Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Aldo Brigaglia

Es steht alles schon bei Dedekind: aspetti dell'influenza dell'opera di Dedekind sulla matematica italiana

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2017), n.1, p. 17–43.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_1_17_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2017.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 2, N. 1, Aprile 2017, 17-43

Es steht alles schon bei Dedekind:

aspetti dell'influenza dell'opera di Dedekind sulla matematica italiana

Aldo Brigaglia
Università di Palermo
E-mail: aldo.brigaglia@gmail.com

Nel ricordo di Anna

Sommario: *In questa breve rassegna dell'opera algebrica di Richard Dedekind, si sono esaminati i grandi contributi del matematico tedesco alla teoria degli ideali e delle sue applicazioni alla teoria dei numeri e alla geometria algebrica, dando anche un cenno alla difficile assimilazione delle sue idee innovative da parte dell'ambiente matematico che si concluderà soltanto negli anni '20 del XX secolo, con la definitiva consacrazione attraverso l'opera di Emmy Nöther e della sua scuola. Una particolare attenzione è data alla (mancata) diffusione dell'opera di Dedekind in Italia. Un cenno è anche dedicato all'opera di Dedekind nella teoria delle algebre (numeri ipercomplessi).*

Abstract: *In this short paper, I have examined the algebraic work of Richard Dedekind and in particular, his theory of ideals and its use in number theory and algebraic geometry. I have also scrutinized the difficult reception of his innovative ideas in the mathematical milieu until the twenties of the 20th century, when Emmy Nöther and her school fully developed his algebraic ideas. I looked in particular at the inadequate diffusion of Dedekind's work in Italy. I have also shortly examined Dedekind's contributions to the theory of algebras (hypercomplex numbers).*

Considerazioni introduttive

Es steht alles schon bei Dedekind, è stato già fatto tutto da Dedekind, questo scriveva Emmy Nöther, la mamma dell'algebra. Così almeno racconta van der Waerden che ha anche scelto questa frase come epigrafe delle sue reminiscenze sulle fonti del suo *Moderne Algebra*. E in effetti queste poche parole sintetizzano in modo profondo le trasformazioni che l'algebra aveva subito negli ultimi decenni del XIX secolo per poi dar vita nel primo quarto del secolo successivo quella che viene chiamata, ormai impropriamente, algebra moderna. Anche se, ovviamente, la matematica in questi cento anni trascorsi dalla morte di Dedekind, ha fatto giganteschi passi avanti, credo sia giusto riconoscere che una parte significativa della matematica nel XX (e in questo scorcio del XXI) secolo si è mossa nel quadro di un programma di ricerca da lui delineato già negli anni '70 dell'Ottocento. Mi riferisco allo sviluppo dell'algebra commutativa e del suo ruolo nell'unificazione tra teoria dei numeri e geometria algebrica e al delinearsi della teoria generale delle algebre.

L'opera di Dedekind tra il 1871 e il 1882, tra la sua prima appendice al trattato di teoria dei numeri e il suo articolo (scritto con Weber) sulla teoria delle funzioni algebriche, contiene se non la realizzazione almeno l'abbozzo compiuto di un programma di ricerca di straordinaria valenza: la creazione degli strumenti algebrici necessari per l'unificazione di due tra le più profonde creazioni della matematica dell'Ottocento, cioè la teoria dei numeri e la geometria algebrica.

It was a pity that my Italian teachers never told me there was such a tremendous development of the algebra that is connected with algebraic geometry (Zariski). Questa frase rappresenta bene la "occasione mancata" che lo scarso recepimento del

Accettato: il 28 ottobre 2016.

programma di Dedekind ha costituito per la matematica italiana. Non ho la pretesa di indicare i motivi profondi di questo scarso recepimento, mi limiterò a tentare di descrivere in breve i (comunque non pochissimi) momenti di effettiva influenza del progetto matematico di Dedekind sui matematici italiani.

Dedekind e la teoria degli ideali

Gli anni ’70 dell’Ottocento sono anni entusiasmanti per i matematici, anni che annunciano profondi mutamenti. In qualche misura, possiamo dire che negli anni ’70 maturano e danno frutti quei primi germi che già avevano cominciato ad apparire nella prima metà del secolo. La geometria non euclidea cessa di essere una mera curiosità per merito di Beltrami, nel 1868, e di Klein, nel 1871; è degli anni ’70 la piena assimilazione dell’opera di Riemann in geometria algebrica, sulla scia di Clebsch da parte di Brill e Nöther, così come è del 1872 il programma di Erlangen di Klein e degli anni ’70 lo sviluppo del programma di “aritmetizzazione” dell’analisi di Weierstrass. Naturalmente non si può dimenticare che sarà proprio nello stesso 1872 (“annus mirabilis” per la matematica) che Cantor e lo stesso Dedekind daranno contemporaneamente la prima definizione rigorosa dei numeri reali, ponendo le basi per l’irrompere della teoria degli insiemi nella matematica. Infine vorrei indicare come i numerosi esempi di numeri “immaginari” derivati dai complessi (dai quaternioni agli ottonioni) troveranno una loro sistemazione teorica complessiva nei primissimi anni ’80 ad opera di Weierstrass e ancora dello stesso Dedekind. Di queste profonde trasformazioni, che avranno bisogno di un cinquantennio per essere del tutto assimilate, Dedekind è certamente uno dei protagonisti maggiori.

Darò una breve descrizione dell’opera algebrica di Dedekind, peraltro notissima; per maggiori riferimenti mi riferisco alla bibliografia che verrà indicata nelle note.

Il contributo più importante e più noto di Dedekind all’algebra sta certamente nello studio degli anelli e soprattutto nella teoria degli ideali. Dedekind pubblicò le sue idee sull’argomento per la prima volta nel 1871, sotto forma di supplemento (il X) al volume sulla teoria dei numeri di Dirichlet ([1]).

Il quadro di riferimento dell’intervento di Dedekind sull’argomento è, come è noto, fornito soprattutto dagli studi di Kummer sulla estensione della teoria di Gauss sugli interi gaussiani agli interi ciclotomici. Nel 1844 Kummer aveva mostrato come il teorema cardine della teoria dei numeri, la fattorizzazione unica, venisse a cadere per gli interi ciclotomici di ordine 23. Qualche anno dopo, nel 1847, aveva presentato una sua possibile soluzione del problema introducendo, ove necessario, dei nuovi numeri, detti interi ideali, caratterizzati dal loro prodotto e non costruiti singolarmente; egli mostrava la possibilità di stabilirne le proprietà di divisibilità nell’anello in questione, e la validità della fattorizzazione unica in tale dominio allargato ([2]).

