Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Giorgio Ferrarese, Rita Antonelli

Sui fondamenti dell'ottica relativistica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **13** (2002), n.1, p. 55–67.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_2002_9_13_1_55_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 2002.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 13:55-67 (2002)

Teorie relativistiche. — *Sui fondamenti dell'ottica relativistica.* Nota (*) di Giorgio Ferrarese e Rita Antonelli, presentata dal Socio T. Ruggeri.

Abstract. — *On the relativistic optics.* We derive the main properties of a *relativistic null congruence* (light flux) by means of *real non-holonomic techniques* [2, 3]: absolute and relative geometric-kinematic characteristics, Sachs theorem [6] and light tapes (evolution equations and shadows). Special cases (relative stationariness, fluid Γ parallel transported by light and geodesic flux) and, finally, the optical parameters are also given.

Key words: General relativity; Optics; Characteristic tensors.

Riassunto. — Il lavoro deduce, in ambito relativistico, le proprietà fondamentali di un flusso luminoso (congruenza nulla) mediante tecniche anolonome reali [2, 3] e precisamente: caratteristiche geometrico-cinematiche del flusso (assolute e relative), teorema di Sachs [6] e proprietà dei nastri luminosi, con particolare riguardo ai parametri ottici e di deformazione, in spazi-tempo particolari (stazionarietà relativa, flussi geodetici, riferimenti trasportati per parallelismo dalla luce).

1. Introduzione

Anche questo lavoro, come già [1], costituisce una applicazione del *metodo generale* [2, 3] (basato sulle tecniche anolonome), finalizzato allo studio dei *riferimenti isotropi di tipo polare* in Relatività generale; vale a dire costituiti da una *bicongruenza* $(\Gamma, \widehat{\Gamma})$ di cui una delle componenti è nulla. Si tratta di un metodo geometrico che, pur con gli stessi obiettivi, è essenzialmente diverso da quello delle *tetradi nulle di Newmann-Penrose* [4] il quale, oltre ad essere di tipo complesso, non introduce grandezze tensoriali, né geometricamente significative. Per contro, in [2, 3] si adotta una struttura costituita da una *bicongruenza avente un ramo nullo,* definita da due campi vettoriali: $\boldsymbol{\gamma}$ e $\boldsymbol{\eta}$, rispettivamente del genere tempo e luce:

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = -1\,, \qquad \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta} = 0.$$

La struttura geometrica dei riferimenti isotropi *cambia notevolmente* rispetto ai riferimenti generalizzati [5] (costituiti da due congruenze temporali), in quanto, *per una curva nulla, l'iperpiano normale è di tipo parabolico*, cioè a *metrica singolare.*

In ogni caso, al di là delle sue caratteristiche anomale, un riferimento isotropo consente di esaminare, in tutti i suoi dettagli, un aspetto rilevante per tutta la Fisica matematica e cioè la *geometria einsteiniana connessa alla propagazione della luce* (fascio continuo); ciò che presuppone, nello spazio-tempo, una *ben determinata congruenza nulla.* Di qui il collegamento con i *riferimenti isotropi* e i suoi contenuti fondamentali, in relazione alla distribuzione anolonoma adottata: *quadro strumentale* (derivate covarianti e coefficienti di rotazione di Ricci) e *caratteristiche del 1° ordine* (curvatura, rotazione e deformazione).

(*) Pervenuta in forma definitiva all'Accademia il 6 novembre 2001.

Più precisamente, in questo lavoro, il formalismo introdotto in [2, 3] viene applicato direttamente allo studio della *geometria di una congruenza nulla* $\widehat{\Gamma}$ (fascio luminoso), mettendo a fuoco, per questa, le *caratteristiche geometrico-cinematiche proprie e relative*, rispetto ad un riferimento tradizionale Γ; naturalmente si ritrova il *teorema di Sachs* [6] e si indaga sui *nastri luminosi* (evoluzione e ombre) e sui *casi speciali* (stazionarietà, fluido Γ parallelamente trasportato, caso geodetico, ecc.), per finire con i *parametri ottici*. Si tratta di un punto di vista diverso da quello adottato da Castagnino [7], basato essenzialmente sui proiettori e non su un approccio sistematico di derivazione e formule esplicite.

2. Caratteristiche geometrico-cinematiche di un fascio luminoso

Come già detto in § 1, il metodo introdotto in [2, 3], di tipo anolonomo, consente di ritrovare, nel contesto generale dei sistemi continui, le *caratteristiche dei fasci luminosi e le loro proprietà del 1° ordine* [6-9]; naturalmente faremo capo sistematicamente ai lavori citati. Si tratta di esaminare il contenuto del gradiente di $\boldsymbol{\eta}$; in termini di cobase, essendo $\boldsymbol{\eta} = -\widehat{\mathbf{e}}^0$, si ha la decomposizione:

$$\widehat{\partial}_\alpha \boldsymbol{\eta} = \widehat{\mathcal{R}}_{\alpha\beta}{}^0 \widehat{\mathbf{e}}^\beta = -\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha 0}{}^0 \boldsymbol{\eta} + \widehat{\mathcal{R}}_{\alpha i}{}^0 \widehat{\mathbf{e}}^i \,, \tag{1}$$

fatta salva la condizione $\widehat{\partial}_\alpha \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$, che conferma le limitazioni di cui alle $(67)_{\mathrm{I}}$ e $(73)_{\mathrm{I}}$ [1]:

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha i}{}^0 \widehat{\gamma}^i = 0. \tag{2}$$

La (1) dà luogo rispettivamente, per $\alpha = 0\,, i$, alla *derivata longitudinale* e al *gradiente trasverso* di $\boldsymbol{\eta}$:

$$\partial \boldsymbol{\eta} = -\widehat{\mathcal{R}}_{00}{}^0 \boldsymbol{\eta} + \widehat{\mathcal{R}}_{0i}{}^0 \widehat{\mathbf{e}}^i \,, \qquad \widehat{\partial}_i \boldsymbol{\eta} = -\widehat{\mathcal{R}}_{i0}{}^0 \boldsymbol{\eta} + \mathcal{R}_{ik} \widehat{\mathbf{e}}^k \,, \tag{3}$$

da cui i *prodotti caratteristici*:

$$\widehat{\partial}_i \boldsymbol{\eta} \cdot \widehat{\mathbf{e}}_k = \mathcal{R}_{ik} \,. \tag{4}$$

Tali prodotti, *indipendenti da* Γ, danno luogo rispettivamente alla *velocità angolare* ($\widehat{\omega}_{ik}$) e di *deformazione* ($\widehat{k}_{ik}$) *proprie del flusso luminoso*, precisando così il *significato cinematico* dei coefficienti $\mathcal{R}_{ik}$:

$$\widehat{\omega}_{ik} = \mathcal{R}_{[ik]} \,, \qquad \widehat{k}_{ik} = \mathcal{R}_{(ik)} \,. \tag{5}$$

In termini espliciti, tenuto conto delle $(51)_{\mathrm{I}}$ e $(52)_{\mathrm{I}}$, nonché dell'espressione dei coefficienti di $\mathcal{R}_{ik}$:

$$\mathcal{R}_{ik} = H_{ik} - \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k \,, \tag{6}$$

si hanno i *legami generali*:

$$\widehat{\omega}_{ik} = \Omega_{ik} \,, \qquad \widehat{k}_{ik} = K_{ik} - C_{(i} \widehat{\gamma}_{k)} - \widetilde{\nabla}_{(i} \widehat{\gamma}_{k)} \tag{7}$$

