Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Guido Zappa

Sui gruppi finiti i cui sottogruppi non normali hanno tutti lo stesso ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **13** (2002), n.1, p. 5–16.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_2002_9_13_1_5_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 2002.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 13:5-16 (2001)

Teoria dei gruppi. — *Sui gruppi finiti i cui sottogruppi non normali hanno tutti lo stesso ordine.* Nota (*) del Socio Guido Zappa.

Abstract. — *Finite groups in which all non normal subgroups have the same order*. Let G be a non Abelian and non Hamiltonian finite group and n be an integer ≥ 2. G is said to be in $S(n)$ if all non normal subgroups of G have order n. Let p be a prime. In this paper are given: 1) All p-groups in $S(p)$ (Theorems 1 and 2); 2) All p-groups in $S(p^i)$ with $i > 1$ and $p \geq 3$ (Theorem 3); 3) All groups of exponent 4 in $S(4)$ (Theorem 4).

Key words: Finite groups; Non normal subgroups; Exponent of a group.

Riassunto. — Sia G un gruppo non abeliano né hamiltoniano, ed n un intero ≥ 2. Si dice che G appartiene a $S(n)$ se tutti i sottogruppi non normali di G hanno ordine n. Sia p un numero primo. In questa *Nota* vengono determinati: 1) tutti i p-gruppi in $S(p)$ (Teoremi 1 e 2); 2) tutti i p-gruppi in $S(p^i)$ per $i \geq 2$ e $p \geq 3$ (Teorema 3); 3) tutti i gruppi di esponente 4 appartenenti ad $S(4)$ (Teorema 4).

Introduzione

Rolf Brandl, in un lavoro [2] del 1995, si pose il problema di determinare i gruppi finiti con «pochi» sottogruppi non normali. Egli ha indicato con $\nu(G)$ il numero delle classi di coniugio di sottogruppi non normali posseduti dal gruppo finito G, e ha determinato tutti i gruppi finiti G per cui è $\nu(G) = 1$. In un lavoro [4] del 1999 H. Mousavi ha determinato tutti i gruppi finiti G per cui è $\nu(G) = 2$.

Indicheremo con $\mu(G)$ *il numero degli ordini differenti dei sottogruppi non normali di un gruppo finito* G. In particolare sarà $\mu(G) = 1$ se G ha sottogruppi non normali (cioè non è né abeliano, né hamiltoniano) e questi hanno tutti lo stesso ordine. Ovviamente $\nu(G) = 1$ implica $\mu(G) = 1$, ma non viceversa. Le seguenti osservazioni mostrano come il problema della ricerca dei gruppi finiti per cui $\mu(G) = 1$, ma $\nu(G) > 1$ si riduca al caso dei p-gruppi.

Osservazione 1. Se G è un gruppo finito non nilpotente con $\mu(G) = 1$, si ha anche $\nu(G) = 1$.

Infatti, se G è non nilpotente, non tutti i sottogruppi di Sylow di G sono normali. Sia p^a l'ordine di tali sottogruppi. Allora, se $\mu(G) = 1$, i sottogruppi non normali di G sono tutti e soli quelli di ordine p^a, cioè i p-sottogruppi di Sylow. Ma essi sono coniugati, quindi $\nu(G) = 1$.

Osservazione 2. Se G è un gruppo nilpotente con $\mu(G) = 1$, G è un p-gruppo.

Infatti, se G non è un p-gruppo, è $G = A \times B$ con A, B sottogruppi di Hall $\neq 1$. Poiché G non è né abeliano né hamiltoniano, almeno uno dei sottogruppi A e B

(*) Pervenuta in forma definitiva all'Accademia il 4 settembre 2001.

(supponiamo A) dovrà avere un sottogruppo H non normale. Ma allora anche $H \times B$ è un sottogruppo non normale di G, contro l'ipotesi $\mu(G) = 1$.

Indicheremo con $S(n)$ *la classe dei gruppi finiti G con $\mu(G) = 1$ i cui sottogruppi non normali hanno tutti ordine n.*

Nel presente lavoro si affronta, e in parte si risolve, il problema di determinare i p-gruppi finiti G con $\mu(G) = 1$.

Anzitutto, si determinano tutti i p-gruppi finiti appartenenti ad $S(p)$, per $p > 2$ (Teorema 1) e per $p = 2$ (Teorema 2).

Successivamente, vengono dati tutti i p-gruppi finiti appartenenti ad $S(p^i)$ per $p \geq 3$ e $i \geq 2$ (Teorema 3).

Il caso analogo per $p = 2$ si presenta molto più complesso perché, a differenza del caso di p dispari, dà luogo a p-gruppi non regolari. Vengono però determinati tutti i gruppi di esponente 4 appartenenti ad $S(4)$. Si ottengono un gruppo di ordine 16, due di ordine 32, uno di ordine 64 (Teorema 4).

Gruppi appartenenti ad $S(p)$

Lemma 1. *Sia $G \in S(p)$ con G p-gruppo. Allora G ha un solo sottogruppo normale N d'ordine p. Preso un sottogruppo A non normale d'ordine p di G, i sottogruppi d'ordine p permutabili con A sono tutti e soli quelli contenuti in NA. I coniugati di A in G sono tutti e soli i sottogruppi d'ordine p di NA diversi da N.*

Dimostrazione. G ha necessariamente un sottogruppo normale N d'ordine p. Ne segue che N è permutabile con A, onde NA è un sottogruppo abeliano elementare d'ordine p^2 di G. Avendo ordine $\neq p$, NA è normale in G, onde i coniugati di A in G sono contenuti in NA. Ma il numero dei coniugati di A in G è $\neq 1$ e potenza di p, onde i coniugati di A in G sono tutti e soli i p sottogruppi d'ordine p di NA diversi da N.

Mostriamo ora che N è l'unico sottogruppo normale d'ordine p di G. Sia M un sottogruppo normale di G d'ordine p. Allora, in base al ragionamento precedente, i coniugati di A in G sono tutti e soli i sottogruppi d'ordine p di MA diversi da M. Segue $MA = NA$, cioè $M \leq NA$, e poiché N è l'unico sottogruppo d'ordine p di NA normale in G, è $M = N$, cioè N è l'unico sottogruppo normale di ordine p di G.

