

# RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

---

MARIO COMO

## **Sulla flessione elastica delle travi in c.a. in presenza di fessurazione**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e  
Applicazioni, Serie 9, Vol. 14 (2003), n.1, p. 51-68.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLIN\\_2003\\_9\\_14\\_1\\_51\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_2003_9_14_1_51_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 2003.

**Meccanica dei solidi.** — *Sulla flessione elastica delle travi in c.a. in presenza di fessurazione.* Nota (\*) di MARIO COMO, presentata dal Socio E. Giangreco.

ABSTRACT. — *On the elastic flexure with cracking of reinforced concrete beams.* A theory of the elastic flexure of reinforced concrete beams in presence of cracking is thoroughly developed. The mean curvature between the cracks is evaluated and the differential equation of the flexure of the reinforced concrete beams in presence of cracks is obtained. The various numerical applications show agreement with the test results.

KEY WORDS: Elastic flexure; Reinforced concrete cracking; Reinforced concrete beams.

RIASSUNTO. — Viene formulata una teoria della flessione delle travi in cemento armato in presenza di fessurazione. Si esamina l'effetto del «tension stiffening» e, attraverso un processo di omogeneizzazione, si valuta la curvatura media tra le fessure. Si perviene così all'equazione differenziale della flessione elastica delle travi fessurate. Le applicazioni numeriche svolte vengono confrontate con le risultanze sperimentali.

## 1. INTRODUZIONE

È noto come gli attuali acciai da c.a., caratterizzati da elevate resistenze, consentono l'adozione di elevati tassi di lavoro in condizioni normali di esercizio. Ciò comporta la presenza di lesioni nelle membrature e, di conseguenza, la necessità del loro controllo in modo che esse risultino quanto più possibile sottili. Emerge nel contempo la richiesta della messa a punto di più precise analisi in grado di valutare le deformazioni delle travi in presenza di fessurazione e, per le strutture iperstatiche, gli stessi stati di sollecitazione interna che, con lo sviluppo della fessurazione, evolvono col crescere dei carichi. Numerosi sono gli studi indirizzati su tale problematica, di grande importanza per l'analisi del comportamento delle strutture in c.a.: studi caratterizzati, peraltro, da una grande varietà di ipotesi e risultati differenziati [2, 6, 7, 9-11].

In tale contesto, sviluppando una analisi in grado di predire la graduale ripartecipazione del calcestruzzo ad assorbire trazione tra le fessure, viene formulata una teoria della flessione delle travi in cemento armato in presenza di fessurazione. Si perviene così ad una equazione differenziale della flessione elastica delle travi fessurate valutando, attraverso un semplice processo di omogeneizzazione, la curvatura media tra le fessure. I legami costitutivi usati sono quello elastico lineare per l'acciaio, quello lineare con possibilità di rottura a trazione per il calcestruzzo, e quello bilineare tra la tensione tangenziale di aderenza e lo slittamento tra barre di acciaio e il calcestruzzo confinante. Quest'ultimo legame contempla, in accordo con le esperienze, la presenza di una prima fase di perfetta aderenza e di una successiva fase elastica lineare tra slittamenti e tensioni tangenziali addizionali. I risultati ottenuti trovano riscontro con le numerose risultanze sperimentali e le indicazioni fornite in merito da varie normative nazionali ed internazionali [1, 3, 5, 8, 9].

(\*) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 2002.

## 2. SLITTAMENTI ELASTICI TRA ACCIAIO E CALCESTRUZZO

Per l'acciaio e per il calcestruzzo compresso si assume una relazione elastica lineare tra tensioni e deformazioni. È ammessa invece la possibilità della rottura a trazione: la resistenza a trazione del cls è indicata con  $\sigma_{ctr}$ . Per caratterizzare l'evoluzione delle condizioni di aderenza tra acciaio e cls, in conformità con i risultati sperimentali, si assume un legame costituito da una prima fase di perfetta aderenza, quindi con scorrimenti nulli, fin quando la tensione tangenziale risulta inferiore ad un definito valore  $\bar{\tau}_1$  (fig. 1). Successivamente, per  $\bar{\tau} > \bar{\tau}_1$ , si assume invece che si producano scorrimenti proporzionali alla differenza  $(\bar{\tau} - \bar{\tau}_1)$ . Tale fase, linearmente elastica per incrementi di sollecitazione, termina quando la tensione tangenziale tra barre e cls raggiunge un valore limite  $\bar{\tau}_0$ . Le tensioni tangenziali tra acciaio e cls saranno quindi limitate dall'essere  $\bar{\tau} < \bar{\tau}_0$  (fig. 1). Si osserva che per cls di media resistenza, la tensione tangenziale limite  $\bar{\tau}_1$  è dell'ordine della resistenza a trazione  $\sigma_{ctr}$ , mentre quella  $\bar{\tau}_0$  è una frazione della resistenza a compressione. Per  $\bar{\tau}_1 < \bar{\tau} < \bar{\tau}_0$  si ha quindi la relazione di elasticità

$$(1) \quad \bar{\tau} - \bar{\tau}_1 = \bar{G}\gamma$$

dove  $\bar{G}$  rappresenta il modulo di elasticità allo scorrimento elastico, relativo al tratto lineare con  $\bar{\tau} > \bar{\tau}_1$ . Nella (1)  $\gamma$  è lo scorrimento che si sviluppa tra barre e cls, pari a

$$(2) \quad \gamma = s/\Delta$$

se  $s$  indica lo slittamento tra barra e calcestruzzo e  $\Delta$  è la distanza tra l'asse della barra e le fibre di cls a contatto con l'acciaio. Può porsi d'altra parte

$$(3) \quad \Delta = d_s/2$$

se  $d_s$  è il diametro della barra compreso lo spessore dei risalti. È quindi

$$(2') \quad \gamma = 2s/d_s.$$

Lo scorrimento limite  $\gamma_0$ , in corrispondenza del quale viene raggiunto lo stato plastico di slittamento, cioè la tensione  $\bar{\tau}_0$ , per barre nervate e calcestruzzi di media resistenza ( $R_{ck} \cong 300 \text{ kg/cm}^2$ ), risulta all'incirca  $\gamma_0 = (s/d)_0 = 1,5\%$  [11]. Inoltre, sempre per calcestruzzi di media resistenza, risulta all'incirca  $\bar{\tau}_1 \cong 30 \text{ kg/cm}^2$  e  $\bar{\tau}_0 \cong 100 \text{ kg/cm}^2$  [11].

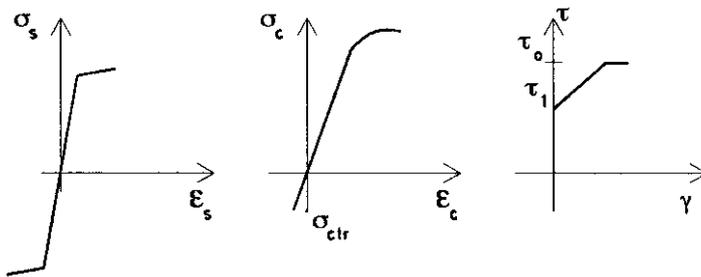


Fig. 1.

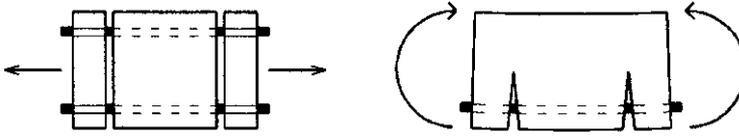


Fig. 2.