(1) L'indice I si riferisce al lavoro [3].

ove, come dalle $(29)_{\mathrm{I}}$ e $(32)_{\mathrm{I}}$:

$$(8)\qquad \begin{cases} \Omega_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_i^a \delta_k^b \widehat{\Omega}_{ab} + \delta_{[i}^1 \delta_{k]}^a B_a ; \ \widehat{\Omega}_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0 \widehat{\partial}_{[a} \mathcal{U}_{b]} \, , \ B_a \stackrel{\text{def}}{=} \eta_\alpha \widehat{\partial}_a \eta^\alpha + \gamma_0 \widehat{\partial}_1 \mathcal{U}_a \, , \\ K_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{2} \widetilde{\partial} \gamma_{ik} \, , \ \Gamma_i^{\ j} \stackrel{\text{def}}{=} -\delta_i^1 A^j \, , \ A^j \stackrel{\text{def}}{=} -\eta^1 \partial \left(-\dfrac{1}{\eta^1} \delta_1^j + \dfrac{\eta^a}{\eta^1} \delta_a^j \right) \, , \ \mathcal{U}_a \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\eta_a}{\eta_0} \, , \end{cases}$$

la derivata $\widetilde{\partial}$ essendo costruita con la *derivazione longitudinale* $\partial = \gamma^0 \partial_0$ e la *connessione doppia* $\Gamma_i^{\ k}$. Naturalmente, dato il *significato intrinseco* di $\widehat{\omega}_{ik}$ e $\widehat{k}_{ik}$ (per $\widehat{\Gamma}$), *le espressioni* (7) *sono formalmente invarianti rispetto alla scelta della congruenza di sostegno* Γ.

In ogni caso, *l'operatore* $\widehat{\partial}_1$ *coincide* (a meno del fattore c) *con la derivata rispetto al tempo relativo* T di Cattaneo [10] di cui alla $(83)_{\mathrm{I}}$; si ha cioè, ammesso (senza restrizione) $\eta^\alpha = \frac{dy^\alpha}{dT}$: $\widehat{\partial}_1 = \frac{d}{dT}$. Pertanto, se $i = 1$, la $(3)_2$ si scrive:

$$(9)\qquad \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dT} = \widehat{\gamma}^{\,i} \left(\widehat{\mathcal{R}}_{i0}^{\ \ 0} \boldsymbol{\eta} + \mathcal{R}_{ik} \widehat{\mathbf{e}}^k \right) \, , \qquad \left(\widehat{\gamma}^{\,i} = -\delta_1^i \right) \, ,$$

e dà luogo all'*equazione differenziale della congruenza* $\widehat{\Gamma}$; a sua volta la $(75)_{\mathrm{I}}$ si traduce nei *legami generali*:

$$(10)\qquad 2\widehat{\gamma}^i \widehat{\omega}_{ik} = \widehat{\gamma}^i \mathcal{R}_{ik} \sim \widehat{\gamma}^i \widehat{\omega}_{ik} = \widehat{\gamma}^i \widehat{k}_{ik} \, ,$$

tipici delle congruenze nulle.

La (9) mette bene in evidenza che il *fascio luminoso* $\widehat{\Gamma}$ *è geodetico se e solo se risulta* $\widehat{\gamma}^i \mathcal{R}_{ik} = 0$; ciò che equivale, in virtù della (10), alle condizioni:

$$(11)\qquad \widehat{\gamma}^{\,i} \widehat{\omega}_{ik} = 0 \sim \widehat{\gamma}^i \widehat{k}_{ik} = 0 \, .$$

Di qui la seguente *proprietà generale: ogni congruenza geodetica nulla è parzialmente rigida e irrotazionale*: $\widehat{\omega}_{1k} = 0$, $\widehat{k}_{1k} = 0$.

D'altra parte, le $(7)_1$ e $(8)_1$ riducono la (11) alla *condizione* $B_a = 0$; mentre dalla $(10)_2$, saturando con $\widehat{\gamma}^{\,k}$ e ricordando le $(5)_2$, (6) e $(69)_{\mathrm{I}}$, si ottiene, per il coefficiente A, l'*espressione generale*:

$$(12)\qquad A = -\widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}^k \, \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k \equiv - \widetilde{\nabla}_1 \widehat{\gamma}_1 \, .$$

Ciò premesso, è agevole riconoscere che:

a) *il parametro scelto* T *non ha generalmente carattere affine.* Infatti, se $\widehat{\Gamma}$ è geodetica, perché T sia affine, occorre (e basta) che sia nullo il coefficiente di $\boldsymbol{\eta}$ nella (9): $\widehat{\gamma}^i \widehat{\mathcal{R}}_{i0}^{\ \ 0} = 0$, ovvero, in base alla $(80)_{\mathrm{I}}$: $A = 0$ (condizione indipendente da $B_a = 0$).

b) *ogni fascio* $\widehat{\Gamma}$ *normale* (cioè del tipo $\widehat{\omega}_{ik} = 0$) soddisfa la condizione (11), e pertanto *è necessariamente geodetico* [6]; naturalmente non vale il viceversa.

Si noti infine che l'ultimo vettore di cui alla (9):

$$(13)\qquad \widehat{\mathbf{C}} \stackrel{\text{def}}{=} -\widehat{\gamma}^i \mathcal{R}_{ik} \widehat{\mathbf{e}}^k = B_a \widehat{\mathbf{e}}^a \sim \widehat{C}_k = \delta_k^a B_a \, ,$$

può interpretarsi come «*vettore di curvatura*» delle curve $\widehat{\Gamma}$: la *condizione* $\widehat{\mathbf{C}} = 0$ caratterizza infatti le *geodetiche nulle.*

Così, mentre il coefficiente A ha, nella (9), il significato di *fattore di parallelismo*, il vettore $\widehat{\mathbf{C}} = B_a \widehat{\mathbf{e}}^a$ rappresenta la «*curvatura geodetica*»; naturalmente $\widehat{\mathbf{C}}$ *è normale a* $\boldsymbol{\eta}$ *ma* (a differenza di quanto accade per le curve non nulle) *non è indipendente dalla velocità* $\widehat{\omega}_{ik}$, *né dalla velocità di deformazione* $\widehat{k}_{ik}$:

$$\widehat{C}_k = -2\widehat{\gamma}^i\widehat{\omega}_{ik} = -2\widehat{\gamma}^i\widehat{k}_{ik}\,. \tag{14}$$

3. Nastro luminoso e sua evoluzione

Consideriamo ora un *problema classico di evoluzione* connesso alla congruenza $\widehat{\Gamma}$, tipico dei sistemi continui; siano:

$$x^\alpha = x^\alpha\left(y\right) \tag{15}$$

le *equazioni parametriche della congruenza* $\widehat{\Gamma}$ e $\delta E \equiv (\delta x^\alpha)$ un vettore di $\mathcal{V}_4$ che congiunga due linee di $\widehat{\Gamma}$ «infinitamente vicine», corrispondenti ai parametri y^α e $y^\alpha + \delta y^\alpha$; si ha così un *nastro luminoso.* Dalla (15) segue l'*equazione del nastro*:

$$\delta x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\delta y^\beta\,, \tag{16}$$

con l'intesa che gli *incrementi dei parametri siano costanti prefissate*: $\delta y^\alpha = \text{cost.}$

Derivando rispetto al tempo relativo standard T, si ha di qui l'*equazione di evoluzione di un nastro luminoso* [6]:

$$\frac{D}{dT}(\delta x^\alpha) = \nabla_\beta \eta^\alpha \delta x^\beta. \tag{17}$$

