
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FABIO BELLISSIMA, ANDREA SORBI, ALDO URSINI

Ricordo di Franco Montagna(*)

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1
(2016), n.2, p. 173–180.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_2_173_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Ricordo di Franco Montagna (*)

FABIO BELLISSIMA

Università di Siena

E-mail: fabio.bellissima@unisi.it

ANDREA SORBI

Università di Siena

E-mail: andrea.sorbi@unisi.it

ALDO URSINI

Università di Siena e Università di Stellenbosch, South Africa

E-mail: aldo.ursini@unisi.it

Franco Montagna è scomparso il 18 febbraio 2015 a Siena. Nato a Broni (PV) il 27 settembre del 1948, si era laureato nel 1972 all'Università di Pavia con una tesi dal titolo *Operatori su classi di algebre*, di cui furono relatore e correlatore rispettivamente Cesare Tonti a Pavia e Roberto Magari a Ferrara. Iniziarono allora l'amicizia e la collaborazione con Roberto Magari, che ebbero un'influenza fondamentale sulla vita scientifica di Franco. Per lavorare con Magari nel 1973 si trasferì a Siena, dove Magari teneva la cattedra di algebra. Borsista CNR dal 1973 al 1975, sempre a Siena ha proseguito la carriera universitaria come professore incaricato (1976-1982), professore associato (1983-1987), professore ordinario; ha ivi diretto la Scuola di Specializzazione in Logica Matematica (1987-1990), ed è stato coordinatore del Dottorato in Logica Matematica ed Informatica Teorica (1994-2002) e del Dottorato in Logica Matematica, Informatica e Bioinformatica (2007-2011). Dal 1987 ha coordinato quattro progetti nazionali di logica matematica, di cui tre consecu-



Fig. 1. – Franco Montagna (1948-2015).

tive progetti PRIN dal 1998 al 2004. È stato supervisore di nove dottorandi e direttore scientifico di vari post-doc italiani e stranieri. La sua attività ha dunque superato ampiamente i confini di una ricerca che, come vedremo, è stata sempre fertile e brillante e di una dedizione appassionata alla didattica, e si è aperta ad un impegno costante nella vita della comunità logica e di quella matematica italia-

(*) Questo ricordo di Franco Montagna si basa largamente sull'articolo di L. Beklemishev e T. Flaminio, *Franco Montagna's work on Provability Logic and Many-Valued Logic*, *Studia Logica* 104 (1):1-46 (2016). Si ringraziano Lev Beklemishev, Tommaso Flaminio, Pavel Pudlak e Sara Ugolini per i loro preziosi consigli e commenti.

ne. Montagna era socio UMI da moltissimi anni, e aveva ricoperto cariche di responsabilità all'interno dell'Associazione Italiana di Logica e sue applicazioni AILA.

Scientificamente parlando, Franco è stato uno dei logici matematici italiani più importanti e conosciuti degli ultimi quaranta anni. Ha pubblicato più di centotrenta articoli, con sessantanove coautori diversi. L'impressionante numero di collaborazioni non stupisce tuttavia chi lo ha conosciuto ed ha saputo apprezzare la sua disponibilità ed il suo modo di fare matematica. Sempre pronto a dare suggerimenti ed a collaborare, aveva una straordinaria capacità di porre domande e proporre problemi: questo è uno dei motivi per cui era particolarmente apprezzato ed amato dai giovani studiosi.

Franco Montagna possedeva una vasta cultura matematica, tale da consentirgli contributi di notevole spessore in molti settori della logica matematica, dell'algebra universale e perfino dell'informatica. I suoi interessi scientifici principali corrispondono a due periodi ben precisi della sua vita di ricerca: la logica della dimostrabilità (fino circa alla fine degli anni 90), le logiche a più valori e le loro connessioni con la teoria della probabilità (dalla fine degli anni 90, fino agli ultimi giorni).

Montagna pubblicò i suoi due primi articoli [1], [2], basati entrambi sulla tesi di laurea, nel 1974. Come appena ricordato, fino alla fine degli anni 90 la sua produzione scientifica si concentra sulle algebre diagonalizzabili e la logica della dimostrabilità. Agli inizi degli anni 70, Roberto Magari aveva proposto le *algebre diagonalizzabili* (oggi conosciute come *algebre di Magari*) al fine di studiare con metodi algebrici i teoremi di incompletezza di Gödel e la teoria della dimostrazione ad essi collegata. Un'*algebra di Magari* è un'algebra di Boole, con un'ulteriore operazione unaria τ , che soddisfa le identità $\tau(1) = 1$, $\tau(x \wedge y) = \tau(x) \wedge \tau(y)$, $\tau(\tau(x) \rightarrow x) = \tau(x)$: tali identità permettono un'adeguata traduzione algebrica delle condizioni di derivabilità di Hilbert-Bernays e Löb. Il successo di questa proposta fu subito notevole, tanto da fare di Siena un centro di fama internazionale per la logica matematica. Contemporaneamente, un approccio simile (di solito descritto come la *logica della dimostrabilità*), basato su strumenti di logica modale invece che di algebra, veniva portato avanti da altri studiosi stranieri, tra cui de