Sia ora B un qualunque sottogruppo d'ordine p di G permutabile con A. Allora AB è un sottogruppo d'ordine p^2 di G, quindi normale in G, che contiene un sottogruppo d'ordine p normale in G, cioè contiene N. Ne segue che i sottogruppi di ordine p di G permutabili con A sono tutti e soli quelli contenuti in AN.

Proposizione 1. *Sia $G \in S(p)$ con $\nu(G) > 1$. Allora G è prodotto diretto, con sottogruppo centrale d'ordine p amalgamato, di un sottogruppo non abeliano H d'ordine p^3 per il suo centralizzante K in G. Se $p > 2$, H è di esponente p e K è ciclico. Se $p = 2$, H è un gruppo diedrale d'ordine 8 e K è ciclico o è il gruppo dei quaternioni.*

Dimostrazione. In base al Lemma 1, G ha un unico sottogruppo normale N d'ordine p. Sia A_1 un sottogruppo d'ordine p non normale in G. In base allo stesso lemma, i coniugati di A_1 in G sono tutti e soli i sottogruppi d'ordine p contenuti in NA_1 e diversi da N.

Poiché $\nu(G) > 1$, dovrà esistere in G un sottogruppo A_2 d'ordine p non normale e non coniugato di A_1, quindi non contenuto in NA_1. I coniugati di A_2 sono tutti e soli i sottogruppi d'ordine p di NA_2 diversi da N. I sottogruppi NA_1 ed NA_2 sono normali perché d'ordine p^2, onde $H = NA_1A_2$ è un sottogruppo normale di G. Essendo $|NA_1| = |NA_2| = p^2$ e $NA_1 \cap NA_2 = N$ con $|N| = p$ si ha $|H| = p^3$. Poiché H contiene almeno $2p + 1$ sottogruppi di ordine p, esso per $p > 2$, è l'unico gruppo d'ordine p^3 non abeliano di esponente p, mentre per $p = 2$, è un gruppo diedrale d'ordine 8. Sia K il centralizzante di H in G. Si ha $K = C(A_1) \cap C(A_2)$. Ma A_1 ha esattamente p coniugati in G, e altrettanto vale per A_2. Ne segue che $C(A_i)$ ha indice p in G $(i = 1\,, 2)$, onde K ha indice p^2 in G. Inoltre, $H \cap K$ centralizza sia A_1 che A_2, oltre che N, e pertanto coincide col centro di H, cioè con N. Poiché $|H| = p^3$, K ha indice p^2 in G e $|H \cap K| = |N| = p$, si ha che $HK = G$. Osserviamo infine che N è l'unico sottogruppo d'ordine p di K. Infatti, ogni sottogruppo d'ordine p di K deve centralizzare A_1 e A_2; ma per il Lemma 1, un sottogruppo d'ordine p che centralizzi A_1 e A_2 deve giacere in $NA_1 \cap NA_2 = N$, cioè deve coincidere con N.

Ne segue che K, avendo un solo sottogruppo d'ordine p, è sicuramente ciclico per $p > 2$, mentre per $p = 2$ è ciclico o generalizzato dei quaternioni. Ma un gruppo generalizzato dei quaternioni, che non sia il gruppo dei quaternioni, ha sottogruppi non normali d'odine 4, contro il fatto che $G \in S(p)$. Ne segue che, per $p = 2$, K è ciclico o è il gruppo dei quaternioni.

Teorema 1. *Sia p un primo > 2, e sia G un p-gruppo finito. Allora $G \in S(p)$ se e solo se si verifica una delle seguenti condizioni*:

1) $G = \langle a\,, b \mid a^{p^i} = b^p = 1\,,\ b^{-1}ab = a^{1+p^{i-1}}\,,\ i \geq 2 \rangle$,

2) $G = \langle a\,, b\,, c \mid a^p = b^p = c^p = 1\,,\ b^{-1}ab = ac,\ ac = ca\,,\ bc = cb \rangle$,

3) $G = \langle a\,, b\,, c\,, d \mid a^p = b^p = c^p = 1\,,\ d^{p^{i-1}} = c,\ b^{-1}ab = ac,\ ad = da\,,\ bd = db \rangle$.

Dimostrazione. Se $G \in S(p)$ con $\nu(G) = 1$, allora in base al teorema dato da R. Brandl in [2], G è della forma 1) e viceversa. Supponiamo ora $\nu(G) > 1$. Allora per la Proposizione 1, G è prodotto diretto, con sottogruppo centrale d'ordine p amalgamato, di un gruppo non abeliano H d'ordine p^3 ed esponente p per un gruppo ciclico K di ordine p^i con $i \geq 1$. Se $i = 1$, è $K \leq H$ e K si riduce al centro di H, quindi G è un gruppo non abeliano d'ordine p^3 ed esponente p, cioè ha la forma 2). Se invece $i > 1$, G assume la forma 3) con $H = \langle a\,, b\,, c \rangle$ e $K = \langle d \rangle$.

Viceversa, ogni gruppo della forma 1) appartiene ad $S(p)$ per il suddetto teorema di Brandl. È poi evidente che un gruppo della forma 2) appartiene ad $S(p)$, perché i suoi sottogruppi d'ordine p^2 sono massimali e quindi normali.

Sia ora G della forma 3). Basta dimostrare che i suoi sottogruppi d'ordine $\geq p^2$ sono normali. Ogni sottogruppo ciclico di ordine $\geq p^2$ di G è generato da un elemento della forma $d^{p^x} \cdot h$ con d^{p^x} di ordine $\geq p^2$ e $h \in H = \langle a, b, c \rangle$ quindi h d'ordine p. Essendo $[h, d] = 1$, tra le potenze di $d^{p^x} \cdot h$ c'è $d^{p^{i-1}} = c$. Poiché $\langle c \rangle$ coincide con G', $\langle d^{p^x} \cdot h \rangle$ contiene G', quindi è normale. Un sottogruppo non ciclico d'ordine p^2 di G è contenuto in H ed è normale in H e centralizzato da d, quindi è normale in G. Ogni sottogruppo non ciclico d'ordine $\geq p^3$ di G è normale, perché prodotto di sottogruppi d'ordine p^2, i quali, per quanto si è visto, sono tutti normali. Ne segue $G \in S(p)$.