In termini vettoriali, possiamo considerare sia l'*espressione olonoma*: $\dot{\delta E} = \partial_\alpha \boldsymbol{\eta}\delta x^\alpha$ (il punto indica derivazione rispetto a T), sia la *forma anolonoma*: $\dot{\delta E} = \widehat{\partial}_\alpha \boldsymbol{\eta}\delta x^{\widehat{\alpha}}$ ($\delta x^{\widehat{\alpha}} =$ $= \delta E \cdot \widehat{\mathbf{e}}^\alpha$) ovvero, in virtù della (1):

$$\dot{\delta E} = \delta x^{\widehat{\alpha}}\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha\beta}{}^0\widehat{\mathbf{e}}^\beta. \tag{18}$$

La (18) traduce direttamente la *decomposizione relativa* (cioè obliqua: secondo $\boldsymbol{\eta}$ e Σ) *del derivato temporale del vettore* δE che *caratterizza il nastro luminoso*; una formula analoga vale, in particolare, per la proiezione spaziale di δE (*ombra del nastro su* Σ):

$$\delta E_\Sigma = \delta x_{\widehat{i}}\widehat{\mathbf{e}}^i. \tag{19}$$

Più precisamente, dalla decomposizione relativa di δE : $\delta E = \delta E_\Sigma + \delta E_\eta$, essendo $\delta E_\eta = -\delta E\cdot\boldsymbol{\gamma}\eta \equiv -\delta x_{\widehat{0}}\boldsymbol{\eta}$, $(\boldsymbol{\gamma}\cdot\eta = -1)$, per derivazione si ottiene, in virtù della (9):

$$\delta \dot{E}_\eta = -\left(\dot{\delta E}\cdot\boldsymbol{\gamma} + \delta E\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}\right) + \delta E\cdot\boldsymbol{\gamma}\widehat{\gamma}^i\widehat{\mathcal{R}}_{i\alpha}{}^0\widehat{\mathbf{e}}^\alpha; \tag{20}$$

di qui, tenendo conto che $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \widehat{\partial}_1\widehat{\mathbf{e}}_0$, segue la decomposizione del derivato $\delta\dot{E}_\Sigma$:

$$\delta\dot{E}_\Sigma = \delta x^{\widehat{\alpha}}\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha i}{}^0\widehat{\mathbf{e}}^i + \delta x_{\widehat{\alpha}}\widehat{\mathcal{R}}_{10}{}^\alpha\boldsymbol{\eta} - \delta x_{\widehat{0}}\widehat{\gamma}^i\widehat{\mathcal{R}}_{i\alpha}{}^0\widehat{\mathbf{e}}^\alpha.$$

D'altra parte, il terzo termine è nullo, in quanto il *sistema* (18) *ammette gli integrali primi*:

$$\widehat{\mathcal{R}}_{1\beta}{}^\alpha\delta x_{\widehat{\alpha}} = 0 \sim \widehat{\partial}_1\widehat{\mathbf{e}}_\beta\cdot\delta E = 0\,, \tag{21}$$

come si riconosce sviluppando il prodotto $\widehat{\partial}_1 \widehat{\mathbf{e}}_\beta \cdot \delta E$ utilizzando la (18); pertanto la precedente dà luogo alla *formula generale*:

$$\delta \dot{E}_\Sigma = \delta x^{\widehat{\alpha}} \widehat{\mathcal{R}}_{\alpha i}{}^0 \widehat{\mathbf{e}}^i - \delta x_{\widehat{0}} \widehat{\gamma}^i \widehat{\mathcal{R}}_{i\alpha}{}^0 \widehat{\mathbf{e}}^\alpha \,, \tag{22}$$

ove compaiono entrambe le componenti: secondo Σ e $\boldsymbol{\eta}$. In particolare, per l'ombra del nastro luce (proiezione obliqua su Σ), vale la seguente *equazione di evoluzione*:

$$\delta \dot{E}_{\Sigma/\Sigma} = \left(\delta x^{\widehat{\alpha}} \widehat{\mathcal{R}}_{\alpha k}{}^0 - \delta x_{\widehat{0}} \widehat{\gamma}^i \widehat{\mathcal{R}}_{ik}{}^0 \right) \widehat{\mathbf{e}}^k. \tag{23}$$

Si noti che, a norma della (2), si deve intendere $\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha 1}{}^0 = 0$, sì che nell'equazione (23) c'è di fatto l'intervento dei soli vettori $\widehat{\mathbf{e}}^a \in \Sigma$. Pertanto vale la seguente *proprietà*: *qualunque sia il nastro luminoso, la sua ombra* (su Σ) *è sempre contenuta* (*in ogni punto di* Γ) *nel 2-piano* $\left(\widehat{\mathbf{e}}^a\right)$ (*schermo relativo*).

4. Ombra del nastro: deformazione e rotazione relative

L'equazione di evoluzione (23) può essere espressa anche in termini delle *sole componenti covarianti* $\delta x_{\widehat{i}}$, come già per l'ombra del nastro (19); si ha infatti: $\delta \dot{E}_{\Sigma/\Sigma} = (\delta x_{\widehat{0}} \widehat{\mathcal{R}}_{1k}{}^0 + \widehat{g}^{\alpha\beta} \delta x_{\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{R}}_{\alpha k}{}^0) \widehat{\mathbf{e}}^k$, da cui, tenuto conto della (21), la *forma compatta*:

$$\delta \dot{E}_{\Sigma/\Sigma} = \delta x_{\widehat{i}} \widetilde{H}^i{}_k \widehat{\mathbf{e}}^k \,, \tag{24}$$

avendo posto:

$$\widetilde{H}^i{}_k \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{g}^{\alpha i} \widehat{\mathcal{R}}_{\alpha k}{}^0 \sim \widetilde{H}_{ik} = \widehat{\gamma}_i \widehat{\mathcal{R}}_{0k}{}^0 + \mathcal{R}_{ik} \,. \tag{25}$$

Il *tensore spaziale* $\widetilde{H}_{ik}$ *riassume* (in senso relativo a Γ) *le due velocità*: *angolare e di deformazione della congruenza luminosa* $\widehat{\Gamma}$:

$$\widetilde{k}_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{H}_{(ik)} \,, \qquad \widetilde{\omega}_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{H}_{[ik]} \,. \tag{26}$$

Vale infatti la seguente *proprietà*: *CNES perché la congruenza* $\widehat{\Gamma}$ *sia rigida* (rispetto a Γ) *è che sia ovunque*:

$$\widetilde{k}_{ik} = 0 \,; \tag{27}$$

al tempo stesso, $\widetilde{\omega}_{ik}$ definisce (in Σ), mediante il tensore di Ricci spaziale $\widetilde{\eta}^{ijk}$ [9, p. 77], il *vettore velocità angolare* $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Sigma$:

$$\widetilde{\omega}^i = \frac{1}{2} \widetilde{\eta}^{ijk} \widetilde{\omega}_{jk} \sim \widetilde{\omega}_{jk} = \widetilde{\eta}_{jki} \widetilde{\omega}^i \,. \tag{28}$$

In altri termini, la (24) assume (in Σ) la *forma standard* di cui alla cinematica dei sistemi continui [13, p. 77]:

$$\delta \dot{E}_{\Sigma/\Sigma} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \times \delta E + \delta x_{\widehat{i}} \widetilde{k}^{ik} \widetilde{\mathbf{e}}_k \qquad (\widetilde{\mathbf{e}}_k = \gamma_{kj} \widehat{\mathbf{e}}^j) \,, \tag{29}$$

con il *termine di rotazione*: $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} \times \delta E$, e *quello di deformazione*.