Jongh, Smorýnski e Segerberg: la logica modale corrispondente è la cosiddetta logica **GL**, dove τ corrisponde alla modalità \Box . Se si considera ad esempio l'Aritmetica di Peano (denotata nel seguito PA), l'algebra di Lindenbaum \mathcal{L}_{PA} di PA costituisce un'algebra di Magari, con τ corrispondente al predicato di derivabilità $\text{Pr}_{PA}(v)$ di PA. Un primo importante problema fu quello di vedere se le identità di Magari contengono le identità valide in \mathcal{L}_{PA} . In [3] Franco dimostra che, per ogni naturale n , ci sono identità valide nell'algebra di Magari libera su n generatori ma non valide in tutte le algebre di Magari. La soluzione completa al problema fu data da Solovay (1976): le identità di \mathcal{L}_{PA} sono valide nella teoria equazionale delle algebre di Magari. In [5] Montagna estese e diede la sua versione di questo teorema di completezza aritmetico, dimostrando che l'algebra di Magari libera su un'infinità numerabile di generatori si immerge in \mathcal{L}_{PA} , e più in generale in $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, se T è un'estensione ricorsivamente enumerabile dell'Aritmetica di Peano (o più in generale della cosiddetta Aritmetica Elementare) tale che, in $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, $\tau^n(0) \neq 1$ per ogni n . Se, da quanto sopra, si ricava che la teoria equazionale delle algebre di Magari e l'insieme delle identità di \mathcal{L}_{PA} sono decidibili, subito dopo ([7, 8]) Franco inizia a studiare la teoria al primo ordine delle algebre di Magari, dimostrandone l'indecidibilità in [8] e ponendo in [7] il problema se la teoria al primo ordine di \mathcal{L}_{PA} sia indecidibile (problema risolto positivamente da Shavrukov nel 1994). In [16] Franco studia la logica predicativa della dimostrabilità, mostrando che le più importanti proprietà di **GL** non valgono nella sua versione predicativa **QGL**: in particolare **QGL** non ha la proprietà del punto fisso, non è completa rispetto a nessuna classe di cornici di Kripke, e non è aritmeticamente completa, cioè non contiene la logica predicativa della dimostrabilità relativa all'Aritmetica di Peano, che risulta anche diversa dalla logica predicativa della dimostrabilità della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel. In [4] Franco fornisce una versione algebrica di un predicato non-standard di derivabilità, il cosiddetto *predicato di Feferman*, molto conosciuto ed usato dagli studiosi dei teoremi di incompletezza, che numera in modo "naturale" i teoremi dell'Aritmetica di Peano, ma per il quale non valgono il teorema di Löb né il secondo teorema di incompletezza di Gödel. A tal fine introduce una

classe di algebre di Boole (le ρ -algebre) dotate di una nuova operazione unaria ρ , che soddisfa $\rho(0) = 0$, $\rho(1) = 1$ $\rho(x \wedge y) = \rho(x) \wedge \rho(y)$. L'articolo studia non solo le ρ -algebre, ma anche le (ρ, τ) -algebre, cioè le algebre di Boole dotate di ρ e dell'operazione τ delle algebre di Magari precedentemente descritta. La classe equazionale delle (ρ, τ) -algebre presenta delle differenze notevoli con le algebre di Magari già per quanto riguarda l'esistenza e l'unicità di punti fissi. L'articolo ed i problemi aperti da esso sollevati ebbero un profondo impatto. Il problema della completezza aritmetica per le logiche bimodali corrispondenti alle (ρ, τ) -algebre fu risolto da Shavrukov: modulo l'aggiunta di due nuovi principi, la logica bimodale risulta decidibile ed aritmeticamente completa. La ricerca di Franco (in particolare l'articolo [19]) precorre per certi aspetti la *logica dell'interpretabilità*, che studia modalità binarie del tipo $\alpha \triangleright_T \beta$ (dove T è una teoria formale aritmetica sufficientemente espressiva) a significare che c'è un'interpretazione relativa di $T + \beta$ in $T + \alpha$. In [32] e [36] si dimostra che la logica della interpretabilità sull'Aritmetica di Peano è completa rispetto all'interpretazione di \triangleright_T come conservatività di Π_1^0 -sentenze (cioè ogni Π_1^0 -sentenza dimostrabile in $T + \beta$ è dimostrabile in $T + \alpha$).

A partire dalla fine degli anni novanta, la ricerca di Franco Montagna si rivolge principalmente alla logica fuzzy ed allo studio del problema dell'incertezza dal punto di vista logico ed algebrico: una svolta naturale, resa facile dalla sua profonda conoscenza dell'algebra universale e dal suo interesse per la teoria delle probabilità, entrambi trasmessigli dal suo maestro Roberto Magari. Nello stesso periodo appare il libro *Metamathematics of Fuzzy Logic* di Petr Hájek, amico e collaboratore di Franco, grazie al quale la logica fuzzy diventa popolare in cerchie sempre più ampie di logici e algebristi universali. Hájek introduce la cosiddetta *Basic Logic*, che consiste delle formule validate da tutte le t -norme continue. La semantica algebrica equivalente della Basic Logic è data dalle *BL*-algebre (reticoli residuati limitati, puntati, integrali, commutativi, prelineari e divisibili), la cui varietà è generata dalle sue catene. Montagna dette subito un contributo fondamentale allo studio delle *BL*-algebre: in [68] si mostra che ogni *BL*-algebra totalmente ordinata è somma ordinale di una famiglia di hoops di