Teorema 2. *Sia G un 2-gruppo finito. Allora è $G \in S(2)$ se e solo se si verifica una delle seguenti condizioni*:

1) $G = \langle a, b \mid a^{2^i} = b^2 = 1, \; b^{-1}ab = a^{1+2^{i-1}}, \; i \geq 2 \rangle$,

2) $G = \langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = 1, \; c^{2^{i-1}} = a^2, \; b^{-1}ab = a^3, \; ac = ca, \; bc = cb \rangle$,

3) $G = \langle a, b, c, d \mid a^4 = b^2 = 1, \; c^2 = d^2 = a^2, \; b^{-1}ab = a^3, \; c^{-1}dc = d^3, \; ac = ca, \; ad = da, \; bc = cb, \; bd = db \rangle$.

Dimostrazione. Se $G \in S(2)$ con $\nu(G) = 1$, in base al teorema dato da R. Brandl in [2], G è della forma 1) con $i \geq 3$. Se $\nu(G) > 1$, in base alla Proposizione 1, è $G = HK$ con H diedrale d'ordine 8 e K centralizzante di H. Se K si riduce al centro di H, G coincide con H, cioè è diedrale d'ordine 8 e quindi è della forma 1) con $i = 2$. Se K non si riduce al centro di H, sempre per la Proposizione 1, K è ciclico d'ordine 2^i con $i \geq 2$ o è il gruppo dei quaternioni. Nel primo caso $K = \langle c \rangle$ con $\langle c^{2^{i-1}} \rangle$ coincidente col centro di H, quindi G è della forma 2). Nel secondo caso $K = \langle c, d \rangle$ con $c^4 = d^4 = 1$ e $c^2 = d^2$, $\langle c^2 \rangle$ coincidendo col centro di H, quindi G è della forma 3).

Viceversa, sia anzitutto G un gruppo della forma 1). Allora, se $i \geq 3$, si ha $G \in S(2)$ con $\nu(G) = 1$ in base al suddetto teorema di Brandl, mentre se $i = 2$ si ottiene il gruppo diedrale d'ordine 8, che ovviamente appartiene a $S(2)$. Sia ora G della forma 2). Gli eventuali elementi di ordine ≥ 8 sono della forma xy con $x \in \langle a, b \rangle$ e $y \in \langle c \rangle$ con y d'ordine 2^r con $r \geq 3$. Si avrà $(xy)^{2^{r-1}} = x^{2^{r-1}} y^{2^{r-1}} = y^{2^{r-1}} = c^{2^{i-1}}$, onde $\langle xy \rangle$ contiene il derivato $\langle a^2 \rangle = \langle c^{2^{i-1}} \rangle$ di G e quindi è normale. Gli elementi di G di ordine 4 sono contenuti in $\langle a, b, c^{2^{i-2}} \rangle$. Questo sottogruppo contiene $G' = \langle a^2 \rangle$ e il suo quoziente rispetto a G' è un gruppo abeliano elementare. Pertanto i sottogruppi ciclici di ordine 4 di $\langle a, b, c^{2^{i-2}} \rangle$ contengono G', e di conseguenza sono normali in G. Quindi tutti i sottogruppi ciclici di G di ordine ≥ 4 sono normali. Si vede facilmente che i soli sottogruppi d'ordine 4 non ciclici di G sono $\{a^2, b, a^2b, 1\}$, $\{a^2, ab, a^3b, 1\}$, $\{a^2, ac^{2^{i-2}}, a^3c^{2^{i-2}}, 1\}$, i quali contengono tutti il derivato $G' = \langle a^2 \rangle$ e di conseguenza sono normali. Infine i sottogruppi non ciclici di ordine > 4 sono normali perché prodotto di sottogruppi (normali) di ordine 4.

In modo analogo si dimostra che ogni gruppo del tipo 3) è in $S(2)$.

Gruppi appartenenti ad $S(p^i)$ con $p > 2$ e $i \geq 2$

Lemma 2. *Sia G un p-gruppo finito, con $p > 2$, appartenente ad $S(p^i)$ con $i \geq 2$. Allora gli elementi di G di ordine $\leq p$ costituiscono un gruppo abeliano elementare d'ordine p^2, contenuto nel centro di G e contenente il suo derivato G'.*

Dimostrazione. Ogni sottogruppo d'ordine p di G è per ipotesi normale, quindi contenuto nel centro di G. Segue che gli elementi di G di ordine $\leq p$ costituiscono un sottogruppo abeliano elementare H, contenuto nel centro di G. Inoltre $|H| \geq p^2$, perché un p-gruppo con $p \geq 3$ contenente un solo sottogruppo di ordine p è ciclico, quindi non appartiene a $S(p^i)$.

Per ipotesi, in G esiste qualche sottogruppo A non normale di ordine p^i. Allora A è ciclico, altrimenti sarebbe prodotto di sottogruppi (necessariamente normali) di ordine $< p^i$, e pertanto sarebbe normale. Sia $A = \langle a \rangle$. Ne segue $a^{p^{i-1}} \in H$, cioè $\langle a^{p^{i-1}} \rangle = A \cap H$. Essendo $|H| \geq p^2$, esiste un elemento $k \in H$, $k \notin A$. Allora $A\langle k \rangle$, avendo ordine p^{i+1}, è normale, onde i coniugati di A saranno generati da elementi della forma ak^x con $x = 0, 1, \ldots, p-1$, e quindi il loro numero è $\leq p$. D'altra parte A, non essendo normale, ha almeno p coniugati, onde i coniugati di A sono tutti e soli i gruppi generati da elementi della forma ak, cioè tutti e soli i sottogruppi ciclici di ordine p^i contenuti in $A\langle k \rangle$.

Mostriamo ora che $|H| = p^2$. In caso contrario esiste un sottogruppo $\langle s \rangle$ d'ordine p con $s \notin A\langle k \rangle$. Il sottogruppo $A\langle s \rangle$ è normale, e di conseguenza i coniugati di A sono tutti e soli i sottogruppi ciclici d'ordine p^i contenuti in $A\langle s \rangle$. Ma allora $A\langle s \rangle = A\langle k \rangle$, onde $s \in A\langle k \rangle$, contraddizione. Segue $|H| = p^2$.

