Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Jean-Pierre Vigué

Sur les rétractes holomorphes de dimension 1

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **9** (1998), n.1, p. 31–41.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1998_9_9_1_31_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1998.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 9:31-41 (1998)

Analisi matematica. — *Sur les rétractes holomorphes de dimension 1.* Nota (*) di JEAN-PIERRE VIGUÉ, presentata dal Socio E. Vesentini.

ABSTRACT. — *On holomorphic retracts of dimension 1.* In this *Note*, I study existence and unicity of holomorphic retractions on complex submanifolds of dimension 1.

KEY WORDS: Holomorphic retracts; Complex geodesics; Invariant distances.

RIASSUNTO. — *Su i retratti olomorfi di dimensione 1.* In questa *Nota*, vengono studiate l'esistenza e l'unicità di retratti olomorfi su sottovarietà complesse di dimensione 1.

1. INTRODUCTION

D'après E. Vesentini [20-22], une géodésique complexe d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ est une application holomorphe φ du disque-unité Δ dans D qui est une isométrie pour la distance de Carathéodory. Comme l'a remarqué L. Lempert dans [17], dire qu'une sous-variété analytique V de D analytiquement isomorphe au disque-unité Δ, est l'image d'une géodésique complexe φ: $\Delta \to D$ est équivalent à dire que V est l'image d'une rétraction holomorphe ρ: $D \to D$. C'est une des raisons d'étudier les rétractions holomorphes d'un domaine D (ou d'une variété X) sur une sous-variété V analytiquement isomorphe au disque-unité Δ. Une autre raison d'étudier les rétractions holomorphes est que, dans une certaine mesure, elles sont plus intrinsèques que les géodésiques complexes qui ne sont définies qu'à un changement de paramètre près.

A l'aide des distances et métriques invariantes, nous allons caractériser l'existence des rétractions holomorphes sur des sous-variétés analytiquement isomorphes au disque-unité Δ. Ensuite, l'image V d'une rétraction holomorphe étant donnée, nous étudierons des problèmes d'unicité. Ainsi, nous montrerons, dans le cas de la boule-unité B de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\cdot\|$, que, si la frontière ∂B de B contient, au voisinage de ∂V, un sous-espace vectoriel suffisamment gros, alors il existe une unique rétraction holomorphe de B sur V.

Une généralisation naturelle de ce travail est d'étudier les rétractions holomorphes sur des sous-variétés V hyperboliques de dimension 1. Pour le traiter, nous serons amenés à définir de nouvelles pseudométriques invariantes, l'une de type Carathéodory, l'autre de type Kobayashi. Après avoir montré les deux résultats fondamentaux sur ces questions, à titre d'exercice, nous calculerons ces pseudométriques dans un cas simple. Enfin, nous appliquerons ces résultats aux rétractions holomorphes de $\Delta \times C$, où C est une couronne de $\mathbb{C}$.

(*) Pervenuta in forma definitiva all'Accademia il 12 novembre 1997.

2. Géodésiques complexes et rétractes holomorphes

La pseudodistance de Carathéodory c_X sur une variété analytique complexe X est définie par la formule:

$$c_X(x, y) = \sup_{f \in H(X,\Delta)} \omega\big(f(x), f(y)\big) ,$$

où $H(X, \Delta)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de X dans le disque-unité Δ, et ω est la distance de Poincaré sur Δ.

De manière duale, on définit la fonction de Kobayashi δ_X par la formule

$$\delta_X(x, y) = \inf_{f \in H(\Delta, X)} \omega(\alpha, \beta) ,$$

où α et $\beta \in \Delta$ sont tels que $f(\alpha) = x$ et $f(\beta) = y$. On montre d'abord que δ_X est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. Malheureusement, δ_X n'est pas une pseudodistance en général car δ_X ne satisfait pas toujours à l'inégalité triangulaire. On peut alors définir la pseudodistance de Kobayashi k_X comme la plus grande pseudodistance inférieure ou égale à δ_X. Cependant, δ_X qui est supérieur ou égal à k_X, fournit, dans un certain sens, plus de renseignements sur X et c'est δ_X que nous utiliserons le plus souvent dans cet article.

Il nous faut aussi définir les pseudométriques infinitésimales associées. La pseudométrique infinitésimale de Carathéodory E_X est définie par

$$E_X(x, v) = \sup_{f \in H(X,\Delta)} |Df(x) \cdot v| \quad \big(x \in X,\, v \in T_x(X)\big) .$$

La pseudométrique inifinitésimale de Kobayashi F_X est définie de manière duale:

$$F_X(x, v) = \inf\big\{|\lambda| \,\big|\, \exists \varphi \in H(\Delta, X) \text{ tel que } \varphi(0) = x \text{ et } \lambda D\varphi(0) = v\big\} .$$

Sur toutes ces notions, le lecteur intéressé pourra consulter [5, 8, 11, 13, 15].