Wajsberg, il cui primo addendo è un'algebra di Wajsberg. Un problema importante per le logiche a più valori è quello di trovare teoremi di completezza standard, che facciano riferimento cioè ad algebre aventi come sostegno l'intervallo unitario reale: sempre in [68] si fa vedere che la varietà delle *BL*-algebre è generata da una singola algebra, precisamente la somma ordinale di ω copie della *MV*-algebra standard $[0, 1]_{MV}$. In [62] viene dimostrato un teorema di completezza standard per la logica *MTL*: con l'ausilio di un nuovo metodo (conosciuto come *metodo di Jenei-Montagna*) si fa vedere che ogni *MTL*-algebra linearmente ordinata si immerge in una *MTL*-algebra standard, da cui risulta che *MTL* è completa rispetto alle *MTL*-algebre standard. Altri importanti contributi alle logiche a più valori riguardano: l'introduzione delle logiche $\mathbb{L}II$ e $\mathbb{L}II_{\frac{1}{2}}$ ([55]); varie generalizzazioni delle *BL*-algebre ([51, 59, 87, 89, 104]); uno studio dettagliato su interpolazione, interpolazione di Craig e proprietà di Beth ([88]).

Oltre allo studio delle semantiche algebriche per le logiche a più valori, Montagna si dedicò al problema di stabilire una fondazione della teoria soggettiva della probabilità per eventi a più valori alla maniera di Bruno de Finetti. Ricordiamo al proposito due principali contributi: l'introduzione e lo studio della teoria degli *stati interni* e la nozione di *coerenza stabile* per assegnamenti di probabilità condizionata. La teoria degli stati di una *MV*-algebra può essere intesa, grazie ai risultati principalmente dovuti a Daniele Mundici in questo campo, come una generalizzazione della teoria classica delle probabilità in cui gli eventi formano una *MV*-algebra anziché un'algebra booleana. D'altro canto le *MV*-algebre, essendo intimamente legate alla struttura dei numeri reali, offrono un contesto algebrico in cui uno stato, che normalmente viene definito come una funzione normalizzata ed additiva su una *MV*-algebra e a valori nell'intervallo unitario reale, può essere *internalizzato* diventando così una mappa da una qualsiasi *MV*-algebra in se stessa. Le strutture così definite prendono il nome di *MV-algebre con stati interni* e formano, contrariamente alla teoria ortodossa degli stati, una varietà e possono quindi essere studiate con gli strumenti dell'algebra universale. Franco Montagna, dopo aver introdotto la teoria degli stati interni nel 2009, ha continuato a

studiarne la natura algebrica e a produrre sia risultati di caratterizzazione [117], sia ulteriori generalizzazioni che hanno poi consentito di studiare, in via algebrica, le probabilità imprecise [126, 130], le probabilità condizionali [127] e la loro fondazione logica.

Un altro contributo di Montagna da ricordare riguarda più direttamente gli aspetti fondazionali della probabilità condizionata su eventi MV-algebrici, che prende il nome di *coerenza stabile*. Probabilmente ispirandosi ai risultati classici di Nelson e Krauss, Montagna giustificò questa nozione come segue: supponiamo che β sia un assegnamento, a valori in $[0, 1]$, su una certa classe finita di eventi condizionati $a_1 | b_1, \dots, a_n | b_n$ e sui loro condizionanti b_1, \dots, b_n dove a_i, b_i sono elementi di una MV-algebra; chiediamoci se esiste uno stato s della MV-algebra di partenza tale che per ogni $i = 1, \dots, n$, $\beta(a_i | b_i) = s(a_i \cdot b_i)/s(b_i)$ e $\beta(b_i) = s(b_i)$ (dove, assumendo senza perdita di generalità che a_i e b_i siano funzioni a valori reali, $a_i \cdot b_i$ indica il prodotto punto a punto dei valori di tali funzioni). La precedente domanda ha senso se, per ogni evento condizionante b_i , $s(b_i) > 0$, cosa quest'ultima che non può essere assicurata in linea di principio. Pertanto, un assegnamento β è detto *stabilmente coerente* (o *coerente con stabilità*) se è esso stesso coerente, nel senso di de Finetti, e se esiste una sua variante a valori iperreali β' che, pur rimanendo coerente, soddisfa le seguenti proprietà: per ogni evento condizionante b_i , $\beta'(b_i) > 0$ (anche infinitesimo), e β è infinitamente vicino a β' , ovvero, per ogni evento condizionale $a_i | b_i$, le distanze euclidee $|\beta(a_i | b_i) - \beta'(a_i | b_i)|$ e $|\beta(b_i) - \beta'(b_i)|$ sono date da infinitesimi. Il principale risultato di Montagna in questo ambito dimostra che un assegnamento β è stabilmente coerente se e solo esiste uno stato a valori iperreali s e definito sulla MV-algebra degli eventi tale che, per ogni $i = 1, \dots, n$, le distanze $|\beta(a_i | b_i) - s(a_i \cdot b_i)/s(b_i)|$ e $|\beta(b_i) - s(b_i)|$ sono infinitesime.

Quelli finora accennati non sono i soli filoni di ricerca a cui Franco Montagna ha dato contributi significativi. In teoria della ricorsività, Franco ha studiato questioni di completezza ed universalità per il preordine corrispondente alla dimostrabile implicazione in PA ([18]) e per la relazione di dimostrabile equivalenza in PA ([11]), di cui viene

data in [11] un'interessante ed utile caratterizzazione ricorsiva. Verso la fine degli anni '90 si è occupato di Learning Theory, con riferimento particolare a paradigmi probabilistici, la probabilità essendo stata uno dei suoi interessi più forti da sempre. La profonda conoscenza dei sistemi formali e della teoria della dimostrazione gli hanno permesso di lavorare sullo speed-up delle dimostrazioni (si vedano [26, 29, 37, 38, 39]), con particolare riferimento allo speed-up della lunghezza delle dimostrazioni che si ottiene con l'aggiunta di regole modali, interpretando la modalità \Box con il predicato di derivabilità. Un esempio significativo si trova in [37]: se consideriamo una estensione T , Σ_1 -valida, del frammento $IA_0 + \Omega_1$ dell'aritmetica ed aggiungiamo come ulteriore regola di deduzione una regola modale $A|B$ che soddisfi certe condizioni dette di T -consistenza allora vale una delle due alternative: (a) la regola è dimostrabile nella logica modale della dimostrabilità, le variabili che occorrono in B occorrono anche in A e lo speed-up è polinomiale; (b) lo speed-up è superesponenziale.