Osserviamo infine che $G' \leq H$. Ogni sottogruppo di G della forma $\langle a, H \rangle$ con $a \in G$ è normale, onde ogni sottogruppo ciclico di $\frac{G}{H}$ è normale. Ne segue che ogni sottogruppo di $\frac{G}{H}$ è normale, cioè $\frac{G}{H}$ è hamiltoniano. Ma, avendo ordine dispari, $\frac{G}{H}$ è abeliano, quindi $G' \leq H$, come si voleva.

Teorema 3. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*:

1) $G \in S(p^i)$ *con* $p > 2$, $i > 1$, G p-*gruppo,*

2) $G = \langle a, b \mid a^{p^i} = b^{p^j} = 1, \, p > 2, \, i > 1, \, j \geq i, \, a^{-1}ba = b^{p^{j-1}+1} \rangle$.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che da 1) segue 2). In base al Lemma 2, sappiamo che gli elementi di G di ordine $\leq p$ costituiscono un sottogruppo H abeliano elementare di ordine p^2, contenuto nel centro di G e contenente il derivato G'. Essendo G' contenuto nel centro di G, G è un p-gruppo di classe 2, quindi, avendosi $p > 2$, è regolare. Poiché il sottogruppo H degli elementi di ordine $\leq p$ è generato da due elementi, altrettanto avviene per G, cioè $G = \langle a, b \rangle$ con $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$. Almeno uno dei due sottogruppi $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ deve essere non normale, altrimenti G sarebbe abeliano. Supponiamo $\langle a \rangle$ non normale. Allora per ipotesi, a ha ordine p^i. Sia p^j l'ordine di b. Dovrà essere $j > 1$, altrimenti b, avendo ordine p, in base al Lemma 2 sarebbe nel centro di G, quindi permutabile con a, e G sarebbe abeliano.

Supponiamo ora $i > j$. Allora $\langle b\rangle$, avendo ordine $\neq p^i$, dovrà essere normale, ed a indurrà in $\langle b\rangle$ un automorfismo. Ma $\langle a^p\rangle$ è normale, perché di ordine $\neq p^i$, e quindi a^p sarà permutabile con b. Ne segue che a induce in $\langle b\rangle$ un automorfismo d'ordine p, e pertanto $a^{-1}ba = b^{p^{j-1}+1}$. Si ha allora $a^{-1}a^{p^{i-j}}ba = a^{p^{i-j}}b^{p^{j-1}+1} = (a^{p^{i-j}}b)b^{p^{j-1}}$. Orbene, gli elementi $a^{p^{i-j}}$ e b hanno ambedue ordine p^j, e sono normali perché di ordine $\neq p^i$, quindi $a^{-1}a^{p^{i-j}}ba$ dovrebbe essere potenza di $a^{p^{i-j}}b$, mentre $(a^{p^{i-j}}b)b^{p^{j-1}}$ non è potenza di $a^{p^{i-j}}b$. Si giunge quindi ad una contraddizione, onde non può essere $i > j$.

Esaminiamo il caso $i < j$. Allora $\langle b\rangle$, avendo ordine $\neq p^i$, è normale. Ragionando come nel caso $i > j$, si ottiene che $a^{-1}ba = b^{p^{j-1}+1}$, onde è verificata l'affermazione 2) dell'enunciato.

Veniamo ora al caso $i = j$. G' è generato da $[a, b] = k$. Ma G' è contenuto in $\langle a^{p^{i-1}}, b^{p^{i-1}}\rangle$, e si ha $k = a^{xp^{i-1}}b^{yp^{i-1}}$ con $0 \leq x < p$, $0 < y < p$, non potendo essere $y = 0$, altrimenti $\langle a\rangle$ sarebbe normale. Poiché G è regolare, e poiché G' è incluso nel centro e ha esponente p, si ha $(a^x b^y)^{p^{i-1}} = a^{xp^{i-1}}b^{yp^{i-1}} = k$. Allora, posto $c = a^x b^y$, si ha che $\langle c\rangle$ contiene G', e quindi è normale. Dovrà quindi aversi $a^{-1}ca = c^{p^{i-1}+1}$, onde $G = \langle a, c \mid a^{p^i} = c^{p^i} = 1,\ a^{-1}ca = c^{p^{i-1}+1}\rangle$, cioè per G vale l'affermazione 2) anche in questo caso.

Mostriamo ora che da 2) segue 1). Sia G un gruppo verificante l'affermazione 2). Il sottogruppo $\langle a\rangle$ non è normale quindi G ha sottogruppi ciclici non normali di ordine p^i. I sottogruppi ciclici di ordine $< p^i$ sono nel centro di G quindi sono normali. Sottogruppi ciclici di ordine $> p^i$ possono aversi solo se $i < j$, e allora essi sono generati da elementi della forma $a^x b^y$ con $y < p^{j-i}$ quindi tra le loro potenze figura l'elemento $b^{p^{j-1}} = [a, b]$ e pertanto essi sono normali. I sottogruppi non ciclici di G sono generati da due elementi indipendenti, ed essendo G regolare, contengono $\langle a^{p^{i-1}}, b^{p^{j-1}}\rangle$, quindi anche G', e sono normali. Segue che $G \in S(p^i)$ e vale l'affermazione 1).

Gruppi di esponente 4 appartenenti ad $S(4)$

Lemma 3. *Sia G un 2-gruppo di esponente 4 appartenente ad $S(4)$. Allora gli elementi di G di ordine ≤ 2 costituiscono un sottogruppo d'ordine 4, contenuto nel centro di G e contenente il suo derivato G'.*

Dimostrazione. Ragionando come per la dimostrazione del Lemma 2, si prova che gli elementi di G di ordine ≤ 2 costituiscono un sottogruppo H d'ordine 4, contenuto nel centro di G. Per dimostrare che H contiene G' basta osservare quanto segue. Poiché G ha esponente 4, si ha $(a^2)^2 = 1$ per ogni $a \in G$, onde $a^2 \in H$. Ne segue che $\frac{G}{H}$ ha esponente 2, e quindi è abeliano, e pertanto $G' \leq H$.

Lemma 4. A) *Il gruppo*

$$T = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1,\ a^{-1}ba = b^3\rangle$$

appartiene ad $S(4)$.

B) *Sia G un 2-gruppo di esponente* 4*, appartenente ad* $S(4)$*. Allora G contiene T.*

Dimostrazione. Dimostriamo A). Basterà dimostrare che i sottogruppi di T d'ordine 2 sono tutti normali. Sia $H = \langle a^2, b^2 \rangle$. Evidentemente $a^2 b = ba^2$, $b^2 a = ab^2$, onde H è contenuto nel centro di T. Basterà far vedere che gli elementi di T non contenuti in H hanno ordine 4.