Si consideri ora un tratto di trave in c.a. soggetto ad una forza di trazione ovvero a un momento flettente costante (fig. 2).

Al crescere dei carichi, ad un dato istante e in un certo numero di sezioni, si produce la fessurazione. Nel caso del tirante in c.a. la forza di trazione  $N_f$  che produce la fessurazione vale

$$(4) \quad N_f = \sigma_{crit}(A_c + nA_s)$$

mentre nel caso dell'elemento inflesso il momento flettente  $M_f$  di fessurazione risulta

$$(5) \quad M_f = \sigma_{crit} \frac{J_{id}}{x_i}$$

dove  $J_{id}$  è il momento di inerzia della sezione integra di cls e con l'acciaio omogeneizzato in cls e  $x_i$  è la distanza del bordo teso dal baricentro della sezione integra. Subito dopo il comparire delle lesioni, nelle sezioni fessurate le fibre di cls non sono più soggette a tensione. In queste sezioni tutto lo sforzo di trazione richiesto è quindi trasmesso dalle sole barre di acciaio. Queste si deformeranno, a differenza delle adiacenti fibre di cls che sono ivi scariche, e tenderanno a svilupparsi differenti dilatazioni e quindi scorrimenti tra barre e cls. Sulla superficie laterale delle barre tese il cls eserciterà quindi delle azioni tangenziali  $\tau$  che riducono le sollecitazioni di trazione nelle barre man mano che ci si allontana dalla sezione fessurata. Sollecitazioni  $\bar{\tau}$ , eguali ma opposte in verso, saranno quelle di reazione esplicate dalle barre sul cls: queste costringono gradualmente il cls ad assorbire di nuovo sforzi di trazione. La tensione di trazione nelle sezioni di cls deve quindi crescere man mano che ci si allontana dalla sezione fessurata e in un'altra sezione, posta ad una definita distanza  $\lambda$  dalla prima, può venire di nuovo raggiunta la resistenza a trazione  $\sigma_{crit}$  del cls proprio all'atto del sopraggiungere della prima fessurazione. Piccole variazioni delle caratteristiche di resistenza del calcestruzzo possono condurre a una distribuzione più o meno disordinata delle lesioni tra loro. È possibile però che si produca, in presenza di resistenza costante del materiale, una sequenza regolare di lesioni la cui distanza  $\lambda$  costituisce un parametro di riferimento e di confronto nell'analisi della fessurazione degli elementi in c.a.

Per la valutazione dell'ampiezza delle fessure, così come della relativa suddetta distanza  $\lambda$ , occorre in primo luogo individuare lo stato di sollecitazione presente nell'elemento tra due fessure contigue. A tal fine occorre considerare anzitutto, nell'intorno della sezione fessurata, l'equilibrio di un piccolo tratto di barra con sezione di area  $\omega_s$

e diametro  $d_s$ , e della lunghezza  $dz$ . Si ha allora immediatamente la condizione

$$(6) \quad \tau = -\frac{d_s}{4} \frac{d\sigma_s}{dz}$$

se  $\tau$  è la tensione tangenziale che agisce sulla superficie esterna delle barre, eguale ed opposta a quella  $\bar{\tau}$  che si esercita sulle adiacenti fibre di calcestruzzo. Risulta quindi  $\tau = -\bar{\tau}$ . Per  $\bar{\tau} > \bar{\tau}_1$  tale tensione tangenziale  $\bar{\tau}$  è funzione dello scorrimento  $\gamma$  che si produce tra acciaio e cls. Quest'ultimo si esprime quindi come

$$(2'') \quad \gamma = \frac{w_s - w_{ct}}{\Delta}$$

se  $w_s$  e  $w_{ct}$  indicano rispettivamente all'ascissa  $z$  lo spostamento assiale nella generica sezione della barra e quello delle fibre adiacenti di cls e  $\Delta$ , come prima definito, è pari all'incirca al semidiametro esterno della barra, ivi compreso lo spessore del risalto. Derivando la (2'') si ha quindi

$$(2''') \quad \frac{d\gamma}{dz} = \frac{\varepsilon_s(z) - \varepsilon_{ct}(z)}{\Delta}$$

dove  $\varepsilon_s$  ed  $\varepsilon_{ct}$  rappresentano all'ascissa  $z$  la dilatazione dell'acciaio e quella delle fibre di cls a contatto con la barra di acciaio. Il legame costitutivo tra  $\tau$  e  $\gamma$  è quello prima discusso. Va peraltro osservato che la tensione tangenziale si annulla sull'asse di simmetria dell'elemento fessurato di lunghezza  $L$ . Poiché gli scorrimenti elastici sono poi crescenti dal centro dell'elemento verso le lesioni, lo stato di *perfetta aderenza* si localizzerà allora nell'intorno infinitesimo della sezione di mezzeria posta tra due fessure contigue. In tutto il tratto  $L$  di barra posto tra tali due lesioni, tranne che nella mezzeria, vale quindi la relazione di elasticità (1) e quindi risulta

$$(1') \quad \bar{\tau} - \bar{\tau}_1 = \frac{\bar{G}}{\Delta} (w_s - w_{ct}).$$

Derivando la (1') si ha allora

$$(1'') \quad \frac{d\bar{\tau}}{dz} = \frac{\bar{G}}{\Delta} (\varepsilon_s - \varepsilon_{ct}).$$

Tenendo conto della (6) e del fatto che è  $\tau = -\bar{\tau}$ , la sostituzione nella (1'') delle relazioni di elasticità

$$(7) \quad \sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad \sigma_{ct} = E_{ct} \varepsilon_{ct}$$

fornisce in definitiva

$$(8) \quad \frac{d_s}{4} \frac{d^2 \sigma_s}{dz^2} = \frac{\bar{G}}{\Delta} \left( \frac{\sigma_s}{E_s} - \frac{\sigma_{ct}}{E_{ct}} \right).$$

Occorre ora determinare la relazione che mette in correlazione la tensione di trazione  $\sigma_{ct}$  che si esercita nelle fibre di cls adiacenti alle barre con la tensione  $\sigma_s$  nell'acciaio. Tale correlazione viene immediatamente ritrovata per il già noto problema del tirante (cfr. ad es. [10, 11]), ma richiede una analisi più complessa per il caso dell'elemento inflesso e che viene qui sviluppata. È utile pertanto premettere lo studio del ti-

rante in c.a. per poter poi istituire il confronto con il più complesso problema dell'elemento inflesso che in questo lavoro trova piena soluzione.