E. Vesentini [20-22] a montré le théorème suivant qui définit et caractérise les géodésiques complexes de X.

Théorème et définition 2.1. *Soit φ: $\Delta \to X$ une application holomorphe. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe deux points distincts ζ et η de Δ tels que*

$$c_X\big(\varphi(\zeta), \varphi(\eta)\big) = c_\Delta(\zeta, \eta) = \omega(\zeta, \eta) ;$$

(ii) *pour tous les points ζ et η de Δ, on a:*

$$c_X(\varphi(\zeta), \varphi(\eta)) = c_\Delta(\zeta, \eta) = \omega(\zeta, \eta) ;$$

(iii) *il existe $\zeta \in \Delta$ et $v \in \mathbb{C}$ ($v \neq 0$) tels que*

$$E_X\big(\varphi(\zeta), D\varphi(\zeta) \cdot v\big) = E_\Delta(\zeta, v) = |v|(1 - |\zeta|^2)^{-1} ;$$

(iv) *pour tout $\zeta \in \Delta$ et pour tout $v \in \mathbb{C}$, on a:*

$$E_X\big(\varphi(\zeta), D\varphi(\zeta) \cdot v\big) = E_\Delta(\zeta, v) = |v|(1 - |\zeta|^2)^{-1} .$$

On dit alors que φ est une géodésique complexe de X.

En particulier, si φ est une géodésique complexe de X, φ est une application holomorphe propre de Δ dans X, et son image $\varphi(\Delta)$ est une sous-variété complexe fermée de X, analytiquement isomorphe au disque-unité Δ.

Comme l'a remarqué L. Lempert [16, 17], on peut exprimer ces résultats en utilisant la notion de rétraction holomorphe. Rappelons d'abord la définition suivante.

DÉFINITION 2.2. *Soit X une variété analytique complexe et soit ρ: $X \to X$ une application holomorphe. On dit que ρ est une rétraction holomorphe si $\rho^2 = \rho \circ \rho$ est égal à ρ.*

Il est, bien sûr, équivalent de dire que $\rho|_{im\rho}$ est égal à $id|_{im\rho}$ et H. Cartan [4] a montré que, si ρ: $X \to X$ une rétraction holomorphe, son image $\rho(X)$ est une sous-variété analytique complexe fermée de X. Les relations entre les géodésiques complexes et les rétractions holomorphes sont résumées dans le théorème suivant (comparer avec [6]).

THÉORÈME 2.3. *Soit X une variété analytique complexe et soit V une sous-variété analytique complexe fermée de X, analytiquement isomorphe au disque-unité Δ. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(*i*) *V est l'image d'une rétraction holomorphe ρ: $X \to X$;*
(*ii*) *V est l'image d'une géodésique complexe φ: $\Delta \to X$;*
(*iii*) *$c_X|_V = c_V$;*
(*iv*) *il existe deux points distincts x et y de V tels que*

$$c_X(x, y) = c_V(x, y);$$

(*v*) *$E_X|_{T(V)} = E_V$;*
(*vi*) *il existe $x \in V$ et $v \in T_x(V)$, $v \neq 0$, tels que*

$$E_X(x, v) = E_V(x, v).$$

DÉMONSTRATION. Comme V est isomorphe au disque-unité Δ, on sait d'après la définition des géodésiques complexes et le Théorème 3.2 que (*ii*), (*iii*), (*iv*), (*v*) et (*vi*) sont équivalents. Montrons que (*i*) entraîne (*iii*). Considérons

$$V \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\rho} V ,$$

et $\rho \circ i$ est égal à $id|_V$. Le fait que les distances invariantes sont contractantes montre l'inégalité suivante: pour tout $x \in V$, pour tout $y \in V$,

$$c_V(x, y) \leq c_X(x, y) \leq c_V(x, y).$$

On en déduit l'égalité annoncée.