Passiamo ora all'espressione del tensore $\widetilde{H}_{ik}$ di cui alla (25); in virtù delle $(64)_{\mathrm{I}}$ risulta:

$$\widetilde{H}_{ik} = \mathcal{R}_{ik} + \widehat{\gamma}_i \widetilde{C}_k \,, \tag{30}$$

ove $\widetilde{C}_k$ è suscettibile della duplice espressione:

$$\widetilde{C}_k \stackrel{\text{def}}{=} \sqsubset_k + H_{kj}\widehat{\gamma}^j \qquad \sim \qquad \widetilde{C}_k \stackrel{\text{def}}{=} \sqsubset_k + \widetilde{\nabla}_k \widehat{\gamma}_j \widehat{\gamma}^j \,, \qquad (\sqsubset_k = C_k - \widetilde{\partial}\widehat{\gamma}_k) \tag{31}$$

in quanto, in virtù della limitazione (2), per $\alpha = k$ vale l'identità:

$$\mathcal{R}_{kj}\widehat{\gamma}^j = 0 \qquad \sim \qquad H_{kj}\widehat{\gamma}^j = \widetilde{\nabla}_k \widehat{\gamma}_j \widehat{\gamma}^j \,. \tag{32}$$

La formula (30), ovvero esplicitamente:

$$\widetilde{k}_{ik} = \widehat{k}_{ik} + \widehat{\gamma}_{(i} \sqsubset_{k)} + \widehat{\gamma}^j \widehat{\gamma}_{(i} \widetilde{\nabla}_{k)} \widehat{\gamma}_j \,, \qquad \widetilde{\omega}_{ik} = \widehat{\omega}_{ik} + \widehat{\gamma}_{[i} \sqsubset_{k]} + \widehat{\gamma}^j \widehat{\gamma}_{[i} \widetilde{\nabla}_{k]} \widehat{\gamma}_j \,, \tag{33}$$

mette in evidenza, da una parte, il *carattere relativo* (a Γ) di $\widetilde{H}_{ik}$, per la presenza della curvatura C_k di Γ; dall'altra *stabilisce* (fissato il riferimento) *una corrispondenza biunivoca tra le caratteristiche* $\widetilde{k}_{ik}$ e $\widehat{k}_{ik}$, e *rispettivamente* $\widetilde{\omega}_{ik}$ e $\widehat{\omega}_{ik}$.

Il campo $\widetilde{C}_k$ dipende, in ogni caso, dalla curvatura di Γ, dal divario $\widehat{\gamma}_i$ e dalle sue derivate prime e tuttavia c'è un *secondo punto di vista*, che fa capo alle $(32)_1$; utilizzando le espressioni generali (7), questa diviene:

$$C_i + \widehat{\gamma}^k C_k \widehat{\gamma}_i = \left(2K_{ik} - \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k\right) \widehat{\gamma}^k + \widetilde{\Omega}_i \,,$$

avendo posto:

$$\widetilde{\Omega}_i \stackrel{\text{def}}{=} \left(2\Omega_{ik} - \widetilde{\nabla}_k \widehat{\gamma}_i\right) \widehat{\gamma}^k \,. \tag{34}$$

Pertanto, saturando con $\widehat{\gamma}^i$, si ha dapprima: $C_k\widehat{\gamma}^k = K + A$, con $K \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}^k K_{ik}$, e successivamente il vettore di curvatura C_i:

$$C_i = \left(2K_{ik} - \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k\right) \widehat{\gamma}^k + \widetilde{\Omega}_i - (K + A)\widehat{\gamma}_i \,. \tag{35}$$

Al tempo stesso, esplicitando il 2° membro della $(8)_4$, si ottengono le due formule generali:

$$2\widehat{\gamma}^k K_{ik} = -A^j \gamma_{ji} + \widetilde{\partial}\widehat{\gamma}_i \,, \qquad K = -A^j \widehat{\gamma}_j; \tag{36}$$

con ché il *campo* $\sqsubset_i = C_i - \widetilde{\partial}\widehat{\gamma}_i$ *si esprime in funzione dei termini di anolonomia* A, A^j e Ω_{ik} (*nonché del vettore* $\widehat{\gamma}_i$ e *derivate prime*):

$$\sqsubset_i = -A_i + \widetilde{\Omega}_i - \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k \widehat{\gamma}^k - (K + A)\widehat{\gamma}_i \,. \tag{37}$$

Ciò premesso, riprendiamo la $(31)_2$, ed eliminiamo il campo C_i mediante la (37); si ottiene la seguente espressione di $\widetilde{C}_k$:

$$\widetilde{C}_k = \widetilde{\Omega}_k - A_k - (K + A)\widehat{\gamma}_k \,, \tag{38}$$

la quale riduce la (33) alla forma seguente:

$$(39)\qquad \widetilde{k}_{ik} = \widehat{k}_{ik} + \widehat{\gamma}_{(i}\left(\widetilde{\Omega}_{k)} - A_{k)}\right) - (K + A)\,\widehat{\gamma}_i\widehat{\gamma}_k\,, \qquad \widetilde{\omega}_{ik} = \widehat{\omega}_{ik} + \widehat{\gamma}_{[i}\left(\widetilde{\Omega}_{k]} - A_{k]}\right)\,,$$

in funzione delle *caratteristiche assolute, del divario* $\widehat{\gamma}_i$ *e dei termini di anolonomia* A, A_i e Ω_{ik}.

5. Forma esplicita delle caratteristiche (assolute e relative)

Le espressioni (33) e (39) delle caratteristiche relative *possono essere tradotte in forma esplicita,* eliminando i tensori $\widehat{k}_{ik}$ e $\widehat{\omega}_{ik}$ attraverso la (7). Nel primo caso, si ha direttamente:

$$(40)\quad \widetilde{k}_{ik} = \frac{1}{2}\widetilde{\partial}\widehat{g}_{ik} - \mathcal{P}^j_{(i}\,\widetilde{\nabla}_{k)}\widehat{\gamma}_j\,, \qquad \widetilde{\omega}_{ik} = \Omega_{ik} + \widehat{\gamma}_{[i}\left(\sqsubset_{k]} + \widetilde{\nabla}_{k]}\widehat{\gamma}_j\widehat{\gamma}^j\right)\,, \qquad (\sqsubset_k = C_k - \widetilde{\partial}\widehat{\gamma}_k)\,,$$

avendo introdotto il *proiettore* (degenere):

$$(41)\qquad \mathcal{P}^j_i \overset{\text{def}}{=} \delta^j_i - \widehat{\gamma}_i\widehat{\gamma}^j\,.$$