Ogni elemento di T non contenuto in H ha una delle forme seguenti: ah, bh, abh con $h \in H$. Si ha $(ah)^2 = a^2 h^2 = a^2 \neq 1$, $(bh)^2 = b^2 h^2 = b^2 \neq 1$, $(abh)^2 = (ab)^2 h^2 = (ab)^2 = a^2(a^{-1}ba)b = a^2 b^3 b = a^2 \neq 1$. Pertanto i sottogruppi d'ordine 2 di T sono tutti contenuti in H, e quindi sono normali. Segue $T \in S(4)$.

Dimostriamo B). Sia G un 2-gruppo di esponente 4, appartenente ad $S(4)$. In base al Lemma 3, gli elementi di G di ordine ≤ 2 costituiscono un sottogruppo H d'ordine 4, contenuto nel centro di G. Poiché per ipotesi G non è né abeliano né hamiltoniano, esiste in G un sottogruppo non normale, necessariamente ciclico e quindi di ordine 4: sia esso $C = \langle c \rangle$. Si avrà $c^2 \in H$, onde CH è un sottogruppo di G d'ordine 8, necessariamente normale. Inoltre, essendo H contenuto nel centro e C ciclico, CH è abeliano. Essendo C non normale, esiste un elemento $d \in G$ tale che $d^{-1}Cd \neq C$, $d^{-1}Cd \leq CH$. L'elemento d ha ordine 4, perché non è nel centro, mentre $d^2 \in H$. Segue che $CH\langle d \rangle$ ha ordine 16. Tra i 9 gruppi non abeliani di ordine 16 (vedi [3, p. 88]) i soli che non hanno elementi d'ordine 8 e in cui i sottogruppi d'ordine 2 sono tutti normali sono i seguenti:

$$T = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1\,,\ a^{-1}ba = b^3 \rangle$$
$$V = \langle a, b, c \mid a^4 = c^2 = 1\,,\ b^2 = a^2\,,\ a^{-1}ba = b^{-1}\,,\ ac = ca\,,\ bc = cb \rangle\,.$$

Ma V è prodotto diretto del gruppo dei quaternioni $\langle a, b \rangle$ per un gruppo ciclico di ordine 2, quindi è hamiltoniano, e pertanto $CH\langle d \rangle$ non può essere isomorfo a V. Ne segue che $CH\langle d \rangle$ è isomorfo a T e può identificarsi con esso, onde G contiene T come si voleva.

Lemma 5. A) *Il gruppo*

$$M = \langle a, b, c \mid a^4 = c^4 = 1\,,\ a^2 = b^2\,,\ a^{-1}ba = b^{-1}\,,\ ac = ca\,,\ bc = cb \rangle\,,$$

prodotto diretto del gruppo dei quaternioni per un gruppo ciclico d'ordine 4*, appartiene a* $S(4)$*.*

B) *Sia* $G \in S(4)$*, sia G di esponente* 4*, sia* $|G| > 16$ *e* $|G'| = 2$*. Allora G contiene M.*

Dimostrazione. Proviamo A).

Si ha $|M| = 32$. I sottogruppi di M di ordine ≥ 8 intersecano $\langle a, b \rangle$, anch'esso di ordine 8, secondo un sottogruppo di ordine ≥ 2, cioè contenente il derivato $\langle b^2 \rangle$ di M. Pertanto essi sono normali. I sottogruppi d'ordine 2 di M sono tutti contenuti in $\langle a^2, b^2 \rangle$, quindi sono normali. M non è hamiltoniano perché $a^{-1}\langle bc \rangle a = \langle b^{-1}c \rangle \neq \langle bc \rangle$. Quindi $M \in S(4)$.

Proviamo B). Sia $G \in S(4)$, G di esponente 4, $|G| > 16$, $|G'| = 2$. In base al Lemma 4, G contiene un sottogruppo della forma

$$T = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1\,,\ a^{-1}ba = b^{-1} \rangle\,.$$

Poiché $|T| = 16$ e $|G| > 16$, esiste un elemento $c \in G$, $c \notin T$, tale che $c^2 \in T$. Posto $H = \langle a^2, b^2 \rangle$ si ha che $\langle a, H \rangle$, d'ordine 8, è normale in G, onde $c^{-1}\langle a \rangle c \leq \langle a, H \rangle$. In $\langle a, H \rangle$ vi sono solo due sottogruppi ciclici d'ordine 4, $\langle a \rangle$ ed $\langle ab^2 \rangle$, onde si ha $c^{-1}\langle a \rangle c = \langle a \rangle$ o $c^{-1}\langle a \rangle c = \langle ab^2 \rangle$. Essendo $b^{-1}\langle a \rangle b = \langle ab^2 \rangle$, possiamo ridurci al caso $c^{-1}\langle a \rangle c = \langle a \rangle$ poiché in caso contrario basta sostituire c con cb. Ne segue $c^{-1}ac = a$ o $c^{-1}ac = a^{-1}$; ma se $c^{-1}ac = a^{-1}$, si ha $[a, c] = a^2$, cioè $a^2 \in G'$, contro il fatto che $b^2 \in G'$ e $|G'| = 2$. Dovrà quindi essere $c^{-1}ac = a$.

Non può essere $c^2 = a^2$, altrimenti si avrebbe $(ac)^2 = a^2c^2 = 1$ con ac elemento d'ordine 2 non contenuto in H, contro il Lemma 3. Ne segue $c^2 = b^2$ o $c^2 = a^2b^2$. Ma se fosse $c^2 = a^2b^2$ si avrebbe $(ac)^2 = a^2a^2b^2 = b^2$, con ac ancora permutabile con a. Possiamo pertanto ridurci al caso $c^2 = b^2$. Si consideri ora il sottogruppo $\overline{M}$ di G generato da a, b, c. Si ha $a^4 = b^4 = 1$, $c^2 = b^2$, $a^{-1}ba = b^{-1}$, $ac = ca$. Poiché $|G'| = 2$, si ha $G' = \langle b^2 \rangle$. Dovrà quindi aversi $c^{-1}bc = b$ o $c^{-1}bc = b^{-1}$. Ma se $c^{-1}bc = b$ si ha $(bc)^2 = 1$ con $bc \notin H$, contro il Lemma 3. Dovrà quindi essere $c^{-1}bc = b^{-1}$. Si ponga $ac = h$. Si ha allora $h^{-1}bh = (ca)^{-1}bca = c^{-1}b^{-1}c = b$. Si ha allora $\overline{M} = \langle h, b, c \mid h^4 = b^4 = 1, c^2 = b^2, hb = bh, hc = ch, c^{-1}bc = b^{-1} \rangle$. Scrivendo a, b, c in luogo di b, c, h, il sottogruppo $\overline{M}$ assume la forma M. Pertanto B) è dimostrato.