Completamente diverso l’approccio di Dedekind. Forse un lettore moderno, nel leggere questa sua breve introduzione all’algebra moderna, può restare deluso, tanto “naturale” è divenuto oggi questo modo di impostare la matematica. E invece credo che occorra avvicinarsi a questo testo con ammirazione e stupore. Quando Dedekind scrive lo statuto dei nuovi oggetti matematici (siano essi spazi non euclidei o a più dimensioni ovvero nuovi numeri come, oltre i complessi, sono i quaternioni, gli ottonioni, i biquaternioni, ...) è ancora poco chiaro. Ci vorrà un lungo processo di assimilazione e lo stimolo di una grande mole di problemi ed esempi per fare emergere, nel corso di oltre sessanta anni, con straordinaria intuizione algebrica ([3]) l’idea astratta di struttura algebrica.

([1]) Dirichlet, P. G. L., *Vorlesungen über Zahlentheorie*, II ed., Vieweg, 1871. La parte del X supplemento rilevante per la teoria degli ideali è stata tradotta da J. Avigad e pubblicata in rete con una introduzione nel 2004, https://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/Papers/ideals71.pdf

([2]) A mio avviso, l’approccio storiograficamente più valido a questo proposito resta H. Edwards, The Genesis of Ideal Theory, *Archive for History of Exact Sciences*, 23, 1980, pp. 321-378.

([3]) Mi si consentirà questo termine, spero. L’intuizione matematica non è certo fatto esclusivamente geometrico e visivo. In particolare, credo che la sintesi assiomatica di Dedekind e Hilbert abbia richiesto straordinarie doti di intuizione, così come il rigore logico non è solo applicazione meccanica di regole algoritmiche, ma anche profonda visione intuitiva.

L'inizio del supplemento dà una precisa indicazione del metodo seguito da Dedekind: anche se si tratta di forgiare uno strumento adatto per risolvere specifici problemi in teoria dei numeri, il metodo seguito sarà dal generale al particolare. *In striving to introduce the reader to these new ideas, we will establish for ourselves a somewhat higher standpoint, and, from there, begin to introduce concepts that seem to be well-suited to serve as a foundation for higher algebra and related parts of number theory.* ([4]) La teoria non riguarda quindi soltanto la teoria dei numeri, ma serve da fondamento per l'intera algebra superiore. Mi sembra che si delinei così già un progetto preciso.

Il primo concetto nuovo ad essere introdotto è quello di *corpo*. Si tratta di un concetto inizialmente definito nel quadro dei numeri complessi: un sottoinsieme dei complessi chiuso rispetto alle operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Un punto centrale nel modo di procedere di Dedekind è di carattere apparentemente linguistico. Si tratta di estendere a insiemi di oggetti la terminologia usata per i numeri. Così corpi e loro sottocorpi sono detti rispettivamente multipli e divisori; la intersezione di due corpi sarà il loro minimo comune multiplo, i corpi isomorfi vengono detti coniugati, ecc. I corpi a cui Dedekind si riferisce nel seguito sono sempre di dimensione finita sui razionali.

L'altro concetto chiave qui introdotto è quello di intero algebrico, a cui è dedicato l'intero § 160. La definizione è quella che si conosce: un intero algebrico è un numero algebrico che è radice di un polinomio monico a coefficienti interi (ordinari). Può sembrare una definizione "ovvia", ma essa giunge attraverso un processo lungo di maturazione e, anche se vi sono dei (dubbi) precedenti ([5]), Dedekind ha il merito di avere per primo definito l'oggetto stesso della generalizzazione della teoria dei numeri a corpi più vasti. Il concetto di corpo permette di allargare la teoria dai razionali al corpo dei numeri algebrici (e ai suoi sottocorpi); per poter portare avanti la detta generalizzazione occorreva ora sviluppare l'analogo degli interi (ordinari) all'interno dei numeri algebrici. La definizione di Dedekind, quindi, lungi dall'essere ovvia, presuppone una visione d'insieme che già prefigura l'intera teoria come una grande teoria unitaria.

Nel paragrafo successivo dello scritto di Dedekind si delinea pienamente il modo "strutturale" del suo ragionamento. Se esistono analogie profonde tra Interi Algebrici vs. Numeri Algebrici e Interi / Razionali occorre individuarle attraverso una comune struttura. Dedekind giustifica il brusco cambiamento con la necessità di partire dalla massima generalità possibile: *So as not to interrupt the presentation later on, we now interpose some very general observations. This separate inquiry will be of great use to us in our subsequent topic of study, as well as for many others.*

Dopo aver dimostrato la chiusura degli interi algebrici rispetto a somma, differenza e prodotto, Dedekind individua il comune elemento strutturale nel concetto di *modulo* che è introdotto appunto nel § 161, che viene definito come un insieme (per il momento di numeri complessi) chiuso rispetto a somma e differenza. Il resto del paragrafo è dedicato allo sviluppo delle proprietà generali dei moduli, in particolare la congruenza rispetto al modulo e l'idea di modulo finitamente generato.

Dedekind è qui molto accurato nell'esaminare la migliore possibile generalizzazione del concetto di numero primo. Nell'anello degli interi algebrici il concetto di "indecomponibile" è chiaramente inadeguato, dato che non esistono elementi indecomponibili. Infatti ogni intero w ammette sempre infiniti divisori $\sqrt{w}, \sqrt[3]{w}, \ldots$. Da qui l'esigenza di limitarsi a corpi di numeri algebrici finitamente generati, ove peraltro, come aveva indicato Kummer, la decomposizione in fattori indecomponibili non è univoca.

L'affascinante ricerca della "giusta" definizione, che Dedekind compie a questo punto sulle orme di Kummer, merita di essere conosciuta, anche se per un lettore moderno "la fine è nota". Un numero algebrico sarà detto primo se non è invertibile e se ogni volta che divide un prodotto divide uno dei fattori. Segue una sintetica esposizione della teoria dei numeri ideali del matematico berlinese che si

([4]) Le citazioni dal supplemento X dell'edizione del 1871 del Dirichlet sono tutte tratte dalla traduzione inglese del testo di Avigad.