Nel secondo caso, si elimina innanzitutto nella $(7)_2$ il vettore di curvatura, mediante la (37), con che risulta:

$$(42)\qquad \widehat{k}_{ik} = \frac{1}{2}\widetilde{\partial}\widehat{g}_{ik} + \left(A_{(i} - \widetilde{\Omega}_{(i}\right)\widehat{\gamma}_{k)} - \mathcal{P}^j_{(i}\,\widetilde{\nabla}_{k)}\widehat{\gamma}_j + (K + A)\,\widehat{\gamma}_i\widehat{\gamma}_k\,, \qquad \widehat{\omega}_{ik} = \Omega_{ik}\,,$$

espressioni che possono essere *tradotte in termini dei potenziali gravitazionali* η_α, η^i e $\widehat{\gamma}_a$; dopo di che si ottiene la seguente *forma esplicita*:

$$(43)\qquad \widetilde{k}_{ik} = \frac{1}{2}\widetilde{\partial}\widehat{g}_{ik} - \mathcal{P}^j_{(i}\,\widetilde{\nabla}_{k)}\widehat{\gamma}_j\,, \qquad \widetilde{\omega}_{ik} = \Omega_{ik} - \widehat{\gamma}_{[i}\left(A_{k]} - \widetilde{\Omega}_{k]}\right)\,.$$

Dal confronto con la (40) risulta che la *velocità di deformazione* $\widetilde{k}_{ik}$ *assume la medesima forma, in funzione di* K_{ik}, $\widehat{\gamma}_i$ *e derivate prime*; *invece la velocità angolare* $\widetilde{\omega}_{ik}$ *si esprime diversamente*, cioè da una parte è funzione di Ω_{ik} e $\sqsubset_i$, e dall'altra di Ω_{ik} e A_i, (oltre a $\widehat{\gamma}_i$ e derivate prime).

Per quanto riguarda la *forma contravariante*:

$$(44)\qquad \widetilde{H}^{ik} = \mathcal{R}^{ik} - \delta^i_1\,\widetilde{C}^k\,,$$

si deve intendere, come dalla (32), $\widehat{\gamma}_k\mathcal{R}^{ik} = 0$, cioè:

$$(45)\qquad \mathcal{R}^{i1} = \widehat{\gamma}_a\mathcal{R}^{ia};$$

pertanto le *caratteristiche assolute* sono subordinate alle *tre condizioni*:

$$(46)\qquad \widehat{k}^{11} = 2\widehat{\gamma}_a\widehat{k}^{1a} - \widehat{\gamma}_a\widehat{\gamma}_b\widehat{k}^{ab}\,, \qquad \widehat{\omega}^{1a} = \widehat{k}^{1a} - \widehat{\gamma}_b\left(\widehat{k}^{ab} + \widehat{\omega}^{ab}\right)\,,$$

ferma restando la (42); la (46) mette in evidenza che la *velocità angolare* $\widehat{\omega}^{ik}$ *ha, come componenti libere, la sola* $\widehat{\omega}^{23}$, laddove, *per la velocità di deformazione, è vincolata soltanto la componente* $\widehat{k}^{11}$.

Analogamente, per quanto riguarda le *caratteristiche relative*, la (43) si traduce in due gruppi di condizioni, *l'uno costituito dalle componenti libere*:

$$\widetilde{k}^{1a} = \widehat{k}^{1a} - \frac{1}{2}\widetilde{C}^{a}, \quad \widetilde{k}^{ab} = \widehat{k}^{ab}, \quad \widetilde{\omega}^{ab} = \widehat{\omega}^{ab}, \tag{47}$$

e *l'altro da quelle vincolate*:

$$\widetilde{k}^{11} = \widehat{k}^{11} - \widetilde{C}^{1}, \quad \widetilde{\omega}^{1a} = \widehat{\omega}^{1a} - \frac{1}{2}\widetilde{C}^{a}, \tag{48}$$

ove, per le componenti $\widetilde{C}^{k}$, vale l'alternativa (31) ovvero (38). Naturalmente agli stessi risultati si perviene utilizzando direttamente le espressioni (40) e (43).

6. Caratteristiche alternative del flusso luminoso

Nell'ambito di un riferimento isotropo, ogni campo vettoriale $\mathbf{v}(E)$ è suscettibile delle due decomposizioni:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\Sigma} - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\eta} \qquad \sim \qquad \mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}, \tag{49}$$

essendo $\mathbf{v}_{\Sigma}$ la *proiezione obliqua* su Σ e $\widetilde{\mathbf{v}}$ la *proiezione ortogonale*. Dal confronto, segue il legame tra le due proiezioni:

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{\Sigma} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\gamma}\mathbf{d}, \qquad \mathbf{d} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\eta} \equiv \widehat{\gamma}_{i}\widehat{\mathbf{e}}^{i}. \tag{50}$$

Ciò premesso, riprendiamo la (22); la proiezione ortogonale su Σ : $\delta\dot{E}_{\Sigma/\widetilde{\Sigma}}$, in virtù delle (50) e (24), è della forma:

$$\delta\dot{E}_{\Sigma/\widetilde{\Sigma}} = \delta x_{\widehat{i}}\widetilde{\widetilde{H}}{}^{i}{}_{k}\widehat{\mathbf{e}}^{k}, \tag{51}$$

avendo posto, in termini covarianti, $\widetilde{\widetilde{H}}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \gamma_{ij}\widetilde{\widetilde{H}}{}^{j}_{k}$:

$$\widetilde{\widetilde{H}}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{H}_{ik} + \widehat{\gamma}^{j}H_{ji}\widehat{\gamma}_{k}, \qquad H_{ji} = \mathcal{R}_{ji} + \widetilde{\nabla}_{j}\widehat{\gamma}_{i}. \tag{52}$$

Il tensore $\widetilde{\widetilde{H}}_{ik}$ *riassume* (per $\widehat{\Gamma}$) *le ordinarie caratteristiche di deformazione-rotazione* r_{ik} e θ_{ik} [7], alternative alle (26):

$$r_{ik} = \widetilde{\widetilde{H}}_{(ik)}, \qquad \theta_{ik} = \widetilde{\widetilde{H}}_{[ik]}. \tag{53}$$

Infatti, tenuto conto dell'identità $\mathcal{R}_{ji} = \mathcal{R}_{ij} + 2\mathcal{R}_{[ji]}$, della $(31)_1$, nonché del legame $\omega_{ji} = \Omega_{ji} + \widetilde{\nabla}_{[j}\widehat{\gamma}_{i]}$, la (52) non differisce da:

$$\widetilde{\widetilde{H}}_{ik} = \widetilde{H}_{ik} - \widetilde{\Omega}_{i}\widehat{\gamma}_{k}, \tag{54}$$

ove $\widetilde{H}_{ik}$ e $\widetilde{\Omega}_{i}$ hanno il significato di cui alle (30) e (34); pertanto la (53) si traduce nei seguenti legami, conformi alle caratteristiche ordinarie:

$$r_{ik} = \widehat{k}_{ik} + \left(\sqsubset_{(i} - \widetilde{\Omega}_{(i}\right)\widehat{\gamma}_{k)} + \widehat{\gamma}^{j}\widehat{\gamma}_{(i}\widetilde{\nabla}_{k)}\widehat{\gamma}_{j}, \quad \theta_{ik} = \widehat{\omega}_{ik} - \left(\sqsubset_{[i} + \widetilde{\Omega}_{[i}\right)\widehat{\gamma}_{k]} + \widehat{\gamma}^{j}\widehat{\gamma}_{[i}\widetilde{\nabla}_{k]}\widehat{\gamma}_{j}. \tag{55}$$