Lemma 6. A) *Il gruppo*

$$R = \langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = 1, c^2 = b^2, a^{-1}ba = b^3, ac = ca, c^{-1}bc = ba^2 \rangle$$

appartiene ad $S(4)$.

B) *Sia* $G \in S(4)$, *G di esponente* 4, $|G| = 32$, $|G'| = 4$. *Allora* $G = R$.

Dimostrazione. Proviamo A). Il gruppo R contiene sottogruppi non normali d'ordine 4 (per es. $\langle a \rangle$), e quindi non è hamiltoniano. Si verifica facilmente che i soli sottogruppi d'ordine 2 sono quelli contenuti in $\langle a^2, b^2 \rangle$ e quindi sono normali (basta verificare che ca, cb, cab hanno ordine 4). Si ha $|R| = 32$, quindi i sottogruppi d'ordine 16 sono normali. Sia X un sottogruppo d'ordine 8. Se X ha più di un sottogruppo d'ordine 2, esso contiene $\langle a^2, b^2 \rangle$, cioè contiene il derivato di R, onde è normale. Se X ha un solo sottogruppo d'ordine 2, esso deve essere un gruppo dei quaternioni, e dovrà quindi essere generato da due elementi x, y con $x^2 = y^2$. Allora X deve essere generato da due tra gli elementi a, ab, bc, che hanno per quadrato a^2, o da due tra gli elementi b, c, abc, che hanno per quadrato b^2. Ma si vede facilmente che nessun sottogruppo generato in tal modo è dei quaternioni. Pertanto $R \in S(4)$.

Dimostriamo B). Sia G un gruppo appartenente ad $S(4)$, di esponente 4, d'ordine 32, e sia $|G'| = 4$. In base al Lemma 4, G contiene il gruppo d'ordine 16

$$T = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle .$$

Essendo $|G| > 16$, dovrà esistere un elemento $c \in G$, $c \notin T$, tale che $c^2 \in T$. Ragionando come nella dimostrazione del Lemma 5, si vede che si può scegliere c in modo che $c^{-1}\langle a \rangle c = \langle a \rangle$, cioè $c^{-1}ac = a$ oppure $c^{-1}ac = a^{-1}$.

In base al Lemma 3 i soli elementi d'ordine 2 di G sono a^2, b^2, a^2b^2, quindi $c^2 \neq 1$ e c^2 sarà uguale ad uno degli elementi a^2, b^2, a^2b^2.

Mostriamo che non può essere $c^2 = a^2$. Infatti, se $c^{-1}ac = a$, seguirebbe $(ac)^2 = a^2c^2 = 1$ con $ac \notin \langle a^2, b^2 \rangle$, contro il Lemma 3. Se $c^{-1}ac = a^{-1}$, da $a^2 = c^2$ discenderebbe che $\langle a, c \rangle$ è un gruppo dei quaternioni, quindi, avendo ordine 8, dovrebbe essere normale mentre $a \in \langle a, c \rangle$, $b^{-1}ab = ab^2 \notin \langle a, c \rangle$. Quindi non può essere $c^2 = a^2$.

Il sottogruppo $\langle b, a^2 \rangle$, avendo ordine 8, è normale, quindi $c^{-1}\langle b \rangle c = \langle b \rangle$ oppure $c^{-1}\langle b \rangle c = \langle ba^2 \rangle$. Supponiamo $c^{-1}\langle b \rangle c = \langle b \rangle$. Allora $c^{-1}bc = b$ oppure $c^{-1}bc = b^{-1}$. Se $c^{-1}bc = b^{-1}$, si ha $(ac)^{-1}b(ac) = b$ con ac ancora permutabile con a. Possiamo quindi ridurci al caso $c^{-1}bc = b$. Analogamente, se $c^{-1}\langle b \rangle c = \langle ba^2 \rangle$ possiamo ridurci al caso $c^{-1}bc = ba^2$.

Notiamo ancora che non possono sussistere insieme le relazioni $c^{-1}ac = a$, $c^{-1}bc = b$, perché in tal caso si avrebbe $|G'| = 2$, contro l'ipotesi. Sono allora possibili i seguenti casi:

1) $c^{-1}ac = a$, $c^{-1}bc = ba^2$, $c = b^2$,
2) $c^{-1}ac = a$, $c^{-1}bc = ba^2$, $c^2 = a^2b^2$,
3) $c^{-1}ac = a^{-1}$, $c^{-1}bc = b$, $c^2 = b^2$
4) $c^{-1}ac = a^{-1}$, $c^{-1}bc = b$, $c^2 = a^2b^2$
5) $c^{-1}ac = a^{-1}$, $c^{-1}bc = ba^2$, $c^2 = b^2$
6) $c^{-1}ac = a^{-1}$, $c^{-1}bc = ba^2$, $c^2 = a^2b^2$.

Ma il caso 3) non può sussistere perché in esso si ha $(bc)^2 = b^2c^2 = b^4 = 1$, mentre bc non può avere ordine 2 essendo $\neq a^2$, b^2, a^2b^2.

Analogamente si vede che non possono sussistere i casi 2) e 6), perché è ancora $(bc)^2 = 1$. Restano i casi 1), 4), 5). Ma il caso 4) si riduce al caso 1) ponendo $a' = c$, $b' = a$, $c' = bc$, mentre il caso 5) si riduce al caso 1) ponendo $a' = ab$, $b' = b$, $c' = c$. Ma il caso 1) ci fornisce il gruppo di cui all'enunciato. Pertanto B) è dimostrato.