([5]) Vi è tra gli storici una certa discussione sulla priorità nella definizione di intero algebrico, ma non vi è dubbio che Dedekind sia stato il primo – più o meno contemporaneamente a Kronecker – a farne un concetto centrale nella teoria dei numeri.

conclude con alcune precise riserve che mi paiono molto indicative della concezione della matematica di Dedekind: *The only misgiving is that the immediate transfer of the usual concepts of the actual numbers can, initially, easily evoke mistrust of the certainty of the proof. This has caused us to inquire after a means of clothing the theory in a different garb, so that we always consider systems of actual numbers*. In fin dei conti, si tratta "solo" di *rivestire la teoria di Kummer con una divisa diversa*, e considerare sempre *insiemi di numeri effettivi*. In fondo aveva dato inizio a questo modo di vedere le cose già Hamilton: non numeri "immaginari", ma coppie di numeri reali. La grande innovazione di Dedekind è quella di considerare come effettivi oggetti della matematica insiemi, anche infiniti. Siamo nel 1871, e l'anno successivo questa concezione avrà la sua più nota consacrazione nelle notissime definizioni di numero reale da parte di Cantor e dello stesso Dedekind. Il punto di vista insiemistico nella definizione dei concetti base della matematica ha quindi il suo luogo natale proprio in questo X Supplemento. Scrive a questo proposito Pierre Dugac ([6]): *Nous pensons que c'est aussi là, dans ce X^e supplément de Dedekind, dont l'importance ne peut pas être exagérée, qu'il faut chercher le « lieu de naissance » de la théorie des ensembles.*

Di questa stretta relazione tra i due lavori parla lo stesso Dedekind, qualche anno più tardi: *La légitimité ou plutôt la nécessité de telles exigences, qui devraient toujours s'imposer dans l'introduction ou la création de nouveaux éléments arithmétiques, deviendra encore plus évidente par la comparaison avec l'introduction des nombres réels irrationnels, objet dont je me suis occupé dans un écrit spécial.* ([7])

La strategia usata da Dedekind è quindi particolarmente chiara nella parte in cui viene definito il concetto che più qui ci interessa, quello di ideale, che viene introdotto, in modo del tutto assiomatico, nel § 163. Vale la pena leggere direttamente le parole di Dedekind: *Se Ω è un corpo finito qualunque di grado n, e* ***D*** *il sistema dei numeri interi [algebrici] ω contenuti in Ω, noi intendiamo per un ideale di questo campo* ***D*** *ogni sistema di numeri* ***A*** *contenuto in* ***D****, il quale gode le due seguenti proprietà:*

I) *Le somme e le differenze di due numeri qualsivogliano del sistema* ***A*** *appartengono al medesimo sistema* ***A****.*

II) *Ogni prodotto di un numero contenuto in* ***A*** *e di uno in* ***D*** *è un numero del medesimo sistema* ***A*** ([8]).

Dedekind continua definendo l'appartenenza di un elemento ad ***A*** come divisibilità, la congruenza modulo un ideale e la classe laterale modulo l'ideale. Introduce il concetto di sistema completo di rappresentanti delle classi e dimostra poi che le classi laterali modulo un ideale sono un numero finito, che viene definito come la norma di ***A***, N(***A***). Introduce infine il concetto di ideale principale.

Detto questo, viene introdotto il concetto di divisibilità tra ideali, che coincide di nuovo con la inclusione. Dimostra la transitività della relazione di divisibilità e il fatto che ogni ideale ha un numero finito di divisori. A questo punto è possibile introdurre il minimo comune multiplo (intersezione) e il massimo comun divisore (ideale generato dalla somma elemento per elemento) tra ideali e mostrare che essi godono delle stesse proprietà di quelli tra numeri interi.

È ora possibile definire gli ideali primi, che egli introduce come quelli che ora vengono detti massimali. Egli dimostra poi immediatamente che il prodotto di due numeri è congruo a 0 modulo un ideale primo se e solo se uno dei due è congruo a 0 (cioè il fatto che l'anello quoziente è un dominio di integrità) e che questa proprietà caratterizza gli ideali primi ([9]).

([6]) P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin, 1977, p. 29.

([7]) R. Dedekind, Sur la théorie des nombres entiers algébriques, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 11, 1876, pp. 278-288 e (2), 1, 1877, pp. 17-41, 69-92, 207-248.

([8]) Ho qui riportato le parole di Dedekind nella traduzione italiana di Faifofer della terza edizione delle Lezioni di Dirichlet (su cui tornerò tra poco), quindi del § 168 di P. Dirichlet, *Lezioni sulla Teoria dei Numeri*, Venezia, Tipografia Emiliana, 1881. Si tratta infatti della prima pubblicazione in assoluto in italiano della definizione di ideale, un fatto che vale la pena ricordare.

([9]) Va notato che in tal modo Dedekind ha dimostrato che, nel contesto da lui indicato, e cioè di ideali dell'anello degli interi algebrici in un campo di dimensione finita sui razionali, ogni ideale primo è anche massimale.

L'ultimo paragrafo introduce il prodotto di due ideali, dato dalle somme dei prodotti termine a termine, e ne dimostra commutatività, associatività e la moltiplicabilità delle norme. Con questo apparato Dedekind può dimostrare il teorema fondamentale (fattorizzazione unica) che egli esprime in questa forma, chiaramente equivalente: Ogni ideale è il minimo comune multiplo di tutte le potenze di ideali primi che lo dividono.

A questo punto la teoria appare "quasi" completa. Attraverso la definizione di prodotto abbiamo un'altra possibile definizione di divisibilità tra gli ideali di un anello ([10]) $\boldsymbol{D}$, tra l'altro più simile a quella tra gli ordinari interi: si dice che l'ideale $\boldsymbol{A}$ divide l'ideale $\boldsymbol{B}$ se esiste un ideale $\boldsymbol{C}$ tale che $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$; ma non è dimostrato che le due definizioni coincidono: anche se è ovvio che $\boldsymbol{AB}$ è contenuto in $\boldsymbol{A}$ e in $\boldsymbol{B}$ non è chiaro che, viceversa, se $\boldsymbol{C}$ è contenuto in $\boldsymbol{A}$, esista $\boldsymbol{B}$ tale che $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$; su questo problema Dedekind lavorerà duramente per circa cinque anni, finché potrà pubblicare una nuova versione della teoria in una pubblicazione in francese e nella terza edizione delle *Vorlesungen* di Dirichlet ([11]).