### 3. LO STATO DI SOLLECITAZIONE TRA LE FESSURE

#### 3.1. Il caso dell'elemento teso.

In questo caso, a fessurazione avvenuta, nelle sezioni fessurate e nelle aree metalliche c'è solo la trazione:

$$(9) \quad \sigma_s(0) = \frac{N}{A_s} \quad N > N_f.$$

Nelle altre sezioni, invece, anche il cls partecipa all'assorbimento della forza di trazione  $N$  applicata. Nella generica sezione dell'elemento posta all'ascissa  $z$  tra due fessure contigue si ha quindi

$$(10) \quad N = \sigma_s(z) A_s + \sigma_{ct}(z) A_c \quad (0 \leq z \leq L/2).$$

Da tale condizione di equilibrio si ricava la relazione tra la tensione  $\sigma_{ct}(z)$  nel cls teso e quella  $\sigma_s(z)$  nell'acciaio: si ha infatti

$$(11) \quad \sigma_{ct} = \frac{N}{A_c} - \sigma_s(z) \frac{A_s}{A_c}.$$

Con la sostituzione della (11) nella (8) scaturisce quindi l'equazione differenziale determinatrice della tensione nell'acciaio variabile tra le fessure

$$(12) \quad \frac{d^2 \sigma_s}{dz^2} - \varrho_N^2 \sigma_s = - \frac{8}{d_s^2} \frac{\bar{G}}{E_s} \chi_N \sigma_s(0)$$

dove

$$(13) \quad d_s \varrho_N = 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{\bar{G}}{E_s} (1 + \chi_N)}$$

e

$$(14) \quad \chi_N = \frac{n A_s}{A_c} = n \mu$$

se  $\mu$  è la percentuale di acciaio nella sezione del tirante. La quantità  $\chi_N$  esprime il rapporto tra la rigidezza della sezione resistente fessurata e quella della sezione non fessurata di solo calcestruzzo. La funzione incognita  $\sigma_s(z)$  deve inoltre soddisfare alle condizioni ai limiti

$$(15) \quad \sigma_s(0) = \frac{N}{A_s} \quad \lim_{z \rightarrow L/2} \tau(z) = \tau_1.$$

La prima delle (15) determina il raccordo della  $\sigma_s(z)$  con la sollecitazione presente nell'acciaio nella sezione fessurata; la seconda è motivata dal fatto che lo stato di perfetta aderenza interessa solo un tratto infinitesimo dell'elemento intorno la sezione di mezzzeria.

3.2. Il caso dell'elemento inflesso.

Nella sezione fessurata, indicata con  $z = 0$ , lo stato di sollecitazione è rappresentato da una distribuzione di sollecitazioni variabili linearmente lungo la sezione reagente, costituita dal cls compresso superiore, dall'eventuale acciaio compresso, e dall'acciaio teso (fig. 3). Risulta nella sezione fessurata e quindi per  $z = 0$

$$(16) \quad \sigma_s(0) = n \frac{M}{J} \bar{x}_s \quad (M \geq M_f).$$

A partire dalla sezione fessurata lo stato di sollecitazione presente nelle sezioni, indicato con  $\Sigma$  ed equivalente alla coppia flettente  $M$ , varia con  $z$ . La zona compressa e la zona tesa della sezione interesseranno le profondità  $x_c(z)$  e  $x_s(z)$ . Sono assunte positive le sollecitazioni di trazione e le ascisse  $x$  dove si esercita trazione.

La sollecitazione presente nell'acciaio teso vale  $\sigma_s(z)$  e la trazione presente al bordo inferiore di cls della sezione è indicata con  $\sigma_{ct}(z)$ . Lo stato di sollecitazione  $\Sigma$  è quindi individuato dalle seguenti quattro funzioni

$$(17) \quad \sigma_s(z)/n, \quad \sigma_{ct}(z), \quad \sigma_c(x, z), \quad x_s(z).$$

Nelle (17), così come nelle relazioni precedenti, i pedici  $s, c, ct$ , relativi alle grandezza  $\sigma$  ed  $x$ , indicano rispettivamente l'acciaio teso, il calcestruzzo compresso ed il calcestruzzo teso. Le due equazioni di equilibrio

$$(18) \quad \int_A \sigma_c dA = 0 \quad \int_A \sigma_c x dA = M$$

unitamente alla (8) non sono quindi sufficienti alla determinazione dello stato di sollecitazione presente tra le fessure. La distribuzione  $\Sigma$  può d'altra parte considerarsi costituita dalla somma di due diverse e particolari distribuzioni: una *primaria*  $\Sigma^p$  ed un'altra *secondaria*  $\Sigma^s$  e quindi ottenuta come (fig. 4)

$$(19) \quad \Sigma = \Sigma^p + \Sigma^s.$$

Gli apici  $p$  ed  $s$  nelle (18) indicano rispettivamente lo stato primario e lo stato secondario di sforzo nella sezione. La distribuzione *primaria*  $\Sigma^p$ , conseguente all'azione di incurvamento dell'elemento prodotto dall'allungamento delle barre di acciaio, *riflette* lo stato di sollecitazione presente nella sezione fessurata  $z = 0$  e sarà quindi costituita da sforzi di compressione nel cls e di trazione nelle sole aree metalliche. Nella  $\sigma_s$  è stato omesso il pedice  $p$  in quanto solo nello stato primario c'è tensione nell'acciaio teso.

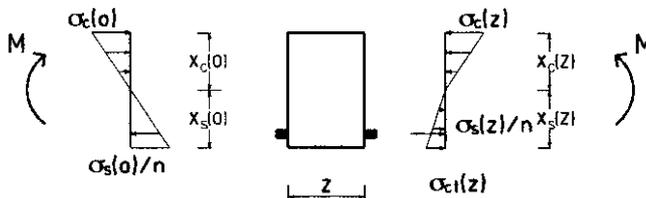


Fig. 3.

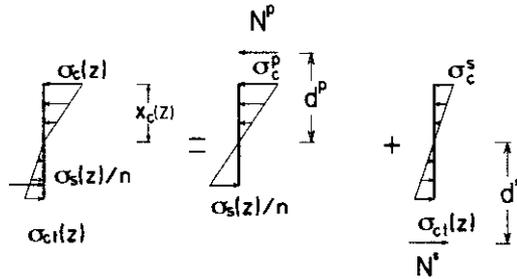


Fig. 4.

Tale distribuzione  $\Sigma^p$  avrà quindi andamento lineare come rappresentato nella fig. 4; il relativo asse neutro, che separa la zona superiore compressa di cls da quella inferiore in cui è invece reagente solo l'area di acciaio, è posto alla stessa distanza  $x_c(z)$  dell'asse neutro relativo allo stato di sollecitazione complessivo. In generale, lo stato di sollecitazione primario è quindi costituito da una distribuzione lineare di sollecitazioni

$$(20) \quad \sigma_c^p = \frac{\sigma_s}{n} \frac{x^p}{x_s}$$

dove l'ascissa  $x^p$  è positiva se relativa a punti posti sotto l'asse neutro. La (20) è definita nel dominio  $A^p$  costituito dal calcestruzzo e dalle aree equivalenti di acciaio compresso, poste al di sopra dell'asse neutro e dall'acciaio teso omogeneizzato in cls.

In linea con quanto si verifica per il caso del tirante, la componente *secondaria*  $\Sigma^s$  sarà invece rappresentata da una distribuzione di sollecitazioni che si attiverà in tutta la sezione di *solo cls* e sarà caratterizzata dalla presenza di trazione nella zona inferiore della sezione, attivata dagli scorrimenti che avvengono tra le barre tese e le fibre adiacenti di cls.