BIBLIOGRAFIA di Franco Montagna

- [1] F. MONTAGNA. *Sulle classi quasi ideali*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, (4) 10:85–97, 1974.
- [2] F. MONTAGNA. *Sui limiti di certe teorie*. Le Matematiche, 29(1):221–236, 1974.
- [3] F. MONTAGNA. *For every n , the n freely generated algebra is not functionally free in the equational class of diagonalizable algebras*. Studia Logica, 34(4):315–319, 1975.
- [4] F. MONTAGNA. *On the algebraization of a Feferman's predicate*. Studia Logica, 37(3):221–236, 1978.
- [5] F. MONTAGNA. *On the diagonalizable algebra of Peano Arithmetic*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, (5) 16-B:795–812, 1979.
- [6] F. MONTAGNA. *On the formulas of Peano Arithmetic which are provably closed under modus ponens*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, (5) 16-B:196–211, 1979.
- [7] F. MONTAGNA. *Interpretations of the first-order theory of diagonalizable algebras in Peano Arithmetic*. Studia Logica, 39(4):347–354, 1980.
- [8] F. MONTAGNA. *The undecidability of the first-order theory of diagonalizable algebras*. Studia Logica, 39(4):355–359, 1980.
- [9] F. MONTAGNA e L. PASINI. *The equational class corresponding to the modal logic $K43W$* . Suppl. Bollettino della Unione Matematica Italiana, 2:373–385, 1980.
- [10] F. MONTAGNA. *Some modal logics with quantifiers*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, (5) 17-B:1395–1410, 1980.