Così lo stesso Dedekind commenta le difficoltà incontrate:

L'établissement complet de la liaison entre les deux notions de la divisibilité et de la multiplication des idéaux réussit seulement après que l'on a vaincu des difficultés caractéristiques, profondément attachées à la nature du sujet. ([12]) Risolto questo problema, Dedekind può enunciare il teorema di fattorizzazione unica nel modo più adeguato: *Tout idéal différent de* $\boldsymbol{D}$*, ou est un idéal premier, ou peut être représenté, et cela d'une seule manière, sous forme d'un produit d'idéaux tous premiers.*

Oltre che per questi perfezionamenti e per molti rimaneggiamenti che rendono la trattazione molto più decisamente algebrica (evitando il più possibile il ricorso all'analisi), l'edizione francese contiene molte affermazioni più decisamente orientate verso una nuova visione "strutturale" della matematica ([13]). Mi limito a una citazione che penso rappresenti bene il pensiero e gli intendimenti di Dedekind: *Cette base de la théorie, bien qu'elle ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur, n'est nullement quelle que je me propose d'établir. On peut remarquer, en effet, que les démonstrations des propositions les plus importantes se sont appuyées ... sur un calcul qui coïncide avec la composition des formes quadratiques binaires, enseignée par Gauss. Si l'on voulait traiter de la même manière tous les corps Ω de degré quelconque, on se heurterait à des grandes difficultés, peut-être insurmontables. Mais lors même qu'il n'en serait pas ainsi, une telle théorie, fondée sur le calcul, n'offrirait pas encore, ce me semble, le plus haut degré de perfection; il est préférable, comme dans la théorie moderne des fonctions, de chercher à tirer les démonstrations, non plus du calcul, mais immédiatement des concepts fondamentaux caractéristiques, et d'édifier la théorie de manière qu'elle soit, au contraire, en état de prédire les résultats du calcul ... Tel est le but que je vais poursuivre dans les sections suivantes de ce mémoire.* ([14])

Quindi non è solo relativamente alla soluzione di specifici problemi che Dedekind opera, ma in un quadro ampio, metodologicamente definito. È interessante un confronto sia con l'impostazione di Kummer che con quella, contemporanea e in parte sovrapponentesi a quella di Dedekind, di Kronecker. C'è un indiscutibile nesso concettuale tra le due impostazioni, apparentemente opposte. Entrambi mirano infatti alla massima generalità e astrazione e forgiano strumenti adatti allo scopo ([15]). Una visione insiemistica quella di Dedekind, una computazionale e algoritmica quella di Kronecker, ma en-

([10]) Uso per semplicità il termine anello, che però in quel momento non era ancora stato introdotto.

([11]) Si tratta rispettivamente della già citata Sur la théorie ... e di P. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, dritte Auflage, Braunschweig, 1879, XI Supplemento.

([12]) R. Dedekind, Sur la théorie ... , cit. p. 288.

([13]) Sui contributi di Dedekind all'emergere di una visione strutturale dell'algebra, rinvio a L. Corry, *Modern algebra and the rise of mathematical structures,* Birkhäuser, 1996.

([14]) R. Dedekind, Sur la théorie ..., cit. p. 92.

([15]) Va notato che, per quanto l'impostazione di Dedekind sia vicina per molti versi a quella di Cantor, i rapporti tra i due siano sempre stati improntati a grande correttezza e reciproca stima. Mi sembra che ad entrambi sia stato chiaro di perseguire obiettivi comuni. Così ad esempio Dedekind scriveva a Frobenius, ribadendo l'indipendenza delle rispettive ricerche, *I preserve of him, personally as well, a warm and grateful memory.* La traduzione della lettera in inglese è tratta da H. Edwards, The Genesis..., cit., p. 371.

trambe danno contributi decisivi all'emergere di una visione strutturale della matematica. Su questo argomento rinvio interamente ai lavori di Edwards, che li ha trattati in modo approfondito, sia sul piano storico che su quello matematico. ([16])

La teoria degli ideali in Italia nella seconda metà del XIX secolo

La edizione francese della teoria degli ideali ha una storia interessante. Presento una rapida rassegna dello svolgimento degli avvenimenti ([17]). È Rudolph Lipschitz che l'11 marzo 1876 invita Dedekind a scrivere *a detailed analysis* del suo supplemento X per il Bulletin e che gli manda un esplicito invito in questo senso da parte di uno degli editors della rivista, Jules Hoüel. Lipschitz gli comunica anche il suo disappunto per il mancato apprezzamento del suo lavoro sui numeri algebrici: *In my opinion they are of rare value, and in Germany itself they have not received their full due*. La risposta di Dedekind, del 29 aprile, mostra la sua frustrazione per questo mancato riconoscimento, ma anche la sua volontà di migliorare l'esposizione e di renderla più accessibile: *Your letter brought me great and unexpected joy, since for years I had more or less given up hope of interesting anybody to my general theory of ideals. With the exception of Professor H. Weber ... I can only suppose that the presentation deterred reader through excessive brevity and terseness, and since autumn I have been spending my free time, obtained by resigning my three years directorship of the local Polytechnic, working out a more detailed presentation of the theory of ideals ...*

Forse avrebbe fatto piacere a Dedekind sapere di aver avuto un lettore attento e competente che ne aveva apprezzato i risultati sin dalla prima apparizione del suo testo. Si trattava, in Italia, di Enrico Betti. Possiedo solo un piccolo indizio a sostegno della mia affermazione: si tratta di una lettera di Betti a quello che può essere considerato l'unico specialista italiano di teoria dei numeri in quel momento, Angelo Genocchi. La lettera è del 16 agosto 1871, immediatamente successiva alla pubblicazione del testo di Dirichlet. Scrive Betti: *Avete riveduta la seconda edizione delle Lezioni sulla teoria dei numeri di Dirichlet pubblicati da Dedekind? Vi è il decimo supplemento che non si trovava nella prima edizione il quale mi pare contenga qualche cosa di assai importante sui numeri formati colle radici delle equazioni algebriche.* ([18]) Questa breve citazione non indica certo un inizio di attività attorno alla teoria degli ideali: in particolare l'accoglienza da parte di Genocchi fu del tutto fredda. Malgrado ciò mi sembra significativa. Innanzitutto mostra la straordinaria sensibilità di Betti verso tutto quanto di nuovo e importante avveniva nella matematica mondiale. Basta qui appena ricordare il ruolo avuto da Betti per l'accoglienza delle ricerche di Galois e di Riemann, cioè di due delle più profonde e innovative teorie matematiche della prima parte del XIX secolo.