Réciproquement, montrons par exemple que (*iv*) entraîne (*i*). Soient x et y deux points de V tels que $c_X(x, y) = c_V(x, y)$. Soit f: $X \to \Delta$ une application holomorphe qui donne $c_X(x, y)$, c'est-à-dire telle que

$$c_X(x, y) = c_\Delta\big(f(x), f(y)\big) = \omega\big(f(x), f(y)\big).$$

Soit g un isomorphisme analytique de Δ sur V. Alors $g \circ f$: $X \to V$ est telle que

$$c_V\big(g(f(x)), g(f(y))\big) = c_X(x, y).$$

Mais, comme $c_V(x, y) = c_X(x, y)$, on trouve:

$$c_V\big(g(f(x)), g(f(y))\big) = c_V(x, y) ,$$

et d'après le lemme de Schwarz-Pick [5, 11], $g \circ f|_V$ est un automorphisme analytique de V. Quitte à composer à gauche $g \circ f$ avec un automorphisme h de V, on obtient

$$h \circ g \circ f|_V = id|_V ,$$

et $h \circ g \circ f$: $X \to X$ est bien une rétraction holomorphe de X sur V.

Nous allons maintenant étudier une question un peu plus délicate. Etant donnés deux points a et b de X (resp. $a \in X$ et $v \in T_a(X)$), à quelle condition existe-t-il une géodésique complexe φ: $\Delta \to X$ telle que a et b appartiennent à $\varphi(\Delta)$ (resp. $a \in \varphi(\Delta)$, $v \in T_a(\varphi(\Delta))$). Nous avons les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 2.4. *Soit X une variété analytique complexe taut au sens de H. Wu* [24]. *Soient a et b deux points distincts de X. Pour qu'il existe une géodésique complexe φ: $\Delta \to X$ telle que a et b appartiennent à $\varphi(\Delta)$, il faut et il suffit que*

$$c_X(a, b) = \delta_X(a, b) .$$

DÉMONSTRATION. La condition nécessaire est évidente. Montrons la réciproque. On sait déjà d'après P. Kiernan [14] et D. Eisenman [7] que X, qui est taut, est hyperbolique (*i.e.*, que k_X est une distance sur X). Du fait que X est taut, on déduit l'existence d'une application holomorphe φ: $\Delta \to X$ qui réalise exactement $\delta_X(a, b)$, *i.e.*, telle que si α et β appartenant à Δ sont tels que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, on ait:

$$\delta_X(a, b) = \delta_X\big(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\big) = \omega(\alpha, \beta) .$$

Soit maintenant f: $X \to \Delta$ une application holomorphe telle que

$$c_X(a, b) = \omega\big(f(a), f(b)\big) .$$

L'application $f \circ \varphi$: $\Delta \to \Delta$ est telle que

$$\omega\big(f(\varphi(\alpha)), f(\varphi(\beta))\big) = \omega(\alpha, \beta) .$$

C'est donc un automorphisme du disque-unité Δ, et φ: $\Delta \to X$ est une géodésique complexe de X.

Ce théorème admet la variante infinitésimale suivante dont nous laissons la démonstration en exercice au lecteur.

THÉORÈME 2.5. *Soit X une variété analytique complexe taut au sens de H. Wu* [24]. *Soient $a \in X$ et v un vecteur non nul de $T_a(X)$. Pour qu'il existe une géodésique complexe φ: $\Delta \to X$ telle que a appartienne à $\varphi(\Delta)$ et que v appartienne à $T_a(\varphi(\Delta))$, il faut et il suffit que*

$$E_X(a, v) = F_X(a, v) .$$

3. Unicité des géodésiques complexes et des rétractions holomorphes

Dans ce paragraphe, nous allons nous placer dans un domaine convexe borné D de $\mathbb{C}^n$ (et même parfois dans la boule-unité de $\mathbb{C}^n$) et étudier le problème de l'unicité des géodésiques complexes et des rétractions holomorphes.

Commençons par les géodésiques complexes. Il nous faut d'abord remarquer que, si $\varphi\colon \Delta \to D$ est une géodésique complexe de D, et si f est un automorphisme analytique de D, $\varphi \circ f\colon \Delta \to D$ est encore une géodésique complexe de D. Aussi, nous définirons l'unicité des géodésiques complexes de la façon suivante: étant donnés a et $b \in D$ (resp. $a \in D$ et $v \in T_a(D) = \mathbb{C}^n$), nous dirons que $\varphi\colon \Delta \to D$ est l'unique géodésique complexe passant par a et b (resp. passant par a et tangente à v) si a et b appartiennent à $\varphi(\Delta)$ (resp. $a \in \varphi(\Delta)$ et $v \in T_a(\varphi(\Delta))$), et si, pour toute autre géodésique complexe $\psi\colon \Delta \to D$ vérifiant les mêmes propriétés, il existe $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tel que $\psi = \varphi \circ f$. En ce qui concerne les géodésiques complexes, les résultats d'unicité sont assez bien connus. Déjà dans [17], L. Lempert montre que, si D est un domaine strictement convexe à frontière suffisamment régulière, les géodésiques complexes dans D existent et sont uniques. En fait, l'hypothèse de régularité de la frontière n'est pas nécessaire et S. Dineen [5, p. 93] montre le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Soit D un domaine borné strictement convexe (c'est-à-dire, tel que tout point x de la frontière ∂D de D soit un point extrémal de $\overline{D}$). Alors, les géodésiques complexes de D sont uniques au sens précédent.*