- [11] F. MONTAGNA. *Relative precomplete numerations and arithmetic*. Journal of Philosophical Logic, 11(4):419–430, 1982.
- [12] F. MONTAGNA. *ZFC models as Kripke models*. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 29(2):163–168, 1983.
- [13] F. MONTAGNA. *The well-founded algebras*. Algebra Universalis, 16(2):38–46, 1983.
- [14] F. MONTAGNA. *A completeness result for fixed point algebras*. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 30(1):525–532, 1984.
- [15] C. BERNARDI e F. MONTAGNA. *Equivalence relations induced by extensional formulae: Classification by means of a new fixed point property*. Fundamenta Mathematicae, 124(3):221–232, 1984.
- [16] F. MONTAGNA. *The predicate modal logic of provability*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 25(2):179–189, 1984.
- [17] F. MONTAGNA. *Primi risultati sulla logica predicativa modale della dimostrabilità*. In Proceedings of the conference on mathematical logic. Vol. 2 (Siena 1983/1984), pp. 353–355, Siena, 1985. University of Siena. (Italiano).
- [18] F. MONTAGNA e A. SORBI. *Universal recursion theoretic properties of r.e. preordered structures*. The Journal of Symbolic Logic, 50(2):179–189, 1985.
- [19] F. MONTAGNA. *Provability in finite subtheories of PA*. The Journal of Symbolic Logic, 52(2):494–511, 1987.
- [20] D. DE JONGH e F. MONTAGNA. *Generic generalized fixed points*. Studia Logica, 46(2):193–203, 1987.
- [21] F. MONTAGNA. *Iterated extensional Rosser's fixed points and hyperhyperdiagonalizable algebras*. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 33(4):293–303, 1987.
- [22] F. MONTAGNA e G. SOMMARUGA. *Rosser and Mostowski sentences*. Archive for Mathematical Logic, 27(2):115–133, 1988.
- [23] D. DE JONGH e F. MONTAGNA. *Provable fixed points*. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 34(3):229–250, 1988.
- [24] F. MONTAGNA. *Arithmetical self reference and generalized Rosser formulas*. Teoria, 2:145–170, 1988.
- [25] F. MONTAGNA e A. SORBI. *Creativeness and completeness in recursion categories of partial recursive operators*. The Journal of Symbolic Logic, 54(3):1023–1041, 1989.
- [26] D. DE JONGH e F. MONTAGNA. *Much shorter proofs*. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 35(3):247–260, 1989.
- [27] A. CARBONE e F. MONTAGNA. *Rosser orderings in bimodal logics*. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 35(4):343–358, 1989.
- [28] F. MONTAGNA. *Pathologies in two syntactic categories of partial maps*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 30(1):105–116, 1989.
- [29] A. CARBONE e F. MONTAGNA. *Much shorter proofs: a bimodal investigation*. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 36(1):47–66, 1990.
- [30] F. MONTAGNA e G. SOMMARUGA. *A note on some extension results*. Studia Logica, 49(4):591–600, 1990.
- [31] F. MONTAGNA. *The elementary theory of Lindenbaum fixed point algebras is not arithmetical*. PU.M.A Ser A, 1(2):207–216, 1990.
- [32] P. HÁJEK e F. MONTAGNA. *The logic of Π_1 -conservativity*. Archive for Mathematical Logic, 30(2):113–123, 1990.
- [33] R.A. DI PAOLA e F. MONTAGNA. *Some properties of syntactic p -recursion categories generated by consistent recursively enumerable extensions of Peano Arithmetic*. The Journal of Symbolic Logic, 56(2):643–660, 1991.
- [34] D. DE JONGH e F. MONTAGNA. *Rosser orderings and free variables*. Studia Logica, 50(1):71–80, 1991.
- [35] D. DE JONGH, M. JUMELET, e F. MONTAGNA. *On the proof of Solovay's theorem*. Studia Logica, 50(1):51–70, 1991.
- [36] P. HÁJEK e F. MONTAGNA. *The logic of Π_1 -conservativity continued*. Archive for Mathematical Logic, 32(1):57–63, 1992.
- [37] F. MONTAGNA. *Polynomially and superexponentially shorter proofs in fragments of arithmetic*. The Journal of Symbolic Logic, 57(3):844–863, 1992.
- [38] P. HÁJEK, F. MONTAGNA, e P. PUDLAK. *Abbreviating proofs using metamathematical rules*. In P. Clote e J. Krajček, editori, Arithmetic, Proof Theory and Computational Complexity, volume 23 di Oxford Logic Guides, pp. 197–221. Clarendon University Press, Oxford, 1993.
- [39] S. FONTANI, F. MONTAGNA, e A. SORBI. *A note on relative efficiency of axiom systems*. Mathematical Logic Quarterly, 40(2):261–272, 1993.
- [40] F. MONTAGNA. *Paradossi e teoremi di incompletezza: il teorema di Solovay*. In Epistemology of mathematics. 1992–1993 Seminars (Siena/Bologna/Pavia), Formazione e Aggiornamento in Matematica degli Insegnanti, pp. 85–95, Rome, 1994. CNR. (Italiano).
- [41] S. ARTĚMOV e F. MONTAGNA. *On first order theories with provability operators*. The Journal of Symbolic Logic, 59(4):1139–1153, 1994.
- [42] F. MONTAGNA e A. MANCINI. *A minimal predicative set theory*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 35(2):186–203, 1994.
- [43] F. MONTAGNA. *An algebraic treatment of quantifier free systems of arithmetic*. Archive for Mathematical Logic, 35(4):209–224, 1996.
- [44] F. MONTAGNA, G. SIMI, e A. SORBI. *Logic and probabilistic systems*. Archive for Mathematical Logic, 35(4):225–261, 1996.
- [45] R.A. DI PAOLA e F. MONTAGNA. *Progressions of theories of bounded arithmetic*. In A. Sorbi, editore, Complexity, Logic and Recursion Theory, pp. 123–156. Decker, New York, 1996.
- [46] F. MONTAGNA. *Investigations on measure-one identification of classes of languages*. Information and Computation, 143(1):74–107, 1998.
- [47] F. MONTAGNA, G.M. PINNA, e E.B.P. TIEZZI. *Proof systems with cut elimination for $MTL^{\leq Q}$* . In Theoretical computer science (Prato, 1998), pp. 141–152, River Edge, NJ, 1998. World Scientific Publishing.
- [48] F. MONTAGNA e G. SIMI. *Paradigms in measure theoretic learning and in informant learning*. Studia Logica, 62(2):243–268, 1999.
- [49] F. MONTAGNA e D. OSHERSON. *Learning to coordinate: a recursion-theoretic perspective*. Synthese, 118(3):74–107, 1999.
- [50] D. LUCHI e F. MONTAGNA. *An operational logic of proofs with positive and negative information*. Studia Logica, 63(1):7–25, 1999.
- [51] F. MONTAGNA. *An algebraic approach to propositional fuzzy logic*. Journal of Logic, Language, and Information, 9(1):91–124, 2000.