Nel 1871 Betti era impegnato nello studio attento dell'opera di Riemann ed aveva appena pubblicato la sua più profonda analisi sulla connessione negli spazi a più dimensioni. Dedekind, insieme ad Heinrich Weber era nel frattempo impegnato nella edizione delle opere di Riemann, che verranno pubblicate nel 1876. Ed è all'approccio di Riemann che Dedekind rivolge la sua attenzione. Nella citata lettera a Lipschitz aveva scritto: *My efforts in number theory have been directed ... to achieve in number theory something analogous to what Riemann achieved in function theory, in which connection I cannot suppress the passing remark that Riemann's principles are not being adhered in a significant way by most writers ... Almost always they mar the purity of the theory by unnecessarily bringing in form of representation which should be results, not tools, of the theory.* ([19]) Credo che sia il

([16]) H. Edwards, The Genesis ..., cit.

([17]) Le citazioni sono tutte tratte dall'introduzione di John Stillwell alla traduzione inglese del lavoro sul *Bulletin*: R. Dedekind, *Theory of Algebraic Integers*, Cambridge University Press, 1996.

([18]) In L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli, *La Découverte de la Géométrie non Euclidienne sur la Pseudosphère*, Blanchard, 1998, p. 233.

([19]) La citazione proviene dalla lettera di Lipschitz già citata. La traduzione inglese qui riportata è tratta da H. Edwards, Dedekind's invention of Ideals, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 15, 1983, pp. 8-17.

comune tessuto concettuale ([20]) assorbito dai due matematici a far comprendere, con una rapidità assai maggiore di quanto avveniva nel resto di Europa, lo spirito innovativo delle idee di Dedekind al matematico pisano.

Naturalmente la breve citazione della lettera di Betti non è di per se significativa. Lo stesso Betti avrebbe sempre più trasferito i suoi interessi principali di ricerca in direzione della fisica matematica; però occorre ricordare che Betti era il direttore della Normale di Pisa, che si avviava a divenire la fucina della nuova generazione di matematici italiani ([21]). A parte i corsi ufficialmente svolti, è noto che una parte significativa dell'insegnamento avveniva attraverso colloqui nelle stanze dei docenti. Due anni dopo, nel 1873, entrava nella Normale Luigi Bianchi, il solo matematico italiano della fine del XIX secolo in grado di dare contributi significativi alla teoria dei numeri algebrici. Su alcuni aspetti dell'opera algebrica di Bianchi tornerò più avanti, ma vorrei qui sottolineare come, prima ancora di recarsi in Germania, il matematico parmense avesse nel suo relatore pisano un interlocutore capace di orientarlo nelle nuove discipline algebriche.

Alcuni anni dopo, quasi contemporaneamente ([22]) alla lettera di Lipschitz di proposta di pubblicazione nel *Bulletin*, Dedekind riceveva la inattesa richiesta di uno sconosciuto insegnante del Veneto per la traduzione delle *Vorlesungen* in italiano.

La richiesta proveniva da Aureliano Faifofer e, prima di andare avanti, vorrei aprire una breve parentesi su questo personaggio, su cui peraltro sappiamo poco.

Aureliano Faifofer era nato nel 1843 a Borgo Val Sugana, in provincia di Trento (quindi in territorio austriaco anche dopo la riunificazione del Veneto) e aveva studiato matematica a Padova con Giusto Bellavitis. Dopo un breve periodo di assistentato all'Università, aveva ottenuto la cattedra presso il Liceo Foscarini di Venezia dove rimase fino alla morte, nel 1909.

Faifofer è soprattutto noto per i suoi testi scolastici, di geometria, aritmetica, algebra, ma è anche il traduttore, oltre che delle Vorlesungen, anche di un importante testo tedesco di geometria proiettiva ([23]). Il matematico trentino è noto per le sue notevoli capacità didattiche di cui parlano tutte le sue commemorazioni; ma, se l'albero si riconosce dai frutti, possiamo essere certi di tali qualità dai suoi allievi, Guido Castelnuovo e Guido Fubini. Mi pare che il tessuto di altissimo livello dell'insegnamento secondario nel Veneto della seconda metà dell'Ottocento meriterebbe di essere studiato a fondo. Io qui mi limito a ricordare che Giuseppe Veronese aveva avuto un altro brillante insegnante di matematica all'Istituto Tecnico di Venezia, Pietro Cassani (autore di vari scritti sui fondamenti della geometria degli iperspazi), e che Tullio Levi Civita aveva studiato al Liceo Tito Livio di Padova dove insegnava Paolo Gazzaniga, altro notevole didatta, e cultore di teoria dei numeri, che incontreremo ancora più avanti.

Chiusa questa parentesi, torniamo ai primi approcci di Faifofer con Dedekind per la traduzione. Il 7 giugno 1876 Dedekind scriveva a Beltrami di aver ricevuto da un professore di un liceo veneziano, Aureliano Faifofer, la richiesta di autorizzazione a procedere con la traduzione delle *Vorlesungen*. Faifofer aveva segnalato di aver sottoposto il suo progetto allo stesso Beltrami e a Bellavitis. Ovviamente Dedekind chiede notizie sulla capacità, linguistiche e matematiche, di affrontare l'arduo compito. La risposta di Beltrami è complessivamente rassicurante. Faifofer aveva iniziato la lettura e la traduzione delle Vorlesungen almeno sin dal 1874 *per suo esercizio*, e solo dopo aver superato notevoli difficoltà gli aveva parlato *dell'intenzione che cominciava a formare di dare pubblicità alla sua traduzione, intenzione che io* [Beltrami] *non ho certamente mancato di far plauso* ([24]). Nello stesso

([20]) Vale la pena sottolineare che un altro riferimento comune è quello a Galois. Edwards (ivi) definisce questo modo di trattare gli argomenti matematici dovuto a Galois e a Riemann come "conceptual thinking".