Si on considère la boule-unité ouverte B de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\cdot\|$, E. Vesentini [20-22] a montré le résultat plus précis suivant. Rappelons d'abord qu'une partie A de $\mathbb{C}^n$ étant donnée, un point x de A est un point complexe-extrémal de A si 0 est le seul vecteur y de $\mathbb{C}^n$ tel que $x + \zeta y$ appartienne à A, pour tout $\zeta \in \Delta$.

Théorème 3.2. *Soit B la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\cdot\|$. Soit $x \in \partial B$ un point complexe-extrémal de $\overline{B}$. Alors,*

$$\zeta \xmapsto{\varphi} \varphi(\zeta) = \zeta\, v$$

est l'unique géodésique complexe de B telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = v$.

Considérons maintenant la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\cdot\|$. Soit $x \in \partial B$. Comme L. Belkhchicha [1, 2] et G. Gentili [10], on définit

$$V_x = \{y \in \mathbb{C}^n | \exists\, r > 0 \quad \text{tel que } \forall\, \zeta \in \mathbb{C}\,, |\zeta| < r, \quad x + \zeta y \in \overline{B}\}\,.$$

Comme $\overline{B}$ est convexe, V_x est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^n$ ne contenant pas x et dire que x est un point complexe-extrémal de $\overline{B}$ est équivalent à dire que $V_x = \{0\}$. On montre aussi que $(x + V_x) \cap \overline{B}$ est l'adhérence d'un ouvert convexe L_x de l'espace affine $x + V_x$ contenant x.

Considérons une géodésique complexe $\varphi\colon \Delta \to B$ telle que $\varphi(0) = 0$. Soit

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$$

son développement en série entière à l'origine. Le fait que φ est une géodésique complexe est caractérisé par le fait que

$$E_B\big(\varphi(0)\,,\varphi'(0)\big) = E_B\big(0\,,\varphi'(0)\big) = 1\ ,$$

et, comme $E_B(0\,,\cdot) = \|\cdot\|$, c'est équivalent à $\|a_1\| = \|\varphi'(0)\| = 1$, c'est-à-dire que $\varphi'(0)$ appartient à ∂B. L'application

$$\psi(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{n-1}$$

est une application holomorphe de Δ dans $\overline{B}$. On déduit de E. Thorp et R. Whitley [19] (voir aussi [8, 10]) que ψ est une application holomorphe de Δ dans $L_{a_1} \subset \subset a_1 + V_{a_1}$. Comme l'a remarqué G. Gentili dans [9, 10], dès que V_{a_1} est différent de $\{0\}$, les géodésiques complexes $\varphi\colon\ \Delta \to B$ telles que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = a_1$ ne sont pas uniques.

Nous allons maintenant étudier l'unicité des rétractions holomorphes et nous allons montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.3. *Soit $\varphi\colon\ \Delta \to B$ une géodésique complexe de B telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = x \in \partial B$. Pour tout $z \in \mathbb{C}x \oplus V_x$, soit $p(z) = t(z)x$ la projection sur $\mathbb{C}x$ parallèlement à V_x. Enfin, soit ρ une rétraction holomorphe sur $\varphi(\Delta)$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}x \oplus V_x$,*

$$\rho(z) = \varphi\big(t(z)\big)\ .$$

En particulier, si V_x est un supplémentaire de $\mathbb{C}x$, il existe une et une seule rétraction holomorphe sur $\varphi(\Delta)$.

DÉMONSTRATION. Soit $E = \mathbb{C}x \oplus V_x$. Soit $z \in E$. On écrira $z = (z_1\,, z_2)$, où $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in V_x$ et $z = z_1 x + z_2$. On déduit du fait que B est convexe que $B \cap E$ contient l'ensemble des points $z = (z_1\,, z_2)$, où $z_1 \in \Delta$ et $z_2 \in U$, où U est un voisinage de 0 dans V_x.

Pour $z = (z_1\,, 0)$, il est facile de voir que

$$\rho(z) = \varphi(z_1) = \varphi\big(t(z)\big)\ .$$

Mais $t|_{\Delta \times U}$ est une application holomorphe de $\Delta \times U$ dans Δ telle que $t(z_1\,, 0) = z_1$. Par suite, d'après T. Franzoni et E. Vesentini [8] (voir aussi [23]), $t(z_1\,, z_2) = z_1$, et le théorème s'en déduit.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons montrer le résultat suivant qui généralise G. Gentili [10].