Tali caratteristiche sono espresse in funzione di quelle assolute $\widehat{k}_{ik}$ e $\widehat{\omega}_{ik}$, con l'intervento degli *ingredienti relativi* $\sqsubset_{i}, \Omega_{ik}, \widehat{\gamma}_{i}$ e derivate prime. Analogamente alla (33), la (55) può porsi in relazione diretta con le caratteristiche globali k_{ik} e ω_{ik} del riferimento; da questo punto di vista, essendo $\mathcal{R}_{ik} = H_{ik} - \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k$, si ha direttamente:

$$(56)\quad r_{ik} = k_{ik} + \left(\sqsubset_{(i} - \widetilde{\Omega}_{(i}\right)\widehat{\gamma}_{k)} - \mathcal{P}^j_{(i}\widetilde{\nabla}_{k)}\widehat{\gamma}_j\,, \quad \theta_{ik} = \omega_{ik} - \left(\sqsubset_{[i} + \widetilde{\Omega}_{[i}\right)\widehat{\gamma}_{k]} - \mathcal{P}^j_{[i}\widetilde{\nabla}_{k]}\widehat{\gamma}_j\,.$$

Una ulteriore espressione delle caratteristiche ordinarie si ottiene eliminando dalla (54) il vettore di curvatura, mediante la (37); la (54) assume così la *forma ridotta*:

$$(57)\qquad \widetilde{\widetilde{H}}_{ik} = \mathcal{R}_{ik} - \widehat{\gamma}_i A_k + 2\widehat{\gamma}_{[i}\widetilde{\Omega}_{k]} - (K + A)\widehat{\gamma}_i\widehat{\gamma}_k\,,$$

da cui la seguente espressione delle *caratteristiche ordinarie*:

$$(58)\quad r_{ik} = k_{ik} - \widetilde{\nabla}_{(i}\widehat{\gamma}_{k)} - \widehat{\gamma}_{(i}A_{k)} - (K + A)\widehat{\gamma}_i\widehat{\gamma}_k\,, \quad \theta_{ik} = \omega_{ik} - \widetilde{\nabla}_{[i}\widehat{\gamma}_{k]} - \widehat{\gamma}_{[i}\left(A_{k]} - 2\,\widetilde{\Omega}_{k]}\right).$$

A differenza della (56), *non c'è più traccia di* $\sqsubset_i$ *e il campo* $\widetilde{\Omega}_i$ *interviene solo nella velocità angolare*.

Per completezza, riportiamo anche le caratteristiche r_{ik} e θ_{ik} in termini di K_{ik} e Ω_{ik}, a norma dei legami generali: $k_{ik} = K_{ik} - C_{(i}\widehat{\gamma}_{k)}$ e $\omega_{ik} = \Omega_{ik} + \widehat{\nabla}_{[i}\widehat{\gamma}_{k]}$. Si tratta di tener conto, ancora una volta, della (37), la quale trasforma la (56) nel seguente modo:

$$(59)\qquad r_{ik} = \frac{1}{2}\widetilde{\partial}\widehat{g}_{ik} - \widetilde{\Omega}_{(i}\widehat{\gamma}_{k)} - \mathcal{P}^j_{(k}\widetilde{\nabla}_{i)}\widehat{\gamma}_j\,, \quad \theta_{ik} = \Omega_{ik} - \widehat{\gamma}_{[i}\left(A_{k]} - 2\,\widetilde{\Omega}_{k]}\right);$$

si noti, in entrambe le equazioni, *la presenza del vortice* Ω_{ik} (attraverso il campo $\widetilde{\Omega}_i$), a differenza di quanto avviene per le caratteristiche (43).

Un terzo punto di vista, per quanto riguarda le caratteristiche relative del flusso $\widehat{\Gamma}$, fa capo alla *proiezione doppiamente ortogonale*: $\delta\dot{E}_{\widetilde{\Sigma}/\widetilde{\Sigma}}$; si tratta di considerare, a partire dalla decomposizione $\delta E = \delta E_{\widetilde{\Sigma}} + \delta E_{\boldsymbol{\gamma}}$, con $\delta E_{\boldsymbol{\gamma}} = -\delta E \cdot \boldsymbol{\gamma\gamma}$, e dalla (18), il derivato $\delta\dot{E}_{\widetilde{\Sigma}}$, nonché la sua proiezione ortogonale a $\boldsymbol{\gamma}$. Ci limitiamo ad indicarlo, senza sviluppare i dettagli, per altro analoghi ai precedenti.

7. Stazionarietà relativa di una congruenza nulla

Introdurremo ora, per $\widehat{\Gamma}$, la nozione di *stazionarietà relativa* (a Γ) ricordando, innanzitutto che, per una congruenza nulla, esistono *due tipi di stazionarietà*, a seconda dell'ambiente in cui la proprietà stessa viene formulata; le due proposte coincidono solo nel caso in cui la congruenza di appoggio Γ sia un fluido liberamente gravitante, cioè geodetico: $C_i = 0$.

a) $\widehat{\Gamma}$ *si dice stazionaria di 1ª specie in* $\mathcal{V}_4$, (rispetto alla congruenza Γ) *se, per ogni linea di* Γ, *il campo* $\boldsymbol{\eta}$ *costituisce un trasporto parallelo*:

$$(60)\qquad \partial\boldsymbol{\eta} = k\,\boldsymbol{\eta}\,.$$

Il *fattore* k *coincide con la componente* (anolonoma) di indice uno *del vettore di curvatura di* Γ:

$$(61)\qquad k = C_1 = -\widehat{\gamma}^i C_i\,.$$

D'altra parte, a norma della $(3)_1$, la (60) equivale alle due condizioni:

$$k = -\widehat{\mathcal{R}}_{00}{}^{0}, \qquad \widehat{\mathcal{R}}_{0i}{}^{0} = 0;$$

la prima coincide con la (61), mentre la seconda si traduce nella relazione esplicita:

$$\sqsubset_i + H_{ik}\widehat{\gamma}^{k} = 0 \sim \sqsubset_i = -\widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k \widehat{\gamma}^{k}, \tag{62}$$

la quale si riflette direttamente sulla (31) [e quindi sulla (30)], in quanto equivale alla condizione che il *campo* $\widetilde{C}_k$ *sia nullo*:

$$\widetilde{C}_k = 0 \sim \widetilde{H}_{ik} = \mathcal{R}_{ik}. \tag{63}$$

Pertanto: *le caratteristiche assolute di* $\widehat{\Gamma}$ *e quelle relative coincidono*. Si tratta di una *proprietà invariantiva*, nell'ambito dei riferimenti di stazionarietà per $\widehat{\Gamma}$.

Analogamente, per quanto riguarda le caratteristiche ordinarie, la (54) assume la *forma ridotta*:

$$\widetilde{\widetilde{H}}_{ik} = \mathcal{R}_{ik} - \widetilde{\Omega}_i \widehat{\gamma}_k. \tag{64}$$

b) Stazionarietà di 2ª specie. In questo caso *è stazionaria la direzione apparente del raggio* in Σ, definita dal vettore $\widetilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}$ ovvero, con la notazione $(50)_2$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{d}; \tag{65}$$

insomma, la condizione (60) è sostituita da:

$$\partial \widetilde{\boldsymbol{\eta}} = k\widetilde{\boldsymbol{\eta}} \sim \partial \mathbf{d} = k\mathbf{d}, \qquad \mathbf{d} = \widehat{\gamma}_i \widehat{\mathbf{e}}^{i}. \tag{66}$$

In termini espliciti, tenuto conto dell'espressione di $\mathbf{d}$, la $(66)_2$ diventa:

$$\left(\partial\widehat{\gamma}_i - k\widehat{\gamma}_i - \widehat{\gamma}_k \widehat{\mathcal{R}}_{0i}{}^{k}\right)\widehat{\mathbf{e}}^{i} = -\widehat{\gamma}_i \widehat{\mathcal{R}}_{00}{}^{i}\boldsymbol{\eta},$$

ed equivale, in virtù delle $(64)_{\mathrm{I}}$, alle due seguenti limitazioni:

$$C_i - \sqsubset_i - k\widehat{\gamma}_i - H_i{}^{k}\widehat{\gamma}_k = 0, \quad C_i \widehat{\gamma}^{i} = 0. \tag{67}$$