Nella sezione di solo cls le tensioni  $\Sigma^s$  si annulleranno quindi in corrispondenza dell'asse neutro che è sempre quello relativo allo stato di sollecitazione complessivo. Lo stato di sollecitazione secondario è quindi costituito da una distribuzione lineare di sollecitazioni descritta dalla relazione, analoga alla (20)

$$(21) \quad \sigma_c^s = \sigma_{ct} \frac{x^s}{x_s}$$

ma definita nel dominio  $A^s$  costituito dall'area di solo cls della sezione. Con tale decomposizione dello stato di sforzo risulterà allora complessivamente al bordo superiore compresso

$$(22) \quad \sigma_c = - \left( \frac{\sigma_s}{n} + \sigma_{ct} \right) \frac{h - x_s}{x_s}.$$

La (22) costituisce la quarta equazione necessaria per la soluzione del problema utilizzando la (8) e le (18). In definitiva quindi lo stato di sollecitazione primario e

quello secondario vengono quindi rappresentati attraverso le distribuzioni di sforzi

$$(17') \quad \sigma_c^p = \frac{\sigma_s}{n} \frac{x^p}{x_s}, \quad x^p \in A^p; \quad \sigma_c^s = \sigma_{ct} \frac{x^s}{x_s}, \quad x^s \in A^s$$

tale che

$$(23) \quad \sigma_c = \sigma_c^p(x^p) + \sigma_c^s(x^s).$$

Si ha allora dalla prima delle (18)

$$(24) \quad N_p + N_s = 0$$

dove

$$(25) \quad N^p = \frac{\sigma_s}{nx_s} S_n^p \quad N^s = \frac{\sigma_{ct}}{x_s} S_n^s$$

con

$$(26) \quad S_n^p = \int_{A^p} x^p dA \quad S_n^s = \int_{A^s} x^s dA.$$

Di regola risulta  $S_n^p < 0$  e con la prima delle (25) è anche  $N^p < 0$ . Di conseguenza dalla (24) risulta  $N^s > 0$ . Lo stato di sollecitazione primario è quindi costituito da una pressoflessione applicata sul dominio  $A^p$  mentre quello secondario da una tensoflessione sul dominio  $A^s$ . Lo stato di tensoflessione su  $A^s$  per  $z \rightarrow 0$  converge a zero, mentre quello primario di pressoflessione si porta sullo stato di sollecitazione di flessione (16) presente nella sezione fessurata. La condizione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse neutro, costituita dalla seconda equazione delle (18), se si pone

$$(27) \quad d^p = \frac{J_n^p}{S_n^p} \quad d^s = \frac{J_n^s}{S_n^s}$$

con

$$(28) \quad J_n^p = \int_{A^p} x^{p2} dA \quad J_n^s = \int_{A^s} x^{s2} dA$$

fornisce inoltre

$$(29) \quad M^p + M^s = M$$

dove si è posto

$$(30) \quad M^s = N^s d^s \quad M^p = N^p d^p.$$

I momenti  $M^p$  e  $M^s$  rappresentano le quote della coppia flettente agente sull'elemento assorbite dagli stati di sollecitazione primario e secondario. Le forze assiali eccentriche  $N^p$  ed  $N^s$ , eguali ed opposte, distanti rispettivamente  $d^p$  e  $d^s$  dall'asse neutro, equilibrano con i bracci  $d^p$  e  $d^s$  la coppia flettente agente. Dalle (27) si riconosce che  $d^p < 0$ , cioè che  $N^p$  è situato sopra l'asse neutro, e  $d^s > 0$ .

La profondità dell'asse neutro sarà in generale variabile con  $z$  ed il problema della determinazione delle quattro funzioni (17) diventa particolarmente complesso. La soluzione effettiva del problema può però essere agevolmente ottenuta approssimando gli stati di sollecitazione primario e secondario, rispettivamente di

pressoflessione e di tensoflessione, con stati di sollecitazione puramente flessionali.

Lo stato di sollecitazione primario è di semplice flessione nella sezione fessurata e si approssima alla flessione nell'intorno delle fessure. Le distanze  $d^p$  e  $d^s$ , tra i centri di pressione e di trazione e i relativi assi neutri, possono allora essere considerate approssimativamente illimitate e gli sforzi assiali praticamente zero. Per l'equilibrio varrà d'altra parte sempre la (29). In conseguenza delle (25) risulterà allora all'incirca

$$(31) \quad S_n^p = 0 \quad S_n^s = 0.$$

Nelle sezioni dell'elemento comprese tra le lesioni gli stati di sollecitazione primario e secondario saranno quindi approssimativamente rappresentati da distribuzioni lineari di sollecitazioni che si annullano in corrispondenza dei relativi assi neutri baricentrici dei relativi domini  $A^p$  e  $A^s$ . La distribuzione delle sollecitazioni relative allo stato primario tra le fessure riprodurrà quindi fedelmente la distribuzione delle tensioni presente nella sezione fessurata e la tensione nell'acciaio  $\sigma(z)$  sarà quindi ( $0 \leq z \leq L/2$ )

$$(32) \quad \frac{\sigma_s(z)}{n} = \frac{M^p(z)}{\bar{J}} \bar{x}_s.$$

Considerando allora nota la funzione  $\sigma_s(z)$ , la quota primaria del momento flettente agente  $M$  risulta

$$(33) \quad M^p(z) \cong \frac{\sigma_s(z)}{n} \frac{\bar{J}}{\bar{x}_s}$$

dove  $\bar{x}_s$  e  $\bar{J}$  rappresentano rispettivamente la distanza delle armature inferiori dall'asse neutro baricentrico e il relativo momento di inerzia della sezione reagente, che è ancora quella relativa alla sezione fessurata  $z = 0$ . Il momento flettente corrispondente allo stato secondario di conseguenza risulta

$$(34) \quad M^s(z) = M - \frac{\sigma_s(z)}{n} \frac{\bar{J}}{\bar{x}_s}.$$

La tensione di trazione  $\sigma_{ct}(z)$  nella fibra estrema di cls corrispondente allo stato di sollecitazione secondario, in conseguenza della seconda delle (31), risulta

$$(35) \quad \sigma_{ct}(z) \cong \frac{M^s(z)}{J} x_{ct}$$

dove  $x_{ct}$  e  $J$  rappresentano rispettivamente la distanza del bordo inferiore dal baricentro della sezione di solo cls ed il relativo momento di inerzia. Utilizzando la (34) si ha allora, in stretta analogia con la (11) relativa al tirante,

$$(36) \quad \sigma_{ct}(z) = \frac{x_{ct}}{J} \left[ M - \frac{\sigma_s(z)}{n} \frac{\bar{J}}{\bar{x}_s} \right].$$

La (36) costituisce la nuova relazione che lega la tensione di trazione nella fibra inferiore di cls con la sollecitazione nell'acciaio teso: in questa figurano, a parte la  $\sigma_s(z)$ , quantità che non variano con  $z$ . La sostituzione della (36) nella (8) fornisce la semplice

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, del tutto simile alla (12)

$$(37) \quad \frac{d^2 \sigma_s}{dz^2} - \varrho_M^2 \sigma_s = -\frac{8}{d_s^2} \frac{\bar{G}}{E_{ct}} \chi_M \sigma_s(0)$$

dove

$$(38) \quad d_s \varrho_M = 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{\bar{G}}{E_s} (1 + \chi_M)}$$

e

$$(39) \quad \chi_M = \frac{\bar{J}}{\bar{x}_s} \frac{x_{ct}}{J}.$$

La (37) è associata alle condizioni al contorno, analoghe alle (15),

$$(40) \quad \sigma_s(0) = n \frac{M}{\bar{J}} \bar{x}_s \quad \lim_{z \rightarrow L/2} \tau(z) = \tau_1.$$