THÉORÈME 3.4. *Soit B la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\cdot\|$, soit $x \in \partial B$ et soit $h\colon\ \Delta \to V_x$ une application holomorphe. Alors si l'application $\varphi\colon\ \Delta \to \mathbb{C}^n$ définie par $\varphi(\zeta) = \zeta x + h(\zeta)$ envoie Δ dans B, φ est une géodésique complexe de B.*

DÉMONSTRATION. On sait que $\zeta \mapsto \varphi_0(\zeta) = \zeta x$ est une géodésique complexe de B. Il existe donc une application holomorphe $f\colon\ B \to \Delta$ telle que

$$z \longmapsto \varphi_0\big(f(z)\big)$$

soit une rétraction holomorphe sur $\varphi_0(\Delta)$. Comme nous l'avons déjà vu, pour tout $z \in \mathbb{C}x \oplus V_x$, $f(z) = z_1$. Comme h envoie Δ dans V_x, pour tout $z \in \mathbb{C}x \oplus V_x$, on a: $\varphi(f(z)) = z_1 x + h(z_1)$. Il est facile alors de vérifier que $(\varphi \circ f)^2 = \varphi \circ f$. Ainsi, $\varphi \circ f$ est bien une rétraction holomorphe sur $\varphi(\Delta)$. Le théorème est démontré.

4. Rétractes holomorphes de dimension 1 et distances invariantes

La généralisation naturelle du travail précédent est, étant donnée une variété analytique complexe X, de chercher les rétractions holomorphes dont l'image est une sous-variété analytique complexe de dimension 1. On montre facilement le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit X une variété analytique complexe simplement connexe et hyperbolique. Soit ρ: $X \to X$ une rétraction holomorphe et supposons que $\rho(X)$ soit de dimension 1. Alors, $\rho(X)$ est analytiquement isomorphe au disque-unité Δ.*

Si X n'est pas simplement connexe, et si V est une sous-variété analytique complexe de dimension 1 de X, nous allons étudier à quelle condition il existe une rétraction holomorphe ρ de X sur V. Nous étudierons ensuite le problème un peu plus général suivant: étant donnés une variété analytique complexe V de dimension 1, un point x de X et un vecteur v de $T_x(X)$, existe-t-il une rétraction holomorphe ρ: $X \to X$ telle que $\rho(X)$ soit une sous-variété de X isomorphe à V, que $x \in \rho(X)$ et que $v \in T_x(\rho(X))$?

Pour cela, nous allons définir deux nouvelles pseudométriques invariantes, une de type Carathéodory, l'autre de type Kobayashi. Soit V une variété analytique complexe de dimension 1 et soit v un point de V. Supposons V muni d'une métrique infinitésimale invariante α. Ceci signifie en particulier que, pour tout $u \in V$, $\alpha(u, \cdot)$ est une norme sur $T_u(V)$, et que, si f: $V \to V$ est une application holomorphe, on a, pour tout $u \in V$, pour tout $U \in T_u(V)$,

$$\alpha\big(f(u), Df(u) \cdot U\big) \leq \alpha(u, U).$$

Soit X une variété analytique complexe et soit $x \in X$. On définit une pseudométrique de type Carathéodory sur X de la façon suivante: pour tout $z \in X$, pour tout $Z \in T_z(X)$, on pose

$$E_{X,x}^{V,v}(z, Z) = \sup_{\substack{f \in H(X,V) \\ f(x)=v}} \alpha\big(f(z), Df(z) \cdot Z\big).$$

De même, on définit une pseudométrique de type Kobayashi en posant, pour tout $z \in X$, pour tout $Z \in T_z(X)$,

$$F_{X,x}^{V,v}(z, Z) = \inf_{\substack{f \in H(V,X) \\ f(v)=x}} \alpha(u, U),$$

pour tout les $u \in V$ et les $U \in T_u(V)$ tels que $f(u) = z$ et $Df(u) \cdot U = Z$.

On vérifie que l'on a, en particulier

$$E_{V,v}^{V,v}(z, Z) = F_{V,v}^{V,v}(z, Z) = \alpha(z, Z).$$

Dans le cas où V est le disque-unité Δ, pour la pseudométrique de type Carathéodory, on trouve simplement que

$$E_{X,x}^{\Delta,\delta}(z, Z) = E_X(z, Z).$$

Pour la pseudométrique de type Kobayashi, on a:

$$F_{X,x}^{\Delta,\delta}(z, Z) \geq F_X(z, Z) \quad \text{et} \quad F_{X,z}^{\Delta,\delta}(z, Z) = F_X(z, Z).$$

On montre alors facilement la proposition suivante.