Proposizione 2. *Il gruppo considerato nel Lemma* 5,

$$M = \langle a, b, c \mid a^4 = c^4 = 1, \; b^2 = a^2, \; a^{-1}ba = b^{-1}, \; ac = ca, \; bc = cb \rangle$$

non è contenuto propriamente in alcun gruppo $G \in S(4)$ *e di esponente* 4. *In particolare ogni gruppo* $G \in S(4)$, *di esponente* 4, *con* $|G'| = 2$, *ha ordine* ≤ 32.

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che, in base ai Lemmi 5 e 6, i soli gruppi d'ordine 32 ad esponente 4 appartenenti ad $S(4)$ sono M e il gruppo R di cui al Lemma 6. Poiché R non contiene elementi centrali d'ordine 4, ogni gruppo $G \in S(4)$, di esponente 4 e ordine 32, contenente un elemento centrale d'ordine 4, è isomorfo ad M.

Supponiamo che la Proposizione 2 sia falsa. Allora esisterà un gruppo $G \in S(4)$, di esponente 4 e ordine > 32, contenente M. Possiamo supporre $|G| = 64$. Sarà di conseguenza $G = \langle a, b, c, d \rangle$ con $d \notin M$, $d^2 \notin M$. Il sottogruppo $\langle a, b \rangle$, avendo ordine 8, è normale in G, onde $[a, d] \in \langle a, b \rangle$, e poiché $G' = \langle a^2, c^2 \rangle$, si ha $[a, d] = 1$ o $[a, d] = a^2$. Ma se $[a, d] = a^2$ segue $[a, db] = 1$, onde possiamo ridurci al caso $[a, d] = 1$.

Il sottogruppo $\langle a, c, d\rangle$ di G ha ordine 32, e poiché $[a, c] = [a, d] = 1$, a è un elemento d'ordine 4 appartenente al centro di $\langle a, c, d\rangle$, e pertanto, come si è visto sopra, $\langle a, c, d\rangle$ è isomorfo ad M. In M $c^2 \neq a^2$, e quindi $\langle a, c, d\rangle = \langle a, e, f\rangle$ con $a^4 = e^4 = 1$, $f^2 = e^2$, $ae = ea$, $af = fa$, $e^{-1}fe = f^{-1}$. Si avrà $a^2 \neq f^2$. Allora $G = \langle a, b, e, f\rangle$. Sappiamo che $\langle a, b\rangle$ è un gruppo dei quaternioni Q in cui l'elemento d'ordine 2 è $a^2 = b^2$; ma anche $\langle e, f\rangle$ è un gruppo dei quaternioni $\overline{Q}$ in cui l'elemento d'ordine 2 è $e^2 = f^2 \neq a^2$. Ne segue $Q \cap \overline{Q} = 1$. Ma Q e $\overline{Q}$ hanno ordine 8, quindi sono normali in G. Ne segue $G = Q \times \overline{Q}$. Si può stabilire tra Q e $\overline{Q}$ un isomorfismo φ tale che $a\varphi = e$, $b\varphi = f$. Allora $(ae)^4 = 1$, $(bf)^2 = (af)^2$, $(ae)^{-1}(bf)(ae) = (bf)^{-1}$ onde $\langle ae, bf\rangle$ è un gruppo dei quaternioni, quindi normale in G. Ma si ha $a^{-1}(bf)a = b^{-1}f \notin \langle ae, bf\rangle$, contraddizione. È così provato che non esiste un gruppo $G \in S(4)$, di esponente 4 che contenga M e abbia ordine > 32.

Sia ora $G \in S(4)$, G di esponente 4, con $|G'| = 2$ e $|G| \geq 32$. Allora G deve contenere M, non potendo contenere R perché $|R'| = 4$. Ne segue $|G| = 32$, onde ogni gruppo $G \in S(4)$, di esponente 4, con $|G'| = 2$ ha ordine ≤ 32.

Lemma 7. A) *Il gruppo*

$$V = \langle a, b, c, d \mid a^4 = b^4 = 1,\ c^2 = b^2,\ d^2 = a^2,\ a^{-1}ba = b^3,\ ac = ca,\ b^{-1}cb = ca^2,\ a^{-1}da = da^2b^2,\ bd = db,\ c^{-1}dc = db^2\rangle$$

appartiene ad $S(4)$.

B) *Sia* $G \in S(4)$, *sia* G *di esponente* 4, *e sia* $|G| > 32$. *Allora* $G \geq V$.

Dimostrazione. Proviamo A). Si vede subito che G è di esponente 4 e non è hamiltoniano. Si ottiene poi facilmente che nessun elemento fuori di $\langle a^2, b^2\rangle$ ha ordine 2 (basta limitarsi a calcolare il quadrato di ad, bd, cd, abd, acd, bcd, $abcd$) onde ogni sottogruppo d'ordine 2 di V è normale. Inoltre si può osservare che non esistono in V copie di elementi d'ordine 4 il cui commutatore sia il loro comune quadrato, onde V non contiene gruppi dei quaternioni. Pertanto ogni sottogruppo d'ordine 8 contiene almeno due sottogruppi d'ordine 2, quindi contiene $\langle a^2, b^2\rangle$ che coincide col derivato di V. Ne segue che ogni sottogruppo d'ordine 8, o d'ordine > 8, è normale. Quindi i sottogruppi non normali di V sono tutti d'ordine 4, e si ha $V \in S(4)$.

Dimostriamo B). Sia $G \in S(4)$, G di esponente 4, $|G| > 32$. Allora G dovrà contenere un gruppo K di ordine 32. In base alla Proposizione 3 non può essere $|K'| = 2$. Ne segue che $|K'| = 4$ e quindi per il Lemma 6, K è isomorfo al gruppo R di detto lemma, e possiamo identificarlo con R. Essendo $|R| = 32$ e $|G| > 32$, esiste un $d \in G$, $d \notin R$, tale che $d^2 \in R$. Dovrà essere $d^2 \neq 1$, perché gli elementi d'ordine 2 di G sono tutti in $\langle a^2, b^2\rangle$. Il sottogruppo $\langle b, a^2\rangle$, avendo ordine 8, è normale in G, onde $d^{-1}bd$ coincide con uno dei quattro elementi d'ordine 4 di $\langle b, a^2\rangle$, cioè con uno degli elementi b, ba^2, b^{-1}, $b^{-1}a^2$. Ma b è coniugato a questi 4 elementi anche in R, onde si potrà scegliere d in modo che $d^{-1}bd = b$. Inoltre d^2, avendo ordine 2, dovrà coincidere con uno degli elementi a^2, b^2, a^2b^2. Se fosse $d^2 = b^2$, essendo $db = bd$, si avrebbe

$(db)^2 = d^2 b^2 = b^4 = 1$ con $db \notin \langle a^2, b^2 \rangle$, contraddizione. Se fosse $d^2 = a^2 b^2$, sarebbe $(bd)^2 = b^2 d^2 = b^2 a^2 b^2 = a^2$, con bd ancora permutabile con b. Quindi, scegliendo opportunamente l'elemento d tra gli elementi permutabili con b, ci si può ridurre al caso $d^2 = a^2$.