([21]) Su Betti e la scuola pisana, rinvio a U. Bottazzini, *Va' Pensiero*, Il Mulino, 1994.

([22]) Non sono in grado di precisare la data esatta della richiesta di Faifofer. Certo prima del 7 giugno 1876, data in cui Dedekind chiede a Beltrami notizie sul matematico veneto. A Gottinga, nel Nachlass Dedekind, è conservata una parte del carteggio Faifofer / Dedekind. Purtroppo non sono riuscito a consultarlo, cosa che a mio avviso andrebbe fatta.

([23]) T. Reye, *Geometria di Posizione*, Venezia, 1884.

([24]) La lettera di Dedekind e la risposta di Beltrami sono pubblicate in R. Tazzioli. New Perspectives on Beltrami's Life and Work, in S. Coen, *Mathematicians in Bologna*, Birkhäuser, 2012, pp. 477-480.

mese di giugno ha inizio una corrispondenza diretta tra il professore veneto e il matematico tedesco, che dura almeno fino al dicembre del 1877.

Nell'ultima lettera rimasta (del 2 dicembre 1877) Dedekind, coerentemente con la visione pessimistica già espressa a Lipschitz, consiglia Faifofer di omettere nella traduzione proprio il Supplemento X almeno dopo il § 158 (cioè proprio tutta la parte riguardante gli ideali) in quanto egli era *firmly convinced that not a single person reads this presentation of my theory of ideals* (25). Quindi mi pare ragionevole pensare che lo stesso Dedekind aveva intenzione di riscrivere sulla falsariga degli articoli francesi il suo Supplemento (che sarebbe diventato l'XI) in una nuova edizione delle *Vorlesungen*, che appariranno nel 1879.

In ogni caso è proprio questa terza edizione che venne tradotta da Faifofer che la pubblicò nel 1881. Qualche osservazione va fatta.

1. La traduzione è integrale e contiene per intero l'XI Supplemento, che occupa quasi 200 pagine, da p. 424 a p. 614.
2. Il traduttore non ha inserito alcun commento, né alcuna prefazione atta a chiarire le circostanze e gli obiettivi di questa impresa editoriale. La sola variante rispetto all'edizione originale è una Prefazione dello stesso Dedekind, datata 11 novembre 1880. Questa prefazione contiene un significativo riferimento all'opera di Zolotarev (apparsa nello stesso 1880) e anche un annunzio dell'utilizzo della teoria degli ideali nella teoria delle funzioni in un prossimo lavoro in preparazione con Weber (su cui tornerò). Inoltre essa mostra che Dedekind ha seguito la traduzione e che probabilmente la corrispondenza tra i due è continuata ben al di là del 1877.
3. Altro punto importante della Prefazione di Dedekind è il riferimento al prossimo, concomitante lavoro di Kronecker.
4. Non ci sono tracce – a parte il riferimento di Beltrami al suo plauso – di alcun sostegno da parte di esponenti del mondo accademico italiano a questa pubblicazione. Sembra proprio che non solo l'idea, ma il suo sviluppo nel corso del tempo, sia stata opera del solo Faifofer.
5. Non abbiamo notizie (per lo meno, io non ho notizie) circa l'effettivo utilizzo di questa traduzione nell'ambito dell'Università italiana

Tutto ciò mi pare sorprendente. Non conosco altri casi simili. Un oscuro, anche se brillante, insegnante impegna gran parte delle sue energie per comprendere prima e tradurre poi, in un isolamento quasi totale, uno dei lavori più rivoluzionari (almeno per quanto riguarda il Supplemento) della matematica dell'epoca, che sarebbe stato assimilato soltanto dopo alcuni decenni!

Mantenendoci nell'area veneta abbiamo la presenza di un altro matematico che, al di fuori della stretta area accademica, mostra una notevole sensibilità nei confronti delle novità algebriche provenienti da Dedekind. Si tratta di Paolo Gazzaniga su cui è necessario soffermarsi brevemente.

Paolo Gazzaniga (26) era nato in provincia di Cremona nel 1853 e si era laureato a Pavia con Felice Casorati nel 1878, rimanendo per qualche anno in quella Università come suo assistente. Nel 1880 / 1881 andò, come molti suoi coetanei, per un anno a perfezionarsi in Germania, a Berlino, dove seguì i corsi di Weierstrass e di Kronecker. Frutto di questa permanenza fu quello che forse è il suo lavoro più importante, sulle funzioni di variabile complessa (27). Dal 1884 è a Padova, dove insegna nel liceo Tito Livio, dove resterà fino al 1923. Tra i suoi allievi ci sarà Tullio Levi Civita.

(25) Ho ripreso il passo, tradotto in inglese dall'autore, da H. Edwards, The Genesis of ..., cit., p. 349.

(26) Su Paolo Gazzaniga, vedi M. Emaldi, Paolo Gazzaniga e la teoria dei numeri algebrici, in *Le Scienze Matematiche nel Veneto dell'Ottocento, Venezia*, 1994, pp. 209-223. Anche F. Chinello, M. Emaldi, Paolo Gazzaniga e la teoria algebrica dei numeri del secolo XIX, *L'Educazione Matematica*, 3, 1990, pp. 161-177. Su Gazzaniga esiste anche una tesi di laurea, F. Chinello, *Paolo Gazzaniga, un matematico dimenticato*, tesi di laurea, a. a. 1985/86, relatore M. Emaldi, Università di Padova. Purtroppo non ho potuto consultare questa tesi.

(27) P. Gazzaniga, Espressioni di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti, *Annali di Matematica*, (2), 10, pp. 279-290. Su questo lavoro vedi G. Iurato, *On some historical aspects of Riemann zeta functions*, 2, 2013, <hal 00907136>, nel web.

Gazzaniga si inserì subito nell'insegnamento dell'Università come libero docente e incaricato, dal 1884, e in particolare dal 1885 tenne il corso di Teoria dei Numeri, ininterrottamente fino al 1923. Nello stesso 1885 Gazzaniga pubblicò un lavoro originale sulla teoria dei numeri ([28]) e delle dispense del corso.

Possiamo dedurre il contenuto del corso dal testo pubblicato vari anni dopo ([29]).