Proposition 4.2. *$E_{X,x}^{V,v}$ et $F_{X,x}^{V,v}$ sont des pseudométriques infinitésimales invariantes pour les applications holomorphes pointées, c'est-à-dire que, si $f\colon X \to Y$ est une application holomorphe telle que $f(x) = y$, on a, pour tout $z \in X$, pour tout $Z \in T_z(X)$,*

$$E_{Y,y}^{V,v}\big(f(z), Df(z)\cdot Z\big) \leq E_{X,x}^{V,v}(z, Z), \quad F_{Y,y}^{V,v}\big(f(z), Df(z)\cdot Z\big) \leq F_{X,x}^{V,v}(z, Z).$$

De plus, pour tout $z \in X$, pour tout $Z \in T_z(X)$,

$$E_{X,x}^{V,v}(z, Z) \leq F_{X,x}^{V,v}(z, Z).$$

Nous pouvons alors montrer le théorème suivant.

Théorème 4.3. *Soit X une variété analytique complexe, soit V une sous-variété analytique complexe taut de dimension 1 de X et soit $v \in V$. Pour que V soit l'image d'une rétraction holomorphe $\rho\colon X \to X$, il faut et il suffit que, pour tout $Z \in T_v(V)$,*

$$E_{X,v}^{V,v}(v, Z) = E_{V,v}^{V,v}(v, Z) = \alpha(v, Z).$$

Démonstration. S'il existe une rétraction holomorphe $\rho\colon X \to V$, et en considérant l'injection $i\colon V \to X$, on obtient

$$E_{V,v}^{V,v}(v, Z) \leq E_{X,v}^{V,v}(z, Z) \leq E_{V,v}^{V,v}(v, Z)$$

ce qui montre l'égalité annoncée.

Réciproquement, si l'égalité précédente est vérifiée, comme V est taut, pour tout $Z \neq 0$, il existe une application holomorphe $f\colon X \to V$ telle que $f(v) = v$ et que

$$E_{V,v}^{V,v}(v, Z) = \alpha\big(f(v), Df(v)\cdot Z\big).$$

Comme $E_{X,v}^{V,v}(v, Z) = E_{V,v}^{V,v}(v, Z) = \alpha(v, Z)$, l'application f est telle que

$$\alpha\big(f(v), Df(v)\cdot Z\big) = \alpha(v, Z).$$

Comme $T_v(V)$ est de dimension 1, ceci entraîne que $Df(v)\cdot Z = e^{i\theta}Z$. Mais, d'après H. Cartan [3], ceci entraîne que $f|_V$ est un automorphisme analytique de V. Soit $g\colon V \to V$ l'inverse de $f|_V$, et soit $\rho = g \circ f$. Alors ρ est bien une rétraction holomorphe de X sur V.

Comme dans le cas du disque, en utilisant les deux pseudométriques que nous venons de définir, on peut aussi donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une rétraction holomorphe sur une sous-variété isomorphe à V.

THÉORÈME 4.4. *Soient X et V deux variétés analytiques complexes taut, et supposons que V soit de dimension* 1. *Soient $z \in X$, Z un vecteur non nul de $T_z(X)$ et v un point de V. Pour qu'il existe une rétraction holomorphe ρ: $X \to X$ telle que $z \in \rho(X)$, $Z \in T_z(\rho(X))$ et qu'il existe un isomorphisme analytique de $\rho(X)$ sur V qui envoie z sur v, il faut et il suffit que*

$$E_{X,z}^{V,v}(z\,, Z) = F_{X,z}^{V,v}(z\,, Z)\,.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que, comme X et V sont taut et hyperboliques et que $\alpha(v\,, U) \neq 0$ dès que U est non nul, on a, pour tout $Z \neq 0$, $F_{X,x}^{V,v}(z\,, Z) \neq 0$.

S'il existe une rétraction holomorphe ρ: $X \to X$ telle que $(\rho(X)\,, z)$ soit isomorphe à $(V\,, v)$, l'égalité $E_{X,z}^{V,v}(z\,, Z) = F_{X,z}^{V,v}(z\,, Z)$ se déduit du fait que $E_{V,v}^{V,v} = F_{V,v}^{V,v} = \alpha$.