Di qui, saturando con $\widehat{\gamma}^{i}$ e tenendo conto della $(69)_{\mathrm{I}}$, nonché della (62): $\sqsubset_1 = -A$, si riconosce che *il fattore* k *è nullo*: $k = 0$, sì che la (67) equivale *alla sola condizione*:

$$C_i = \sqsubset_i + H_{ik}\widehat{\gamma}^{k} \sim \widetilde{\partial}\widehat{\gamma}_i = H_{ik}\widehat{\gamma}^{k}. \tag{68}$$

Al tempo stesso la (68) diviene:

$$\partial \mathbf{d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial \mathbf{d}_{/\Sigma} = 0, \tag{69}$$

con il risultato che: *lungo ogni linea della congruenza* Γ, *il campo* $\mathbf{d} = -\widetilde{\boldsymbol{\eta}}$ *ha derivata vincolata nulla*, *cioè costituisce un trasporto Fermi-Walker* [11, p. 162].

La condizione (68) si riflette ovviamente anche sulle caratteristiche di $\widehat{\Gamma}$ in quanto, a norma della (31), essa si riassume nell'*uguaglianza dei due campi* (37) e (38):

$$C_i = \widetilde{C}_i = -A_i + \left(2\Omega_{ik} - \widetilde{\nabla}_k \widehat{\gamma}_i\right)\widehat{\gamma}^{k} - (K + A)\widehat{\gamma}_i; \tag{70}$$

ne consegue, in base alla (63), che le due proposte di stazionarietà coincidono se e solo se $C_i = 0$.

8. Fluido Γ parallelamente trasportato dalla luce

Esaminiamo ora il caso in cui Γ *è parallelamente trasportato dal fascio luminoso*, nel senso che, *per ogni linea di* $\widehat{\Gamma}$, *il campo unitario* $\boldsymbol{\gamma}$ *costituisce un trasporto parallelo*:

(71) $$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dT} = 0 \sim \widehat{\partial}_1 \boldsymbol{\gamma} = 0 \ ,$$

essendo T il *tempo relativo standard*.

La (71) equivale alle seguenti limitazioni per i coefficienti di rotazione di Ricci: $\widehat{\gamma}^i \widehat{\mathcal{R}}_{i0}{}^{\alpha} = 0$, ovvero, alla luce del quadro generale $(64)_{\mathrm{I}}$:

(72) $$\widehat{\gamma}^i H_{ik} = 0 \, .$$

Siamo in un caso in cui il *tempo relativo standard ha*, per $\widehat{\Gamma}$, *carattere affine*, nel senso che, *se la congruenza è geodetica* ($B_a = 0$), *l'equazione* $(3)_1$ *assume la forma canonica* $\partial \boldsymbol{\eta} = 0$.

Si tratta di una conseguenza della (72): $\widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}^k k_{ik} = 0$, ovvero, a norma della $(69)_{\mathrm{I}}$, $A = 0$; così che le due condizioni $B_a = 0$ e $A = 0$ riducono l'equazione $(3)_1$ a forma canonica.

Passiamo ora ad esplicitare la (72); a norma della $(53)_{\mathrm{I}}$ si ha:

(73) $$2\widehat{\gamma}^i \left(K_{ik} + \Omega_{ik} + \widetilde{\nabla}_{[i} \widehat{\gamma}_{k]} \right) - C_i \widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}_k - C_k = 0 \ ,$$

da cui $C_i \widehat{\gamma}^i = \widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}^k K_{ik}$, nonché la seguente espressione del vettore di curvatura:

(74) $$C_k = 2\widehat{\gamma}^i \left(K_{ik} + \Omega_{ik} + \widetilde{\nabla}_{[i} \widehat{\gamma}_{k]} \right) - K \widehat{\gamma}_k \, , \qquad K \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}^k K_{ik} \, .$$

Questa, a sua volta, deve essere compatibile con l'espressione generale (35) per $A = 0$; dal confronto, ne consegue la relazione:

(75) $$\widehat{\gamma}^i \left(2\Omega_{ik} + \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k \right) = 0 \ ,$$

che riduce la (74) alla forma seguente:

(76) $$C_k = \widehat{\gamma}^i \left(2K_{ik} - \widetilde{\nabla}_k \widehat{\gamma}_i \right) - K \widehat{\gamma}_k \ ,$$

in termini di deformazione $K_{ik} = \frac{1}{2} \widetilde{\partial} \gamma_{ik}$ *e del vettore* $\widehat{\gamma}_i$.

La (76), equivalente alla condizione di partenza (72), si riflette ovviamente anche sulla (30), nel senso che, eliminando la curvatura C_k mediante la (76), *le caratteristiche relative* $\widetilde{k}_{ik}$ *e* $\widetilde{\omega}_{ik}$ *del fascio luminoso* $\widehat{\Gamma}$ *differiscono da quelle assolute solo per il termine di anolonomia* A^j. Infatti, tenendo conto dell'identità $2\widehat{\gamma}^j K_{jk} = -A^j \gamma_{jk} + \widetilde{\partial} \widehat{\gamma}_k$, nonché della $(36)_2$, la (76) riduce la $(31)_2$ alla *forma compatta*:

(77) $$\widetilde{C}_k = -\left(\gamma_{kj} - \widehat{\gamma}_k \widehat{\gamma}_j \right) A^j \equiv -\widehat{g}_{kj} A^j \, ;$$

cioè $\widetilde{C}_k$ viene a dipendere soltanto dal vettore di anolonomia A^j e dalla *metrica singolare* $\widehat{g}_{ik}$. Conseguentemente le caratteristiche (33) divengono:

(78) $$\widetilde{k}_{ik} = \widehat{k}_{ik} - \widehat{\gamma}_{(i} A_{k)} + \widehat{\gamma}^j A_j \widehat{\gamma}_i \widehat{\gamma}_k \, , \qquad \widetilde{\omega}_{ik} = \widehat{\omega}_{ik} - \widehat{\gamma}_{[i} A_{k]} \qquad \left(A_k = \gamma_{kj} A^j \right) \ ,$$

in accordo con quanto risulta dalla formula generale (39), nelle condizioni (76).

Per un fluido Γ parallelamente trasportato dal fascio luminoso, accanto alle semplificazioni di cui alla (72), in conseguenza della ipotesi caratteristica (71), vale la seguente *proprietà*: *per ogni campo tensoriale, le derivazioni ordinaria e vincolata coincidono*; ne consegue che, lungo $\widehat{\Gamma}$, e *per ogni campo tensoriale, i due trasporti*: *parallelo e Fermi-Walker coincidono* [11, p. 162].

9. Caso di un flusso geodetico

Esaminiamo, per finire, il *caso gravitazionale* (per fotoni senza struttura), in cui la *congruenza nulla* $\widehat{\Gamma}$ *è necessariamente geodetica*, ciò che equivale alle condizioni (11); in altri termini, le *caratteristiche assolute della congruenza* $\widehat{\Gamma}$ *si riducono alle sole componenti* $\widehat{\omega}_{ab}$ e $\widehat{k}_{ab}$, *relative allo schermo* $\{\widehat{\mathbf{e}}^a\}$. Al tempo stesso, la (11) implica la condizione caratteristica: $B_a = 0$.