L'introduzione del libro è significativa: *La "teoria dei numeri", che pure ha sempre esercitato su quanti la coltivarono un fascino potentissimo, è ancor poco diffusa tra noi, probabilmente per la scarsa famigliarità che i giovani delle nostre Università hanno con la lingua, nella quale è scritta la maggior parte dei lavori che ad essa si riferiscono. In questo libro mi sono proposto di raccogliere e di coordinare fra loro le proposizioni fondamentali e alcune tra le più importanti questioni di aritmologia, allo scopo di venire in aiuto ai nostri giovani studiosi e di prepararli e invogliarli a cercare poi con qualche profitto le opere classiche dei grandi Maestri* ([30]). Il testo dà ragione al matematico lombardo. Lo sforzo di mettere a disposizione degli studenti un testo italiano aggiornato è perfettamente raggiunto: oltre alla teoria degli ideali di Dedekind, il lettore viene informato delle opere di Kronecker e di quelle più recenti di Hilbert, di Hensel, di Weber.

Un altro docente formatosi a Padova che dà il suo contributo alla diffusione della teoria dei numeri in Italia è Umberto Scarpis, che si era laureato nell'ateneo patavino nel 1884, subito prima dell'inizio dei corsi di Gazzaniga, con cui presumibilmente era entrato in contatto. Scarpis fu poi insegnante al liceo Minghetti di Bologna e collaboratore di Enriques nelle *Questioni*. Nel 1897 Scarpis pubblicava, in una collana scientifica di ampia diffusione, i manuali Hoepli, un manualetto di teoria dei numeri ([31]) che aveva ancora una volta l'obiettivo di diffondere in Italia questa branca della matematica. Comunque, a differenza di quello di Gazzaniga, si tratta di un testo assai elementare dedicato soprattutto alle congruenze e che non sfiora nemmeno la teoria degli ideali, fermandosi al massimo ad alcune considerazioni sugli interi ciclotomici.

Padova si presenta quindi come uno dei pochissimi centri universitari dove era quantomeno possibile, alla fine dell'Ottocento, avere una informazione non elementarissima sugli sviluppi di quella che ormai in Germania andava affermandosi come disciplina trainante della matematica tutta. Però va detto che, almeno secondo il mio punto di vista, anche lì dove si conosceva e si faceva riferimento alla teoria degli ideali, non sempre il punto di vista largo di Dedekind, il metodo insiemistico e strutturalistico cui il matematico tedesco faceva sempre più riferimento, veniva realmente compreso e assorbito.

Se esaminiamo l'influenza di Dedekind in questo senso più lato, dovremmo quindi fare riferimento non solo alla teoria degli anelli e agli ideali, ma più in generale alla diffusione della visione astratta dell'algebra. Senza voler affrontare in questa sede nella sua complessità questo argomento, mi limito a sottolineare come, nell'ultimo ventennio dell'Ottocento, erano usciti due trattati di grande respiro: quello di teoria dei gruppi di un allievo di Kronecker, Eugen Netto ([32]), e quello di algebra del più stretto collaboratore di Dedekind, Heinrich Weber ([33]). Entrambi i testi entrarono ben presto nella cultura algebrica di piccole, ma attivissime, scuole algebriche italiane. Il primo soprattutto attraverso la traduzione di Giuseppe Battaglini ([34]), il secondo nella profonda

([28]) P. Gazzaniga, Sui residui di ordine qualunque rispetto ai moduli primi, *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, (6), 4, 1885 / 1886, pp. 1271-1280. Questo lavoro è citato ancora, ad esempio in F. Lemmermeyer, *Reciprocity Laws: from Euler to Eisenstein*, Springer, 2013.

([29]) Si tratta del volume P. Gazzaniga, *Gli elementi della teoria dei numeri*, Drucker, 1903. Naturalmente il testo è aggiornato rispetto alle dispense di venti anni prima. Nell'introduzione Gazzaniga precisa la continuità tra il suo corso e il libro: *Esso non è che un ampliamento attuato qua e là di un corso di lezioni che impartisco da qualche anno come libero docente di analisi all'Univ. di Padova.*

([30]) P. Gazzaniga, ivi, p. III.

([31]) U. Scarpis, *Primi elementi della teoria dei numeri*, Hoepli, 1897. Per completezza va indicato che negli stessi anni, una matematica napoletana, Iginia Massarini, su indicazione di Battaglini, traduceva e commentava il testo sulle congruenze, P. Tchebichev, *Teoria delle Congruenze*, Loescher, 1895.

([32]) E. Netto, *Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra*, Teubner, 1882.

([33]) H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Vieweg, 1896.

([34]) E. Netto, *Teoria delle sostituzioni e sue applicazioni all'algebra*, Versione dal tedesco con modificazioni e aggiunte dell'autore per G. Battaglini, Loescher, 1885.

assimilazione di matematici patavini (Gazzaniga) e pisani (Bianchi). La trattazione di Netto, pur muovendosi ancora nel quadro del gruppo di sostituzioni, è di gran lunga più generale e astratta di quelle dei manuali che l'avevano preceduto (Serret, Jordan). Un passo della prefazione può servire a notare questa impostazione: *Non vi ha dubbio che il circolo delle applicazioni di un Algoritmo viene a estendersi quando si viene a liberare i concetti fondamentali e la costruzione di esso da tutte le supposizioni non richieste assolutamente, e a dargli anche possibilità di invadere i campi più disparati di ricerche, per mezzo della generalità degli oggetti sui quali si fa operare. Il fatto che la teoria della formazione dei gruppi è suscettibile di una tale esposizione, parla in favore della sua estesa significazione e del suo avvenire.* ([35]) Attorno alla figura di Battaglini, che dal 1871 al 1885 aveva insegnato a Roma, si formò una prima scuola algebrica moderna italiana ([36]), capace di dare contributi significativi alla ricerca, i cui principali esponenti sono stati Giovanni Frattini e Alfredo Capelli. Per quanto riguarda il corso di Weber, in tre volumi, esso restò il manuale base per la formazione degli algebristi in tutta Europa fino all'apparizione del mitico Van der Waerden. Lo stesso matematico olandese racconta di avere studiato l'algebra *in Heinrich Weber's admirable three-volume textbook on algebra.* ([37]) Non mi soffermerò sulle vicende dell'algebra in Italia, per quanto siano strettamente legate all'influenza dell'opera di Dedekind sulla matematica italiana.