Réciproquement, supposons que $E_{X,z}^{V,v}(z\,, Z) = F_{X,z}^{V,v}(z\,, Z)$. En utilisant le fait que V est taut, on peut construire une application holomorphe i: $V \to X$ telle que $i(v) = z$ et que $F_{X,z}^{V,v}(i(v)\,, Di(v) \cdot U) = \alpha(v\,, U)$. Ensuite, en utilisant le fait que V est taut, on construit une application holomorphe f: $X \to V$ telle que $f(z) = v$ et que

$$E_{X,z}^{V,v}(z\,, Z) = \alpha\big(f(z)\,, Df(z) \cdot Z\big)\,.$$

Il est clair que $f \circ i$ est une application holomorphe de V dans V telle que $(f \circ i)(v) = v$ et que, pour tout $U \in T_v(V)$,

$$\alpha\big((f \circ i)(v)\,, D(f \circ i)(v) \cdot U\big) = \alpha(v\,, U)\,.$$

Comme V est de dimension 1, on en déduit que $D(f \circ i)(v) \cdot U = e^{i\theta} U$. Par le même argument qu'au théorème précédent, on montre que $f \circ i$ est un automorphisme analytique de V. Soit g: $V \to V$ l'inverse de $f \circ i$, et soit $\rho = i \circ g \circ f$. Du fait que $f \circ i \circ g = id|_V$, on déduit que $\rho^2 = \rho$, et ρ est bien une rétraction holomorphe de X sur V. Le théorème est démontré.

REMARQUE. Contrairement à ce que nous avons fait dans le cas du disque-unité, nous sommes obligés dans notre construction d'utiliser une métrique à point base. C'est dû au fait que nous voulons prendre des limites de suites de fonctions holomorphes à valeurs dans V (ou dans X) et pour être sûr que la suite (f_n) n'est pas compactement divergente, il faut supposer que, pour au moins un point x, la suite $(f_n(x))$ reste dans un compact. Dans le cas du disque, on pouvait toujours se ramener à cette condition, quitte à composer f_n avec un automorphisme g_n bien choisi de Δ. Ici, ce n'est pas possible en général, car V n'est pas homogène, ce qui explique notre construction.

5. EXEMPLES

Dans l'exemple que nous allons traiter, nous allons prendre pour V le disque épointé $D = \Delta \setminus \{0\}$. Nous considérerons sur D la métrique infinitésimale de Carathéodory que nous noterons simplement α et comme les fonctions holomorphes bornées sur D se prolongent à Δ, on sait que, pour tout $z \in D$, pout tout $v \in \mathbb{C}$,

$$\alpha(z\,, v) = |v|(1 - |z|^2)^{-1}\,.$$

Nous allons prendre pour X le disque-unité ouvert Δ. Nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 5.1. $F^{D,a}_{\Delta,x}(z, Z) = |Z|(1-|z|^2)^{-1}$;

$$E^{D,a}_{\Delta,z}(z, Z) = (-2|a|\mathrm{Log}|a|(1-|a|^2)^{-1}) \cdot |Z|(1-|z|^2)^{-1}.$$

En ce qui concerne les rétractions holomorphes, nous allons considérer une couronne

$$C = C_r = \{z \in \mathbb{C} | r < |z| < 1\}$$

et étudier les rétractions holomorphes de dimension 1 de $\Delta \times C$. En utilisant le revêtement universel $\Delta \times \Delta$ de $\Delta \times C$, on montre que les images des rétractions holomorphes de dimension 1 dans $\Delta \times C$ sont isomorphes à Δ ou C. On en déduit les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 5.2. (i) *Si $E_\Delta(x, v) \geq F_C(y, w)$, alors il existe une rétraction holomorphe $\rho: \Delta \times C \to \Delta \times C$ telle que $(x, y) \in \rho(\Delta \times C)$ et que (v, w) appartienne à l'espace tangent $T_{(x,y)}(\rho(\Delta \times C))$. De plus $\rho(\Delta \times C)$ est analytiquement isomorphe au disque-unité Δ;*

(ii) *si $F_C(y, w) > E_\Delta(x, v) > E_C(y, w)$, il n'existe pas de rétraction holomorphe $\rho: \Delta \times C \to \Delta \times C$ telle que $(x, y) \in \rho(\Delta \times C)$ et que (v, w) appartienne à l'espace tangent $T_{(x,y)}(\rho(\Delta \times C))$;*

(iii) *si $E_C(y, w) > E_\Delta(x, v)$, il existe une rétraction holomorphe $\rho: \Delta \times C \to \Delta \times C$ telle que $(x, y) \in \rho(\Delta \times C)$ et que (v, w) appartienne à l'espace tangent $T_{(x,y)}(\rho(\Delta \times C))$. De plus, son image est analytiquement isomorphe à C.*