- [52] F. MONTAGNA, G.M. PINNA, e E.B.P. TIEZZI. *A cut-free proof system for bounded metric temporal logic over a dense time domain*. *Mathematical Logic Quarterly*, 46(2):171–182, 2000.
- [53] F. MONTAGNA. *The free BL-algebra on one generator*. *Neural Network World*, 5:837–844, 2000.
- [54] F. MONTAGNA. *Free BL_A algebras*. In A. Di Nola e G. Gerla, editori, *Lectures on Soft Computing and Fuzzy Logic*, *Advances in Intelligent and Soft Computing*, pp. 159–171. Physica-Verlag, Heidelberg, New York, 2001.
- [55] F. ESTEVA, L. GODO, e F. MONTAGNA. *The LII and $LII_{\frac{1}{2}}$ logics: two complete fuzzy systems joining Lukasiewicz and Product Logics*. *Archive for Mathematical Logic*, 40(1):39–67, 2001.
- [56] F. MONTAGNA e V. SEBASTIANI. *Equational fragments of systems for arithmetic*. *Algebra Universalis*, 46(3):417–441, 2001.
- [57] F. MONTAGNA. *Three complexity problems in quantified fuzzy logic*. *Studia Logica*, 68(1):143–152, 2001.
- [58] F. MONTAGNA. *Functorial representation theorems for MV_A algebras with additional operators*. *Journal of Algebra*, 238(1):99–125, 2001.
- [59] F. MONTAGNA e G. PANTI. *Adding structure to MV-algebras*. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 164(3):365–387, 2001.
- [60] M. BAAZ, P. HÁJEK, F. MONTAGNA, e H. VEITH. *Complexity of t -tautologies*. *Annals of Pure and Applied Logic*, 113(1-3):3–11, 2001.
- [61] F. MONTAGNA, G.M. PINNA, e E.B.P. TIEZZI. *Investigations on fragments of first order branching time logic*. *Mathematical Logic Quarterly*, 48(1):51–62, 2002.
- [62] S. JENEI e F. MONTAGNA. *A proof of standard completeness for Esteva and Godo’s logic MTL*. *Studia Logica*, 70(2):183–192, 2002.
- [63] F. ESTEVA, J. GISPert, L. GODO, e F. MONTAGNA. *On the standard and rational completeness of some axiomatic extensions of the monoidal t -norm logic*. *Studia Logica*, 71(2):199–226, 2002.
- [64] F. MONTAGNA e H. ONO. *Undecidability and standard completeness for Esteva and Godo’s logic MTL \forall* . *Studia Logica*, 71(2):227–245, 2002.
- [65] R. CIGNOLI, F. ESTEVA, L. GODO, e F. MONTAGNA. *On a class of left continuous t -norms*. *Fuzzy Sets and Systems*, 131(3):283–296, 2002.
- [66] S. JENEI e F. MONTAGNA. *A general method for constructing left-continuous t -norms*. *Fuzzy Sets and Systems*, 136(3):263–282, 2003.
- [67] F. MONTAGNA, G.M. PINNA, e E.B.P. TIEZZI. *A tableau calculus for Hájek’s logic BL*. *Journal of Logic and Computation*, 13(2):241–259, 2003.
- [68] P. AGLIANÒ e F. MONTAGNA. *Varieties of BL-algebras I: General properties*. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 181(2-3):105–129, 2003.
- [69] S. JENEI e F. MONTAGNA. *On the continuity points of left-continuous t -norms*. *Archive for Mathematical Logic*, 42(8):797–810, 2003.
- [70] F. ESTEVA, L. GODO, P. HÁJEK, e F. MONTAGNA. *Hoops and fuzzy logic*. *Journal of Logic and Computation*, 13(4):531–545, 2003.
- [71] F. MONTAGNA e L. SACCHETTI. *Kripke-style semantics for many-valued logics*. *Mathematical Logic Quarterly*, 49(6):629–641, 2003. (Erratum: *Mathematical Logic Quarterly*, 50(1) (2003), p. 104–107).
- [72] L. MAGNONI, M. MIROLLI, e F. MONTAGNA. *PAC learning of probability distributions over a discrete domain*. *Theoretical Computer Science*, 299(1-3):161–200, 2003.
- [73] J. CASE, S. JAIN, F. MONTAGNA, G. SIMI, e A. SORBI. *On learning to coordinate: random bits help, insightful normal forms, and competency isomorphisms*. In M.K. Warmuth e B. Schölkopf, editori, *Learning Theory and Kernel Machines*, 16th Annual Conference on Learning Theory and 7th Kernel Workshop, COLT/Kernel 2003 Washington, DC, USA, August 2003, *Proceedings*, volume 2777 di *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 699–713. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [74] F. ESTEVA, L. GODO, e F. MONTAGNA. *Equational characterization of subvarieties of BL generated by t -norm algebras*. *Studia Logica*, 76(2):161–200, 2004.
- [75] F. MONTAGNA. *Storage operators and multiplicative quantifiers in many-valued logics*. *Journal of Logic and Computation*, 14(2):299–322, 2004.
- [76] M. BAAZ, F. CIBATTONI, e F. MONTAGNA. *Analytic calculi for monoidal t -norm based logic*. *Fundamenta Informaticae*, 59(4):315–332, 2004.
- [77] F. MONTAGNA. *Subreducts of MV-algebras with product and product residuation*. *Algebra Universalis*, 53(1):109–137, 2005.
- [78] F. MONTAGNA. *On the predicate logics of continuous t -norm BL-algebras*. *Archive for Mathematical Logic*, 44(1):97–114, 2005.
- [79] T. FLAMINIO e F. MONTAGNA. *A logical and algebraic treatment of conditional probability*. *Archive for Mathematical Logic*, 44(2):245–262, 2005.
- [80] J. CASE, S. JAIN, F. MONTAGNA, G. SIMI, e A. SORBI. *On learning to coordinate: random bits help, insightful normal forms, and competency isomorphisms*. *Journal of Computer and System Sciences*, 71(3):308–332, 2005.
- [81] A. DEL LUNGO, G. LOUCHARD, C. MARINI, e MONTAGNA. *The guessing secrets problem: a probabilistic approach*. *Journal of Algorithms*, 55(2):142–176, 2005.
- [82] F. MONTAGNA e L. SPADA. *Continuous approximations of product implication in MV-algebras with product*. *Soft Computing*, 9:149–154, 2005.
- [83] A. DI NOLA, F. ESTEVA, L. GODO, e F. MONTAGNA. *Varieties of BL-algebras*. *Soft Computing*, 9:875–888, 2005.
- [84] F. MONTAGNA. *Generating the variety of BL-algebras*. *Soft Computing*, 9:869–874, 2005.
- [85] F. MONTAGNA. *From lattice ordered abelian groups to the algebras of many-valued logic: a survey*. *Pure Mathematics and Application*, 16(1-2):89–102, 2005.
- [86] G. LOUCHARD, C. MARINI, F. MONTAGNA, e G. SIMI. *A variant of the guessing secrets game*. *Pure Math. Appl*, 16(3):295–305, 2005.
- [87] P. JIPSEN e F. MONTAGNA. *On the structure of generalized BL-algebras*. *Algebra Universalis*, 55(2-3):227–238, 2006.
- [88] F. MONTAGNA. *Interpolation and Beth’s property in propositional many-valued logics: A semantic investigation*. *Annals of Pure and Applied Logic*, 141(1-2):148–179, 2006.
- [89] F. MONTAGNA, C. NOGUERA, e R. HÖRČÍK. *On weakly cancellative Fuzzy Logics*. *Journal of Logic and Computation*, 16(4):423–450, 2006.
- [90] F. BELLISSIMA e F. MONTAGNA. *Matematica per l’informatica. Aritmetica e logica, probabilità e grafi*. Carocci, Roma, 2006.