Le soluzioni della (15) e della (37) sono pertanto formalmente eguali e risulta

$$(41) \quad \begin{aligned} \sigma_s(z) &= -\frac{4\tau_1}{d_s \varrho} \frac{\sinh \varrho z}{\cosh \beta} + (1 - \xi) \sigma_s(0) \cosh \varrho z (1 - \operatorname{tgh} \beta \operatorname{tgh} \varrho z) + \xi \sigma_s(0) \\ \sigma_{ct}(z) &= \frac{\chi}{n} \frac{4\tau_1}{d_s \varrho} \frac{\sinh \varrho z}{\cosh \beta} + \frac{\sigma_s(0)}{n} \xi [1 - \cosh \varrho z (1 - \operatorname{tgh} \beta \operatorname{tgh} \varrho z)] \\ \tau(z) &= \tau_1 \frac{\cosh \varrho z}{\cosh \beta} - \frac{d_s \varrho}{4} \sigma_s(0) (1 - \xi) (\sinh \varrho z - \operatorname{tgh} \beta \cosh \varrho z) \end{aligned}$$

con

$$(42) \quad \beta = \varrho L/2$$

dove

$$(43) \quad \xi = \frac{\chi}{1 + \chi}.$$

Le (41) descrivono completamente lo stato di sollecitazione tra le fessure sia per l'elemento teso che per l'elemento inflesso in c.a. Nel caso del tirante infatti si dovrà assumere  $\varrho = \varrho_N$  con  $\varrho_N$  definito dalla (13) e con la quantità  $\chi_N$  definita dalla (14). Nel caso di elemento inflesso dovrà invece assumersi  $\varrho = \varrho_M$  con  $\varrho_M$  definito dalla (38) e con la quantità  $\chi_M$  definita dalla (39). In entrambi i casi la  $\sigma_{ct}$  cresce monotonicamente verso il centro dell'elemento a partire dalle sezioni di estremità fessurate.

#### 4. DISTANZA TRA LE LESIONI

All'atto della fessurazione, e quindi con

$$(44) \quad \sigma_s(0) = \sigma_{sf}(0)$$

la funzione  $\sigma_{ct}(z)$ , ora determinata, descrive per  $0 \leq z \leq L/2$ , il graduale riprodursi della sollecitazione di trazione nelle fibre di calcestruzzo nel tratto di elemento di trave, teso o inflesso, compreso tra due fessure contigue e distanti  $L$  tra loro. Nella (44)  $\sigma_{sf}(0)$  indica la tensione nell'acciaio teso nelle sezioni fessurate e all'atto della fessura-

zione e quindi pari rispettivamente a

$$(45) \quad \sigma_{sf}(0) = \frac{N_f}{A_s} \quad \text{a} \quad \sigma_{sf}(0) = n \frac{M_f}{\bar{J}} \bar{x}_s$$

a seconda che si tratti di elemento teso o di elemento inflesso e con  $N_f$  e  $M_f$  forniti dalle (4) e (5). È allora possibile che, all'atto del formarsi di due lesioni alla distanza  $L$ , si raggiunga di nuovo in una sezione intermedia tra queste la resistenza a trazione del cls. Si forma così istantaneamente una nuova lesione. Si svilupperà allora una distribuzione regolare di lesioni aventi tutte la stessa distanza  $\lambda$  tra loro quando si raggiunge di nuovo la resistenza a trazione del cls nella sezione di mezzeria tra due lesioni distanti  $L$  tra loro. Dalla seconda delle (41) ponendo allora

$$(46) \quad z = \lambda = \frac{L}{2}$$

risulterà in generale

$$(47) \quad \frac{\chi}{n} \frac{4\tau_1}{d_s \varrho} \operatorname{tgh} \varrho \lambda + \frac{\sigma_{sf}(0)}{n} \xi \left( 1 - \frac{1}{\cosh \varrho \lambda} \right) = \sigma_{crt}.$$

In particolare per il *tirante* risulterà

$$(47') \quad \frac{\chi_N}{n} \frac{4\tau_1}{\sigma_{crt}} \frac{\operatorname{tgh} \varrho_N \lambda}{d_s \varrho_N} + \frac{\sigma_{sf}(0)}{n\sigma_{crt}} \xi_N \left( 1 - \frac{1}{\cosh \varrho_N \lambda} \right) = 1.$$

Poiché d'altra parte risulta

$$(48) \quad \frac{\sigma_{sf}(0)}{n\sigma_{crt}} \xi_N = 1$$

la (47') si semplifica e riesce

$$(49) \quad \sinh \varrho_N \lambda = 2 \sqrt{2} \frac{n\sigma_{crt}}{4\tau_1} \sqrt{\frac{\bar{G}}{E_s} \frac{1}{\chi_N} \left( \frac{1}{\chi_N} + 1 \right)}$$

da cui si ricava facilmente la distanza  $\lambda$ . Dall'ispezione della (49) si riconosce immediatamente che la distanza  $\lambda$  tra le lesioni nella schiera regolare standard cresce con il crescere:

- della resistenza a trazione  $\sigma_{crt}$  del cls
- del modulo di elasticità di scorrimento  $\bar{G}$  tra acciaio e cls
- del diametro delle barre  $d_s$ .

La distanza  $\lambda$  decresce invece al crescere:

- della tensione tangenziale limite dello stato di perfetta aderenza  $\tau_1$
- della percentuale di acciaio  $\mu$
- del coefficiente di omogeneizzazione  $n$ .

Nel caso di elemento inflesso si ha analogamente

$$(50) \quad \chi_M \frac{4\tau_1}{n\sigma_{crt}} \frac{\operatorname{tgh} \varrho_M \lambda}{d_s \varrho_M} + \frac{\sigma_{sf}(0)}{n\sigma_{crt}} \xi_M \left( 1 - \frac{1}{\cosh \varrho_M \lambda} \right) = 1.$$

Per il resto valgono le stesse considerazioni prima formulate per il tirante circa l'influenza che esercitano sulla distanza  $\lambda$  i diversi parametri geometrici e meccanici

dell'elemento. In ogni caso la (50) più esplicitamente può essere scritta anche come

$$(51) \quad \operatorname{tgh} \varrho_M \lambda = 2 \sqrt{2} \frac{n\sigma_{crt}}{4\tau_1} \sqrt{\frac{\bar{G}}{E_s}} \sqrt{\frac{1}{1+\chi_M}} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\chi_M} \right) - \frac{J_{id}/x_i}{\bar{J}/\bar{x}_s} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \varrho_M \lambda} \right) \right].$$

Si evince quindi, sulla base delle precedenti considerazioni, che la distanza  $\lambda$  cresce con il crescere di  $\sigma_{crt}$ , di  $\bar{G}$  e di  $d_s$  e decresce al crescere di  $\tau_1$  e della percentuale di acciaio  $\mu$ : ciò si verifica in quanto al crescere di  $\mu$  cresce il rapporto  $\bar{J}/\bar{x}_s$  e quindi la quantità  $\chi_M$ .