THÉORÈME 5.3. (i) *Si $c_\Delta(x_0, x_1) \geq \delta_C(y_0, y_1)$, il existe une rétraction holomorphe $\rho: \Delta \times C \to \Delta \times C$ telle que (x_0, y_0) et (x_1, y_1) appartiennent à $\rho(\Delta \times C)$;*

(ii) *si $\delta_C(y_0, y_1) > c_\Delta(x_0, x_1) > c_C(y_0, y_1)$, alors il n'existe pas de rétraction holomorphe $\rho: \Delta \times C \to \Delta \times C$ telle que (x_0, y_0) et (x_1, y_1) appartiennent à $\rho(\Delta \times C)$;*

(iii) *si $c_C(y_0, y_1) > c_\Delta(x_0, x_1)$, il existe une rétraction holomorphe $\rho: \Delta \times C \to \Delta \times C$ telle que (x_0, y_0) et (x_1, y_1) appartiennent à $\rho(\Delta \times C)$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BELKHCHICHA, *Caractérisation des isomorphismes analytiques de certains domaines bornés*. C. R. Acad. Sc. Paris, s. I, Math., 313, 1991, 281-284.

[2] L. BELKHCHICHA, *Caractérisation des isomorphismes analytiques sur la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour une norme*. Math. Z., 215, 1994, 129-141.

[3] H. CARTAN, *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes: l'itérations des transformations intérieures d'un domaine borné*. Math. Z., 35, 1932, 760-773.

[4] H. CARTAN, *Sur les rétractions d'une variété*. C.R. Acad. Sc. Paris, s. I, Math., 303, 1986, 715-716.

[5] S. DINEEN, *The Schwarz Lemma*. Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford 1989.

[6] S. DINEEN, *Convexity in complex analysis*. In: P. JAKOBCZAK - W. PLEASNIAK (eds.), *Topics in complex analysis.* Banach Center Publications, 31, Warszawa 1995, 151-162.

[7] D. EISENMAN, *Intrinsic measures on complex manifolds*. Memoirs Amer. Math. Soc., 96, 1970.

[8] T. FRANZONI - E. VESENTINI, *Holomorphic maps and invariant distances*. Math. Studies, 40, North-Holland, Amsterdam-New York 1980.

[9] G. Gentili, *On non-uniqueness of complex geodesics in convex bounded domains*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, v. 79, 1985, 90-97.
[10] G. Gentili, *On complex geodesics of balanced convex domains*. Ann. Mat. Pura et Appl., 144, 1986, 113-130.
[11] L. Harris, *Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces*. In: J. A. Barroso (ed.), *Advances in Holomorphy*. Proceedings of the Seminario de Holomorfia (Rio de Janeiro, 26-28 September 1977). Math. Studies, 34, North-Holland, Amsterdam-New York 1979, 345-406.
[12] L. Heath - T. Suffridge, *Holomorphic retracts in complex n-space*. Illinois J. Math., 25, 1981, 125-135.
[13] M. Jarnicki - P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis*. De Gruyter Expositions in Mathematics, 9, Walter de Gruyter, Berlin-New York 1993.
[14] P. Kiernan, *On the relations between taut, tight and hyperbolic manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc., 76, 1970, 49-51.
[15] S. Kobayashi, *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*. Bull. Amer. Math. Soc., 82, 1976, 357-416.
[16] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*. Bull. Soc. Math. Fr., 109, 1981, 427-474.
[17] L. Lempert, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*. Anal. Math., 8, 1982, 257-261.
[18] H. Royden - P. Wong, *Carathéodory and Kobayashi metrics on convex domains*. Preprint 1983.
[19] E. Thorp - R. Whitley, *The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space*. Proc. Amer. Math. Soc., 18, 1967, 640-646.
[20] E. Vesentini, *Complex geodesics*. Compositio Math., 44, 1981, 375-394.
[21] E. Vesentini, *Complex geodesics and holomorphic mappings*. Symposia Math., 26, 1982, 211-230.
[22] E. Vesentini, *Invariant distances and invariant differential metrics in locally convex spaces*. In: W. Zelazko (ed.), *Spectral Theory.* Banach Center Publications, 8, Warszawa 1982, 493-512.
[23] J.-P. Vigué, *Sur les points fixes d'applications holomorphes*. C. R. Acad. Sc. Paris, I, Math., 303, 1986, 927-930.
[24] H. Wu, *Normal families of holomorphic mappings*. Acta Math., 119, 1967, 194-233.

Pervenuta il 19 settembre 1997,
in forma definitiva il 12 novembre 1997.

UPRES A 6086 «Groupes de Lie et Géométrie» Mathématiques
Université de Poitiers
40, Avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers Cedex (Francia)
vigue@mathrs.univ-poitiers.fr