- [91] G. METCALFE e F. MONTAGNA. *Substructural fuzzy logics*. The Journal of Symbolic Logic, **72**(3):834–864, 2007.
- [92] E. MARCHIONI e F. MONTAGNA. *Complexity and definability issues in $LPI_{\frac{1}{2}}$* . Journal of Logic and Computation, **17**(2):311–331, 2007.
- [93] P. AGLIANÒ, I.M.A. FERREIRIM, e F. MONTAGNA. *Basic hoops: an algebraic study of continuous t-norms*. Studia Logica, **87**(1):73–98, 2007.
- [94] F. MONTAGNA, C. MARINI, e G. SIMI. *Product logic and probabilistic Ulam games*. Fuzzy Sets and Systems, **158**(6):639–651, 2007.
- [95] F. MONTAGNA e C. TSINAKIS. *Ordered groups with a modality*. Journal of Pure and Applied Algebra, **211**(2):511–531, 2007.
- [96] S. BOVA e F. MONTAGNA. *Proof search in Hájek's Basic Logic*. ACM Transactions on Computational Logic, **9**(3):(21) 1–26, 2008.
- [97] E. MARCHIONI e F. MONTAGNA. *On triangular norms and uninorms definable in $LPI_{\frac{1}{2}}$* . International Journal of Approximate Reasoning, **47**(2):179–201, 2008.
- [98] P. HÁJEK e F. MONTAGNA. *A note on the first-order logic of complete BL-chains*. Mathematical Logic Quarterly, **54**(4):435–446, 2008.
- [99] F. MONTAGNA. *Petr Hájek's Logic BL and BL-algebras*. In P. Cintula, Z. Hainoková, and V. Švejdar, editori, Witnessed years—essays in honour of Petr Hájek, volume **10** di Tributes, pp. 9–12. College Publications, London, 2009.
- [100] P. JIPSEN e F. MONTAGNA. *The Blok-Ferreirim theorem for normal GBL algebras and its application*. Algebra Universalis, **60**(4):381–404, 2009.
- [101] S. BOVA e F. MONTAGNA. *The consequence relation in the logic of commutative GBL-algebras is PSPACE-complete*. Theoretical Computer Science, **410**(12-13):1143–1158, 2009.
- [102] R. HÖRČÍK e F. MONTAGNA. *Archimedean classes in integral, commutative residuated lattices*. Mathematical Logic Quarterly, **55**(3):320–336, 2009.
- [103] P. CINTULA, F. ESTEVA, J. GISPERT, L. GODO, F. MONTAGNA, and C. NOGUERA. *Distinguished algebraic semantics for t-norm based fuzzy logics: Methods and algebraic equivalencies*. Annals Pure Applied Mathematical Logic, **160**(1):53–81, 2009.
- [104] M. BIANCHI e F. MONTAGNA. *Supersound many valued logics and Dedekind-McNeille Completions*. Archive for Mathematical Logic, **48**(8):719–736, 2009.
- [105] G. SERGIOLI, A. LEDDA, F. PAOLI, R. GIUNTINI, T. KOWLASKI, F. MONTAGNA, H. FREYTES, e C. MARINI. *Two cooperative versions of the Guessing Secrets problem*. Information Sciences, **179**(20):3645–3658, 2009.
- [106] T. FLAMINIO e F. MONTAGNA. *MV-algebras with internal states and probabilistic fuzzy logics*. International Journal of Approximate Reasoning, **50**(1):138–152, 2009.
- [107] A. CIABATTONI, G. METCALFE e F. MONTAGNA. *Algebraic and proof-theoretic characterizations of truth stressers for MTL and its extensions*. Fuzzy Sets and Systems, **161**(3):369–389, 2010.
- [108] F. MONTAGNA e C. NOGUERA. *Arithmetical complexity of first order predicate fuzzy logics over distinguished semantics*. Journal of Logic and Computation, **20**(2):399–424, 2010.
- [109] P. JIPSEN e F. MONTAGNA. *Embedding theorems for normal GBL-algebras*. Journal of Pure and Applied Algebra, **214**(9):1559–1575, 2010.
- [110] F. MONTAGNA e C. TSINAKIS. *Ordered groups with a conucleus*. Journal of Pure and Applied Algebra, **214**(1):71–88, 2010.
- [111] M. FEDEL, H. HOSNI, e F. MONTAGNA. *A logical characterization of coherence for imprecise probabilities*. International Journal of Approximate Reasoning, **52**(8):1147–1170, 2011.
- [112] F. MONTAGNA. *A notion of coherence for books on conditional events in many-valued logic*. Journal of Logic and Computation, **21**(5):829–850, 2011.
- [113] F. MONTAGNA. *An algebraic treatment of imprecise probabilities*. Demonstratio Mathematica, **44**(3):497–509, 2011.
- [114] F. MONTAGNA. *Completeness with respect to a chain and universal models in fuzzy logic*. Archive for Mathematical Logic, **50**(1-2):161–183, 2011.
- [115] T. FLAMINIO e F. MONTAGNA. *Models for many-valued probabilistic reasoning*. Journal of Logic and Computation, **21**(3):447–464, 2011.
- [116] T. CORTONESI, E. MARCHIONI, e F. MONTAGNA. *Quantifier elimination and other model-theoretic properties of BL-algebras*. Notre Dame Journal of Formal Logic, **52**(4):339–379, 2011.
- [117] A. DVUREČENSKIJ, T. KOWALSKI, e F. MONTAGNA. *State morphism MV-algebras*. International Journal of Approximate Reasoning, **52**(8):1215–1228, 2011.
- [118] M. BIANCHI e F. MONTAGNA. *n-contractive BL-logics*. Archive for Mathematical Logic, **50**(3-4):257–285, 2011.
- [119] M. BUSANICHE e F. MONTAGNA. *Hájek's logic BL and BL-algebras*. In P. Cintula, P. Hájek, e C. Noguera, editori, Handbook of Mathematical Fuzzy Logic - Volume 1, volume **37** di Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations, pp. 355–447. College Publications, London, 2011.
- [120] P. HÁJEK, F. MONTAGNA, e C. NOGUERA. *Arithmetical complexity of first-order fuzzy logics*. In P. Cintula, P. Hájek, e C. Noguera, editori, Handbook of Mathematical Fuzzy Logic - Volume 2, volume **38** di Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations, chapter XI, pp. 853–908. College Publications, London, 2011.
- [121] F. MONTAGNA. *Partially undetermined many-valued events and their conditional probability*. Journal of Philosophical Logic, **41**(3):563–593, 2012.
- [122] F. MONTAGNA. *A-core fuzzy logics with propositional quantifiers, quantifier elimination and uniform Craig interpolation*. Studia Logica, **100**(1-2):289–317, 2012.
- [123] F. MONTAGNA e D. PIANIGIANI. *A short note on essentially Σ_1 sentences (revised and extended version)*. Logica Universalis, **7**(1):103–111, 2013.
- [124] S. JENEI e F. MONTAGNA. *Strongly involutive uninorm algebras*. Journal of Logic and Computation, **23**(3):707–726, 2013.
- [125] S. BOVA e F. MONTAGNA. *Polynomial space hardness without disjunction property*. Theoretical Computer Science, **467**:1–11, 2013.
- [126] M. FEDEL, K. KEIMEL, F. MONTAGNA, e W. ROTH. *Imprecise probabilities, bets and functional analytic methods in Lukasiewicz logic*. Forum Mathematicum, **25**(2):405–441, 2013.
- [127] M. FEDEL, F. MONTAGNA, e G. SCIANNA. *Non-standard probability, coherence and conditional probability on many-valued events*. International Journal of Approximate Reasoning, **54**(5):573–589, 2013.