Si effettua ora un confronto tra la lunghezza  $\lambda$  relativa al tirante e quella relativa all'elemento inflesso. A tal fine va osservato che le equazioni (47') e (50) presentano struttura perfettamente eguale salvo che per i valori assunti dai relativi coefficienti di  $\operatorname{tgh} \varrho \lambda$  e di  $(1 - 1/\cosh \varrho \lambda)$ . Dei due coefficienti quello a fattore di  $\operatorname{tgh} \varrho \lambda$  risente molto di più della differenza tra tirante ed elemento inflesso rispetto al coefficiente a fattore di  $(1 - 1/\cosh \varrho \lambda)$ . Risulta infatti

$$(52) \quad \frac{\chi_N}{d_s \varrho_N} \ll \frac{\chi_M}{d_s \varrho_M}$$

nel senso che la prima quantità ha ordine di grandezza almeno cinque volte minore della seconda. Molto più vicine tra di loro sono invece le quantità

$$(53) \quad \frac{\sigma_{yN}(0)}{n\sigma_{crt}} \xi_N \quad \frac{\sigma_{yM}(0)}{n\sigma_{crt}} \xi_M.$$

La prima è infatti pari ad 1 e la seconda risulta invece minore di 1 ma poco discosta da 1. Di conseguenza, atteso il carattere dominante del coefficiente di  $\operatorname{tgh} \varrho \lambda$  nella soluzione della (47') e della (50), se per il caso del tirante il valore  $(\varrho \lambda)_N^*$  è tale da soddisfare alla (47'), nel caso dell'elemento inflesso, in conseguenza del fatto che il coefficiente di  $\operatorname{tgh} \varrho \lambda$  è ora più grande di quello relativo al caso del tirante, solo una quantità  $(\varrho \lambda)_M^{**}$  sensibilmente minore di  $(\varrho \lambda)_N^*$  è soluzione dell'omologa (50). Risulterà allora, a parità di altri fattori,

$$(54) \quad (\varrho \lambda)_M^{**} < (\varrho \lambda)_N^*.$$

Poiché d'altra parte è ancora

$$(55) \quad \varrho_M > \varrho_N$$

risulterà senz'altro

$$(56) \quad \lambda_M < \lambda_N.$$

Le lesioni per l'elemento inflesso dovranno quindi risultare sensibilmente più ravvicinate di quelle relative al caso del tirante. Tale risultato è pienamente confermato dalle esperienze [2-4, 7].

#### ESEMPI NUMERICI

In quanto segue si effettuano delle valutazioni della distanza  $\lambda$  tra le lesioni sia per il caso del tirante che della trave inflessa. Il calcolo è effettuato con riferimento ad un

cls di media resistenza con  $R_{ck} = 300$ . La resistenza a trazione del cls è fissata pari a  $\sigma_{ct} = 26,1$  kg/cmq. Si assume inoltre  $E_s = 2.060.000$  kg/cmq e, sulla base delle precedenti valutazioni,  $\tau_1 = 30$  kg/cmq e  $\bar{G} = 2333$  kg/cmq.

– Il tirante

Sezione tirante: 30 cm × 30 cm; armata con 4.ϕ16  $A_c = 900$  cmq;  $A_s = 8,04$  cmq;  $N_f = 26638$  kg;  $\sigma_{sf}(0) = 3313$  kg/cmq;  $d_s^2 \varrho_N^2 = 0,0103$ ;  $\varrho_N = 0,0634$  cm<sup>-1</sup>;  $\sinh \varrho_N \lambda = 2,4679$   $\varrho_N \lambda = 1,6352$ ;  $\lambda = 25,8$  cm.

Sezione 30 cm × 30 cm; armata con 4.ϕ20  $A_c = 900$  cmq;  $A_s = 12,57$  cmq;  $N_f = 28411$  kg;  $\sigma_{sf}(0) = 2260$  kg/cmq,  $d_s^2 \varrho_N^2 = 0,0110$ ;  $\varrho_N = 0,0523$  cm<sup>-1</sup>;  $\sinh \varrho_N \lambda = 1,6302$ ;  $\varrho_N \lambda = 1,265$ ;  $\lambda = 24$  cm.

Secondo l'Eurocodice 2 per la sezione armata con 4.ϕ16 risulta, con un copriferro di 2,8 cm:  $\lambda = 22$  cm mentre per la sezione armata con 4 ϕ 20 risulta  $\lambda = 19,3$  cm.

– L'elemento inflesso

Sezione 30 cm × 40 cm armata con 4 ϕ 16 inf. ( $\mu = 0,0067$ ).

Sezione completa:  $A_{id} = 1320,63$  cm<sup>2</sup>;  $x_i = 18,17$  cm;  $J_{id} = 203.846,86$  cm<sup>4</sup>.

Sezione di solo cls:  $x_{ct} = 20$  cm;  $J = 160.000$  cm<sup>4</sup>.

Sezione parzializzata:  $\bar{x}_s = 25,64$  cm;  $\bar{J} = 108.919,95$  cm<sup>4</sup>;  $\chi_M = 0,531$ ;  $\xi_M = 0,3468$ ;  $d_s^2 \varrho_M^2 = 0,0139$ ;  $\varrho_M = 0,0736$  cm<sup>-1</sup>;  $\varrho_M \lambda = 0,69$ ;  $\lambda = 9,3$  cm.

Secondo l'Eurocodice 2 per la sezione armata con 4 ϕ 16 con un copriferro di 2,8 cm, risulta  $\lambda = 8,3$  cm.

Sezione 30 cm × 40 cm armata con 3 ϕ 20 inf. ( $\mu = 0,0079$ ).

Sezione completa:  $A_{id} = 1341,37$  cm<sup>2</sup>;  $x_i = 17,89$  cm;  $J_{id} = 210.588,78$  cm<sup>4</sup>.

Sezione di solo cls:  $x_{ct} = 20$  cm;  $J = 160.000$  cm<sup>4</sup>.

Sezione parzializzata:  $\bar{x}_s = 24,73$  cm;  $\bar{J} = 122.064,58$  cm<sup>4</sup>;  $\chi_M = 0,617$ ;  $\xi_M = 0,3816$ ;  $d_s^2 \varrho_M^2 = 0,0147$ ;  $\varrho_M = 0,0605$  cm<sup>-1</sup>;  $\varrho_m \lambda = 0,611$ ;  $\lambda = 10,1$  cm.

Secondo l'Eurocodice 2 per la sezione armata con 3 ϕ 20 e con un copriferro di 3 cm, risulta  $\lambda = 8,8$  cm.

## 5. AMPIEZZA DELLE FESSURE

Si procede ora alla valutazione dell'ampiezza  $\Delta\chi$  delle fessure. Questa è ottenuta come

$$(57) \quad \Delta\chi = -2[w_s(0) - w_{ct}(0)].$$

Si calcola esplicitamente la (57) facendo riferimento alla distanza  $\lambda$  tra le lesioni. Si ha d'altra parte

$$(58) \quad w_s(z) = \int_0^z \varepsilon_s(\zeta) d\zeta + C \quad w_{ct}(z) = \int_0^z \varepsilon_{ct}(\zeta) d\zeta + D$$

dove le dilatazioni  $\varepsilon_s$  ed  $\varepsilon_{ct}$  dell'acciaio e del cls si valutano dalla integrazione delle

funzioni  $\sigma_s(z)$  e  $\sigma_{ct}(z)$  e dove ora è

$$(59) \quad \theta_0 = \varrho_M \lambda / 2 .$$

Le costanti  $C$  e  $D$  che figurano nelle (58) vanno determinate imponendo le condizioni

$$(60) \quad w_s(\lambda/2) = w_{ct}(\lambda/2) = 0 .$$

Ad integrazioni effettuate si ha allora in particolare

$$(61) \quad w_s(0) = \frac{1}{\varrho_m E_s} \left[ \frac{4\tau_1}{d_s \varrho_M} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \theta_0} \right) - \sigma_s(0) \left( (1 - \xi_M) \operatorname{tgh} \theta_0 + \xi \theta_0 \right) \right]$$

e quindi

$$(62) \quad \Delta\chi = \frac{\lambda}{\theta_0} \left[ \varepsilon_s(0) \operatorname{tgh} \theta_0 - \frac{4\tau_1}{E_s d_s \varrho_M} (1 + \chi_M) \left( 1 - \frac{1}{\cosh \theta_0} \right) \right]$$

valida per  $M \geq M_f$ . Dalla (62) il calcolo dell'ampiezza delle fessure viene svolto molto semplicemente. In tale valutazione è decisiva la quantità  $\varepsilon_s(0) \lambda$ .

