York 1969.

[36] P. BISEGNA - E. SACCO, *A rational deduction of plate theories from the three-dimensional linear elasticity*. Zeit. Angew. Math. und Mech., in press.

[37] P. BISEGNA - E. SACCO, *Deduzione di teorie di piastre laminate dalla elasticità tridimensionale*. In : L. NUZIANTE (a cura di), *Atti del XII Convegno Nazionale Aimeta (Napoli, 3-6/10/1995)*. Napoli 1995, 257-262.

[38] P. BISEGNA - E. SACCO, *The layer-wise laminate theory rationally deduced from the three-dimensional elasticity*. J. Appl. Mech., in press.

[39] G. FICHERA, *Existence theorems in elasticity*. In: S. FLÜGGE (ed.), *Handbuch der Physik*. Springer-Verlag, Berlin 1972, VIa/2.

[40] H. F. TIERSTEN, *Linear piezoelectric plate vibrations*. Plenum Press, New York 1969.

[41] M. M. VAINBERG, *Variational methods for the study of nonlinear operators*. Holden-Day, San Francisco 1964.

[42] L. D. LANDAU - E. M. LIFSHITZ, *Electrodynamics of continuous media*. In: *Course of theoretical physics*. Pergamon Press, Oxford 1981, vol. 8.

[43] A. L. CAUCHY, *Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque élastique dont l'élasticité n'est pas la même dans tous les sens*. Exercises Math., 4, 1829, 1-14.

[44] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, Parigi 1968.

[45] F. BREZZI - M. FORTIN, *Mixed and hibrid finite element methods*. Springer-Verlag, New York 1991.

[46] VERNITRON, *Five modern piezoelectric ceramics*. Bulletin of Morgan Matroc Ltd., Vernitron Piezoelectric Division, Bedford, Ohio 1983.

Dipartimento di Ingegneria Civile
Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»
Via della Ricerca Scientifica - 00133 ROMA