Al di là di tali caratterizzazioni, è chiaro che *lo schermo* $\sigma \equiv \{\widehat{\mathbf{e}}^a\}$, in quanto ortogonale a $\boldsymbol{\eta}$ e invariante per trasformazioni interne, ha *significato assoluto*: esso è normale ai raggi e strettamente euclideo. Si vuole dire che lo schermo σ non dipende dal fluido di appoggio Γ, così come le ombre prodotte (su σ) da corpi opachi; ombre che, lungo $\widehat{\Gamma}$, subiscono ovviamente deformazioni e rotazioni, in accordo con le caratteristiche introdotte le quali, come abbiamo visto, si riducono ai due tensori di σ: $\widehat{\omega}_{ab}$ e $\widehat{k}_{ab}$. Tali tensori danno luogo a *tre invarianti fondamentali*:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\widehat{\omega}_{ab}\widehat{\omega}^{ab}, \quad \widehat{I} = \widehat{k}_a{}^a, \quad \widehat{Q} = \widehat{k}_{ab}\widehat{k}^{ab}. \tag{79}$$

Si tratta dei *parametri ottici*:

$$\omega = \left(\frac{1}{2}\widehat{\omega}_{ab}\widehat{\omega}^{ab}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \frac{1}{2}\widehat{I}, \quad \sigma = \frac{1}{4}\widehat{Q} - \theta^2, \tag{80}$$

i quali possono interpretarsi rispettivamente come *rotazione, dilatazione e distorsione delle ombre*; in accordo con il teorema di Ehlers-Sachs [6, p. 318; 12, p. 336], qui ritrovato per via anolonoma (reale). In particolare, la $(79)_1$ mette in evidenza che la condizione $\omega = 0$ è equivalente a $\widehat{\omega}_{ab} = 0$ (e viceversa); pertanto *CNES perché una congruenza geodetica nulla sia normale* ($\widehat{\omega}_{ab} = 0$) *è che sia nullo il parametro ottico di rotazione* ($\omega = 0$).

Consideriamo ora, nell'ipotesi geodetica, le *proprietà di invarianza delle caratteristiche relative*, nel caso di un *fluido* Γ *parallelamente trasportato* da $\widehat{\Gamma}$, nel quale le caratteristiche sono del tipo (78). Per quanto riguarda $\widetilde{\omega}_{ik}$, si ha ancora *un solo invariante* e, in virtù dell'identità: $A_iA^i - \left(A_i\widehat{\gamma}^i\right)^2 \equiv \widehat{g}_{ik}A^iA^k$, si ha:

$$\widetilde{\omega}^2 = \frac{1}{2}\widetilde{\omega}_{ik}\widetilde{\omega}^{ik} \sim \widetilde{\omega}^2 = \omega^2 + \frac{1}{4}\widehat{g}_{ik}A^iA^k. \tag{81}$$

Il tensore di deformazione $\widetilde{k}_{ik}$ ha, invece, *tre invarianti fondamentali*:

$$\widetilde{I} = \widetilde{k}_{ik}\gamma^{ik}, \quad \widetilde{Q} = \widetilde{k}_{ik}\widetilde{k}^{ik}, \quad \widetilde{R} = \widetilde{k}_{ij}\widetilde{k}^{jk}\widetilde{k}^i{}_k, \tag{82}$$

legati ai *minori principali* $\widetilde{I}_k$ ($k = 1, 2, 3$) della matrice $\widetilde{k}_i{}^k$ [13, p. 35]:

$$\widetilde{I}_1 = \widetilde{I}, \quad 2\widetilde{I}_2 = \widetilde{I}^2 - \widetilde{Q}, \quad 3\widetilde{I}_3 = \frac{1}{2}\widetilde{I}^3 - \frac{3}{2}\widetilde{I}\,\widetilde{Q} + \widetilde{R}. \tag{83}$$

A norma delle (78), valgono i legami:

$$\widetilde{I} = \widehat{I}\,, \quad \widetilde{Q} = \widehat{Q} + \frac{1}{2}\widehat{g}_{ik}A^i A^k\,, \quad \widetilde{R} = \frac{3}{4}\widehat{k}_{ik}A^i A^k\,, \tag{84}$$

e si vede bene che, mentre il *parametro* $\widetilde{I}$ *ha carattere assoluto* (per la congruenza $\widehat{\Gamma}$), *l'invariante quadratico* $\widetilde{Q}$ *è generalmente diverso da* $\widehat{Q}$, valendo l'uguaglianza solo per $A^a = 0$. Per quanto riguarda $\widetilde{R}$, si tratta di un *quarto parametro* che non ha l'analogo dal punto di vista assoluto solo perché abbiamo considerato il caso geodetico.

Insomma, fatta eccezione per il vettore di curvatura, una congruenza nulla ha (a parte i contenuti) le stesse caratteristiche di deformazione-rotazione di una congruenza temporale; è come dire che l'*ordinaria cinematica delle deformazioni di un Continuo 3-dimensionale si estende ai fasci luminosi,* sia in termini assoluti che relativi, in un processo che si estende in modo naturale alla *dinamica unificata* (particelle e fotoni).

Bibliografia

[1] R. Antonelli - G. Ferrarese, *Proprietà di 2° ordine di un riferimento isotropo*. Annali di Matematica, 180 (3), 2001, 373-385.
[2] G. Ferrarese - R. Antonelli, *Generalized frame of reference with null congruence*. Il Nuovo Cimento, 115, B, n. 6, 2000, 663-676.
[3] G. Ferrarese - R. Antonelli, *Riferimenti isotropi in relatività generale*. Rendiconti dell'Istituto Lombardo, in corso di stampa.
[4] E.T. Newman - R. Penrose, *An Approach Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients*. J. Math. Phys., 3, 1962, 566-579.
[5] G. Ferrarese - L. Stazi, *Riferimenti generalizzati in relatività*. Riv. Mat. Univ. Parma, (5) 5, 1996, 245-256.
[6] R. Sachs, *Gravitational waves in general relativity: VI, The outgoing radiation condition*. Proc. Roy. Soc. London, A264, 1961, 309-338.
[7] M. Castagnino, *Sulle congruenze di curve nulle in una varietá riemanniana a metrica iperbolica normale*. Rend. Mat., 24, Roma 1965, 174-195.
[8] J. Ehlers - P. Schneider, *Gravitational lensing*. Lecture notes in Physics, 410, Springer-Verlag, 1992.
[9] F.A.E. Pirani, *Gravitational radiation: an introduction to current research*. Wiley, New York 1963, 199-223.
[10] C. Cattaneo, *General Relativity: Relative Standard Mass, Momentum, Energy and Gravitational Field in a General System of Reference*. Il Nuovo Cimento, X, 10, 1958, 318-37, 147-151.
[11] G. Ferrarese, *Lezioni di Relatività generale*. Pitagora Editrice, Bologna 1994.
[12] J. Ehlers, *Relativistic hydrodynamics and its relation to interior solutions of the gravitational field equations, Recent developments in general relativity*. Pergamon, Oxford, Warsawa 1962, 201-207.
[13] G. Ferrarese, *Introduzione alla dinamica riemanniana dei sistemi continui*. Pitagora Editrice, Bologna 1979.

Pervenuta l'11 maggio 2001,
in forma definitiva il 6 settembre 2001.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 5 - 00185 Roma
ferrarese@mat.uniroma1.it
RitaAntonelli@mail.eng.it