#### 6. L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA FLESSIONE DELLE TRAVI IN C.A. IN PRESENZA DI FESSURAZIONE

Le barre tese corrono con continuità lungo il bordo inferiore della trave. La loro deformazione è quella che determina l'inflessione dell'elemento. Le fibre di cls, più o meno tese, si interrompono infatti in corrispondenza delle lesioni e la loro deformazione, che comporta il loro slittamento rispetto alle barre, non produce ulteriore allungamento delle barre stesse. Alla sollecitazione  $\sigma_s(z)$  nell'acciaio alla distanza  $z$  dalla sezione fessurata corrisponde la dilatazione  $\varepsilon_s(z)$ . Solo a tale deformazione delle barre, continue nella trave, corrisponde la curvatura dell'elemento alla ascissa  $z$ . La variazione  $d\phi$  di rotazione della sezione dell'elemento all'ascissa  $z$  risulta quindi

$$(63) \quad d\phi = - \frac{\varepsilon_s(z) dz}{\bar{x}_s}$$

e la curvatura locale dell'elemento è ottenuta come (fig. 5)

$$(64) \quad \frac{d\phi}{dz}(z) = - \frac{\varepsilon_s(z)}{\bar{x}_s} .$$

La curvatura locale varia con  $z$  così come  $\varepsilon_s(z)$  essendo  $\bar{x}_s$  costante. La curvatura locale della trave fessurata è pertanto fluttuante intorno alle lesioni.

Procediamo ora alla valutazione della curvatura *media* della trave nella zona compresa tra due lesioni contigue, mediando i valori delle curvature locali (64) nelle varie sezioni. La curvatura media del concio fessurato sulla lunghezza  $\lambda$  tra due lesioni adiacenti vale allora

$$(65) \quad \frac{d\phi_m}{dz} = - \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \frac{\varepsilon_s(z)}{\bar{x}_s} dz .$$

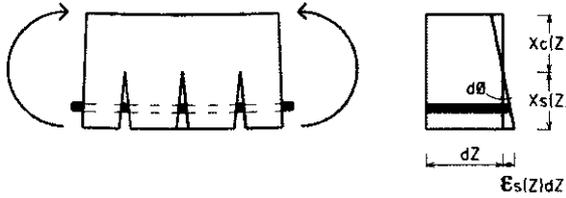


Fig. 5.

Essendo d'altra parte

$$(66) \quad \int_0^{\lambda/2} \varepsilon_s(z) dz = -w_s(0)$$

con la (65), ricaviamo

$$(67) \quad \frac{d\phi_m}{dz} = \frac{2}{\lambda} \frac{w_s(0)}{\bar{x}_s}$$

Utilizzando infine la (61) risulta quindi

$$(68) \quad \frac{d\phi_m}{dz} = -\frac{M}{E_{cl}\bar{J}} \left[ (1 - \xi_M) \frac{\text{tgh } \theta_0}{\theta_0} + \xi \right] + \frac{4\tau_1}{d_s \varrho_M} \frac{1}{E_s \bar{x}_s \theta_0} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \theta_0} \right)$$

La curvatura media dell'elemento tra le fessure è d'altra parte collegata alla funzione abbassamento medio  $v(z)$  attraverso la relazione

$$(69) \quad \frac{d\phi_m}{dz} = \frac{d^2 v}{dz^2}$$

e l'equazione cercata della linea elastica della trave inflessa fessurata in c.a. prende quindi la forma

$$(70) \quad E_{cl} J \frac{d^2 v}{dz^2} = -M \frac{\bar{J}}{J} \left[ (1 - \xi_M) \frac{\text{tgh } \theta_0}{\theta_0} + \xi \right] + \frac{4\tau_1}{d_s \varrho_M} \frac{1}{n \bar{x}_s \theta_0} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \theta_0} \right)$$

Se poniamo

$$(71) \quad \Phi = \frac{\bar{J}/J}{(1 - \xi_M) \frac{\text{tgh } \theta_0}{\theta_0} + \xi} \quad M_0 = \frac{\Phi J}{n \bar{x}_s \theta_0} \frac{4\tau_1}{d_s \varrho_M} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \theta_0} \right)$$

l'equazione della linea elastica allora diventa

$$(72) \quad E_{cl} J \Phi \frac{d^2 v}{dz^2} = -M(z) + M_0$$

In conclusione può allora dirsi che l'elemento fessurato di trave in c.a., della lunghezza pari ad almeno la distanza  $\lambda$  tra le fessure, mediamente si incurva come se avesse una rigidezza flessionale costante pari a  $E_{cl} J \Phi$ , dove  $E_{cl} J$  è la rigidezza flessionale della sezione di solo cls e la quantità  $\Phi$  è il coefficiente fornito dalla prima delle (71), e

come se fosse sollecitato, oltre che dalla coppia flettente  $M(z)$  dipendente dai carichi e dalle reazioni dei vincoli, anche dalla coppia  $M_0$  di verso opposto a quello di  $M(z)$  e costante lungo la trave, fornita dalla seconda delle (71).

6.1. *Un'applicazione al calcolo dell'inflexione di una trave in c.a. appoggiata agli estremi e soggetta ad un carico uniforme.*

Si consideri la trave in c.a. appoggiata agli estremi e di luce  $L$ . La trave è sottoposta al carico uniformemente distribuito  $q$  (fig. 6). Con gli assi indicati in figura le estremità della trave sono localizzate alle ascisse  $z = 0$  e  $z = L$ . Il momento flettente è quindi rappresentato dalla funzione

$$(73) \quad M(z) = \frac{q}{2} z(L - z).$$

La trave è per ipotesi dotata di sezioni ed armature costanti lungo la sua lunghezza ed  $M_f$  è il relativo momento di fessurazione, valutato con la (5). La trave si suddivide in tre diversi tratti. In quello centrale la trave è infatti fessurata, mentre nei due tratti laterali di lunghezza  $d$ , per essere  $M(z) \leq M_f$ , le sezioni sono integre. La lunghezza  $d$  dei due tratti laterali non fessurati è definita allora dalla condizione

$$(74) \quad M_f = \frac{q}{2} d(L - d).$$

Poiché deve essere  $0 \leq d \leq L/2$ , risulta

$$(75) \quad d = \frac{1}{2} L \left[ 1 - \sqrt{1 - 8M_f/qL^2} \right].$$

Nei tratti laterali non fessurati l'equazione della flessione della trave è quella tradizionale. Se allora  $v_1(z)$  è la funzione abbassamento dell'asse della trave in tali tratti, essa dovrà soddisfare all'equazione

$$(76) \quad E_{ct} J_{id} v_1'' = -M(z) \quad (0 \leq z \leq d)$$

dove  $J_{id}$  indica il momento di inerzia della sezione non fessurata, complessivo del contributo dell'acciaio. Nella zona centrale fessurata, se  $v_2(z)$  indica la funzione abbassamento della trave, in conformità alla (72), si ha invece l'equazione

$$(77) \quad E_{ct} J \Phi v_2'' = -M(z) + M_0 \quad (d \leq z \leq L/2)$$

dove  $\Phi$  e  $M_0$  sono le quantità espresse dalle (71). Il tratto fessurato della trave, si in-