Non può aversi $d^{-1} ad = a$, altrimenti si avrebbe $(ad)^2 = a^2 d^2 = a^4 = 1$, con $(ad) \notin \langle a^2, b^2 \rangle$, contraddizione. Non può aversi neppure $d^{-1} ad = a^{-1}$, altrimenti $\langle a, d \rangle$ sarebbe un gruppo dei quaternioni; ma allora un sottogruppo d'ordine 32 contenente $\langle a, d \rangle$ conterrebbe un gruppo dei quaternioni mentre, come si è visto, deve essere isomorfo ad R che non contiene gruppi dei quaternioni. Dovrà quindi aversi $d^{-1} ad = ab^2$ o $d^{-1} ad = a^3 b^2$.

Non può essere $d^{-1} cd = c$, altrimenti d sarebbe nel centro di $\langle b, c, d \rangle$, il quale ha ordine 32 e quindi, per quanto si è visto, deve essere isomorfo ad R, che invece non ha elementi centrali d'ordine 4. Non può essere nemmeno $d^{-1} cd = ca^2$, perché essendo $b^{-1} cb = ca^2$, si avrebbe $(bd)^{-1} c(bd) = c$, e c centralizzerebbe a e bd, e allora $\langle a, c, bd \rangle$ sarebbe un sottogruppo d'ordine 32 con un elemento centrale d'ordine 4, contraddizione.

Restano pertanto solo i casi seguenti:

1) $d^{-1} cd = c^{-1}$, $d^{-1} ad = ab^2$,
2) $d^{-1} cd = c^{-1}$, $d^{-1} ad = a^3 b^2$,
3) $d^{-1} cd = ca^2 b^2$, $d^{-1} ad = ab^2$,
4) $d^{-1} cd = ca^2 b^2$, $d^{-1} ad = a^3 b^2$.

Nel caso 1) si ha $d^{-1} cd = cc^2 = cb^2$, onde $d^{-1} acd = ac$, e d sarebbe nel centro di $\langle d, b, ac \rangle$ d'ordine 32, contraddizione.

In modo analogo si esclude il caso 4).

Nel caso 3) si ha $b^{-1} ab = ab^2$, $d^{-1} ad = ad^2$, da cui $(bd)^{-1} a(bd) = a$, e $\langle a, c, bd \rangle$ avrebbe l'elemento a d'ordine 4 nel suo centro, contraddizione. Non resta quindi che il caso 2), che fornisce il gruppo V, come si voleva.

PROPOSIZIONE 3. *Sia $G \in S(4)$ e sia G di esponente* 4. *Allora* $|G| \leq 64$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $|G| > 64$. Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che sia $|G| = 128$. Per il Lemma 7, G deve contenere come sottogruppo il gruppo ivi indicato con V. Il sottogruppo $\langle a, b^2 \rangle$ di V, avendo ordine 8, è normale in G, onde i coniugati di a in G sono solo a, a^{-1}, ab^2, $a^{-1} b^2$. Ne segue che il centralizzante C di a in G ha ordine 32, ed è contenuto in un sottogruppo D di ordine 64. Il sottogruppo $D \cap V$ ha ordine 32, e non è hamiltoniano, perché V non ha sottogruppi di tal tipo di ordine 32. Ne segue che anche D non è hamiltoniano onde $D \in S(4)$, e quindi, per il Lemma 7, è isomorfo a V. Ma il centralizzante C di a in D ha ordine 32, mentre i centralizzanti degli elementi di ordine 4 di V hanno tutti ordine 16, contraddizione. Quindi $|G| \leq 64$.

Tenuto conto dei Lemmi 3, 4, 5, 6, 7 e delle Proposizioni 2, 3, si giunge al seguente

TEOREMA 4. *Le seguenti condizioni per un gruppo finito G sono equivalenti*:

A) *G ha esponente 4 ed appartiene ad $S(4)$*

B) *G è uno dei gruppi seguenti*:

1) $G = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, \ a^{-1}ba = a^3 \rangle$,
2) $G = \langle a, b, c \mid a^4 = c^4 = 1, \ a^2 = b^2, \ a^{-1}ba = b^{-1}, \ ac = ca, \ bc = cb \rangle$,
3) $G = \langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = 1, \ c^2 = b^2, \ a^{-1}ba = b^{-1}, \ ac = ca, \ c^{-1}bc = ba^2 \rangle$,
4) $G = \langle a, b, c, d \mid a^4 = b^4 = 1, \ c^2 = b^2, \ d^2 = a^2, \ a^{-1}ba = b^{-1}, \ ac = ca, \ b^{-1}cb = ca^2, \ a^{-1}da = da^2b^2, \ bd = db, \ c^{-1} = db^2 \rangle$.

NOTA. I gruppi 2) e 3) di cui all'enunciato del Teorema 4 coincidono rispettivamente coi gruppi XVII e XXVI dell'elenco dei gruppi d'ordine 32 dato da G. Bagnera [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BAGNERA, *Sopra i gruppi astratti di grado 32*. Ann. di Mat., (3) 2, 1899, 263-275.

[2] R. BRANDL, *Groups with few non-normal subgroups*. Comm. in Algebra, 23, 1995, 2091-2098.

[3] W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*. The University Press, Cambridge, 1897, 388 pp.

[4] H. MOUSAVI, *On finite groups with few non-normal subgroups*. Comm. in Algebra, 27, 1999, 3143-3151.

Pervenuta il 25 giugno 2001,
in forma definitiva il 4 settembre 2001.

Dipartimento di Matematica «U. Dini»
Università degli Studi di Firenze
Viale Morgagni, 67 A - 50134 FIRENZE