- [128] A. CIABATTONI e F. MONTAGNA. *Proof theory for locally finite many-valued logics: Semi-projective logics*. Theoretical Computer Science, **480**:26–42, 2013.
- [129] G. METCALFE, F. MONTAGNA, e C. TSINAKIS. *Amalgamation and interpolation in ordered algebras*. Journal of Algebra, **402**:21–82, 2014.
- [130] H. HOSNI e F. MONTAGNA. *Stable non-standard imprecise probabilities*. In A. Laurent, O. Strauss, B. Bouchon-Meunier, e R.R. Yager, editori, Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems: 15th International Conference, IPMU 2014, Montpellier, France, July 15-19, 2014. Proceedings, Part III., volume **444** di Communication in Computer and Information Science, pp. 436–445, New York, USA, 2014. Springer-Verlag.
- [131] S. JENEI e F. MONTAGNA. *A classification of certain group-like FL_e -chains*. Synthese, **192**(7):2095–2121, 2015. (Erratum: Synthese, **193**(1) (2016), p. 313).
- [132] F. MONTAGNA, G. SIMI, e A. SORBI. *Taking the Piraha seriously*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **21**(1-3):52–69, 2015.
- [133] F. MONTAGNA e S. UGOLINI. *A categorical equivalence for product algebras*. Studia Logica, **103**(2):345–373, 2015.
- [134] M. BIANCHI e F. MONTAGNA. *Trakhtenbrot theorem and first-order axiomatic extensions of MTL*. Studia Logica, **103**(6):1163–1181, 2015. (Erratum: Studia Logica **103**(6) (2015), p. 1183).
- [135] V. MARRA, F. MONTAGNA, e L. SPADA. *Logiche polivalenti*. In H. Hosni, G. Lolli, e C. Toffalori, editori, Le direzioni della ricerca logica in Italia. Edizioni della Normale, Pisa, 2015.
- [136] M. BONGINI, A. CIABATTONI, e F. MONTAGNA. *Proof search and Co-NP completeness for many-valued logics*. Fuzzy Sets and Systems, **292**:130–149, 2016.
- [137] E.A. CORSI e F. MONTAGNA. *The Rényi-Ulam games and many-valued logics*. In corso di stampa su *Fuzzy Sets and Systems*.
- [138] T. FLAMINIO, H. HOSNI, e F. MONTAGNA. *A characterization of strict coherence for infinite-valued events*. In preparazione.

*Fabio Bellissima, Andrea Sorbi e Aldo Ursini, docenti all'Università di Siena, sono stati colleghi di
Franco Montagna*