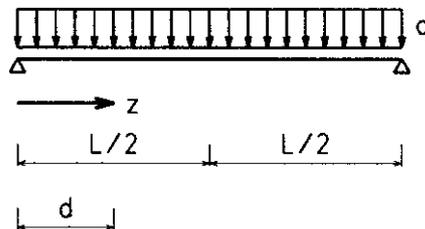


Fig. 6.

flette pertanto come se avesse rigidezza costante pari a  $E_{ct}J\Phi$  e venisse sottoposto, oltre che alla distribuzione di momento flettente  $M(z)$ , dipendente dai carichi e fornito dalla (73), anche ad un momento costante  $M_0$  di segno opposto ad  $M(z)$ . Quest'ultima azione flettente viene quindi realizzata dall'applicazione alle estremità dell'elemento fessurato di due coppie  $M_0$ , negative e quindi tendenti a produrre fibre tese superiori. È immediato riconoscere che le funzioni  $v_1(z)$  e  $v_2(z)$  sono rappresentate come

$$(78) \quad v_1(z) = Bz - \frac{qz^3}{12E_{ct}J_{id}}(L - z/2)$$

$$(79) \quad v_2(z) = H + \frac{M_0}{2\varepsilon_{ct}J\Phi}z(z-L) + \frac{q}{12E_{ct}J\Phi}z\left[\frac{L^3}{2} - z^2(L - z/2)\right]$$

dove le costanti  $B$  ed  $H$  vengono ricavate imponendo le condizioni di raccordo

$$(80) \quad v_1(d) = v_2(d) \quad v_1'(d) = v_2'(d).$$

A calcoli effettuati risulta allora

$$(81) \quad f = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{E_{ct}J\Phi} - \frac{M_0}{2E_{ct}J\Phi} \left( \frac{L^2}{4} - d^2 \right) - \frac{qd^3}{12E_{ct}} \left( \frac{1}{J\Phi} - \frac{1}{J_{id}} \right) \left( 2L - \frac{3}{2}d \right).$$

Ad esempio la trave abbia luce  $L = 6.00$  m e sezione  $30 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$  armata con  $4\phi 16$  inferiori. Il carico  $q$  è pari a  $1500 \text{ kg/m}$ . La resistenza a trazione del cls sia  $\sigma_{ct} = 26,1 \text{ kg/cm}^2$  ed il modulo di elasticità istantaneo del cls risulti  $E_{ct} = 300.000 \text{ kg/cm}^2$ . Si ha allora, per la sezione complessiva integra,  $A_{ci} = 1320,60 \text{ cm}^2$ ,  $x_i = 18,17 \text{ cm}$  e  $J_{id} = 203.846,86 \text{ cm}^4$ . Per la sezione fessurata  $\bar{x}_s = 25,64 \text{ cm}$ ,  $\bar{J} = 108.919,66 \text{ cm}^4$ . Per la sezione di solo cls:  $J = 160.000 \text{ cm}^4$ . Il momento di fessurazione vale  $M_f = 2927,6 \text{ kgm}$  e la distanza  $d$  risulta  $d = 74,25 \text{ cm}$ . Si ha poi  $\Phi = 0,698$ ,  $M_0 = 481,76 \text{ kgm}$ . La freccia  $f$  al centro della trave risulta quindi  $f = 0,69 \text{ cm}$ . Le ACI 318-71, sulla base di una lunga esperienza statistica, hanno elaborato una formula empirica che individua il momento di inerzia medio  $J_{me}$  da assumere per il calcolo elastico delle inflessioni delle travi in c.a. sotto i carichi di esercizio  $q$ . Il momento di inerzia medio effettivo  $J_{me}$  da assumere è

$$(82) \quad J_{me} = \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 J_{id} + \bar{J} \left[ 1 - \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right]$$

dove  $J_{id}$  e  $\bar{J}$  sono i momenti di inerzia della sezione integra e fessurata della trave,  $M_a$  il massimo momento flettente nella trave nella condizione di carico per cui è richiesto il calcolo dell'inflessione e  $M_f$  il momento di fessurazione. I valori del momento di inerzia  $J_{me}$  forniti dalla (82) risultano efficaci nella valutazione pratica delle inflessioni delle travi sotto i carichi di esercizio.

Applicando la (82) al calcolo della freccia della trave appoggiata nell'esempio precedente, si ha: sezione  $30 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$  armata con  $4\phi 16$  inferiori.  $J_{id} = 203.860,35 \text{ cm}^4$ ,  $\bar{J} = 108.895,30 \text{ cm}^4$ ,  $M_f = 2927,6 \text{ kgm}$ ,  $M_a = 1500 \times 6,0^2/8 = 6750 \text{ kgm}$ ,  $M_f/M_a = 0,434$  risulta:  $J_{me} = (0,434)^3 \times 203.850,23 + [1 - (0,434)^3] \times 108.895,50 = 116.642,62 \text{ cm}^4$  e pertanto  $f = 0,72 \text{ cm}$ , in buon accordo con la valutazione della freccia effettuata con la (81).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, *Building Code Requirements for Reinforced Concrete*. ACI Standard, 318-71, American Concrete Institute, Detroit 1971.
- [2] R. PARK - T. PAULAY, *Reinforced Concrete Structures*. J. Wiley, New York 1975.
- [3] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, CEB - *Manual of Cracking and Deformation*. Bull. n. 158 E; 1985.
- [4] R. FAVRE - A. W. BEEBY - H. FALKNER - M. KOPRNA - P. SCHIESSL, *Cracking and deformation*. Comité Euro-International de Béton (CEB), Federal Institute of Technology, Lausanne (Switzerland) 1985.
- [5] 1 e 2, Part 1 and 1.1, ENV 1991 e 1992.
- [6] E. COSENZA - C. GRECO, *Il calcolo delle deformazioni nelle strutture in cemento armato*. CUEN Edit., Napoli 1991.
- [7] A. GHALI - R. FAVRE, *Concrete structures: stresses and deformations*. E & FN Spon, 2nd ed., London 1994.
- [8] DD.MM., *Norme tecniche per il calcolo, l'esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche*. G.U. n. 29, 5.2. 1996.
- [9] ACI, Committee 435, *Deflection of Reinforced Concrete Flexural Members*. ACI Journal, v. 63, n. 6, 1996.
- [10] G. TONIOLO, *Tecnica delle costruzioni*. Ed. Masson, Milano 1997.
- [11] P.G. MALERBA, *Analisi limite e non lineare di strutture in calcestruzzo armato*. Collana di Ingegneria Strutturale n. 10, CISM, Udine 1998.
- [12] A.J. BIGAJ, *Bond behaviour of deformed bars in NSC and HSC, part I and II*. Stevin Report, Delft University of Technology, 1999.
- [13] P.G. GAMBAROVA *et al.*, *Aderenza armatura-calcestruzzo e fessurazione longitudinale per barre di piccolo diametro*. Studi e Ricerche, v. 14, Scuola di Specializzazione in c.a., Politecnico di Milano, 1997.

---

Pervenuta il 25 giugno 2002.

Dipartimento di Ingegneria Civile  
Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»  
Via della Ricerca Scientifica - 00133 ROMA  
como@uniroma2.it