In ogni caso il matematico italiano che realmente aveva assorbito la teoria degli ideali e più in generale la nuova impostazione data da Dedekind alla teoria dei numeri e all'algebra e che si dimostrerà capace di dare significativi contributi alla teoria dei numeri algebrici si stava laureando proprio in quegli anni a Pisa. Si tratta naturalmente di Luigi Bianchi.

([35]) Ivi, p. V.

([36]) Sulla scuola romana di Battaglini e più in generale sull'algebra in Italia alla fine del XIX secolo, vedi L. Martini, Algebraic research schools in Italy at the turn of the twentieth century: the cases of Rome, Palermo, and Pisa, - *Historia Mathematica* 31, 2004, pp. 296-309.

([37]) B. Van der Waerden, On the sources of my book Moderne Algebra, *Historia Mathematica*, 2, 1975, pp. 31-40.

Luigi Bianchi dopo la laurea aveva trascorso un biennio (1879-1881) a Gottinga presso Felix Klein e aveva acquisito un'ottima conoscenza della teoria dei numeri algebrici e delle funzioni automorfe. Anche se l'argomento prediletto della ricerca di Bianchi fu sempre quello della geometria differenziale, le sue ricerche in teoria dei numeri divengono prevalenti nel periodo 1889-1894 e, dal punto di vista didattico, la teoria dei numeri e, più in generale, l'algebra e la teoria dei gruppi di Lie costituirono una sua preoccupazione costante. Da qui una serie di mirabili trattati su svariati argomenti di matematica superiore, aggiornati ai risultati più recenti ([38]). Un quadro del modo complessivamente trasversale, e direi faticoso, con il quale Bianchi, professore alla Normale dal 1881 e all'Università pisana dal 1886, aveva introdotto lo studio dell'algebra "moderna" all'interno della formazione dei normalisti ci è fornito da Gaetano Scorza, che scrive: *Come è noto l'ordinamento delle nostre facoltà matematiche è tale che l'alta aritmetica e l'alta algebra non possono trovarvi posto costante. Non è il caso di parlarne nel primo biennio ...; e nel secondo dedicato ai corsi monografici, esse non si possono far penetrare, per dir così, che di straforo, interpretandole, con criteri assai larghi, come capitoli di Analisi. Così accade bensì che a quando a quando nelle nostre Università qualche corso di Analisi superiore sia dedicato a quelle discipline; ma per necessità di cose, argomenti di più stretta pertinenza dell'Analisi premendo con urgenza maggiore, ciò non può avvenire che assai di rado ed in modo al tutto sporadico; di guisa che la loro influenza sulla nostra cultura sarebbe stata ben scarsa e grama, se non avesse potuto esercitarsi che a traverso quei corsi. Ma per fortuna l'opera egregia delle personalità eminenti preposte alla direzione di questa scuola Normale,*

([38]) Non è oggetto di questo lavoro uno studio esaustivo dell'opera matematica di Bianchi. Posso rinviare alla commemorazione di Guido Fubini, G. Fubini, Commemorazione di Luigi Bianchi, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (6), 10, 1934, Appendice, pp. 34-44. Per i suoi contributi alla teoria dei numeri e quelli della sua scuola, A. Brigaglia, An Overview of Italian Arithmetic after the Disquisitiones Arithmeticae, in C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer, *The Shaping of Arithmetic after Gauss' Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, 2007, pp. 431-452.

rivolta a farne, con energia sempre maggiore, un austero seminario scientifico, piuttosto che uno scialbo istituto pedagogico ... con la istituzione di due corsi ben nutriti pei giovani normalisti tenuti sistematicamente e dedicati, l'uno, nel primo anno di studi, alla teoria dei numeri, l'altro, nel secondo, a quella dei gruppi di ordine finito e sue applicazioni, provvide a che in Pisa trovassero culto costante le discipline in cui più risplende l'adamantina purezza della matematica e meglio rivelano il suo fascino e la sua malia. ([39])

Ho usato una lunga citazione per dare subito alcune linee del mio pensiero. Voglio solo sottolineare che, soprattutto negli anni 80 del XIX secolo all'interno della comunità matematica italiana si era formato, sia pure con qualche ritardo comunque comparabile con quanto avveniva nel resto d'Europa, un gruppo di studiosi in grado di dialogare con la ricerca europea. Ma proprio in questo periodo, nel momento forse più alto di sviluppo della matematica italiana, il mondo accademico italiano non operò con lungimiranza.

Ci sono state alcune scelte miopi, ma deliberate, che relegarono, come rilevato da Scorza, algebra e teoria dei numeri in una posizione gravemente subordinata.

Tornerò più avanti su questo argomento che mi sta particolarmente a cuore. Ora è tempo di tornare ai lavori di Bianchi più o meno direttamente influenzati dal pensiero di Dedekind.

Come detto il primo lavoro di Bianchi su questo argomento è del 1889 ([40]). Ivi, sulla scia di precedenti studi di Dirichlet, si muove del tutto nello spirito delle *Vorlesungen*. Si tratta di completare un lavoro di Dirichlet del 1842 e generalizzare lo studio di Gauss sulle forme quadratiche reali $ax^2 + 2bxy + cy^2$ a coefficienti interi gaussiani (forme di Dirichlet). Per operare tale generalizzazione Bianchi ricorre, oltre ai paragrafi pertinenti delle stesse Vorlesungen, anche su di un fatto, dimostrato da Dedekind nel X supplemento, riguardo alla composizione di forme a coefficienti complessi.

I lavori successivi di Bianchi nel periodo indicato si sviluppano tutti attorno allo studio di estensioni delle forme di Dirichlet, su anelli di interi algebrici via via più generali e allo studio dei gruppi di trasformazioni, sottogruppi discreti del gruppo di Möbius, rispetto a cui esse sono invarianti. Inoltre Bianchi sviluppa in parallelo lo studio delle forme hermitiane ($az\bar{z} + bz\overline{z'} + \bar{b}\bar{z}z' + cz'\overline{z'}$) con a e c interi ordinari e b nello stesso anello di interi algebrici. Questo studio si sviluppa in una serie di lavori apparsi prevalentemente nei *Mathematische Annalen* e occupano nell'insieme circa 400 pagine del primo volume delle sue *Opere*. È qui presente prioritariamente l'influsso di Klein, ma anche quello diretto di Poincaré e dei suoi lavori sulle funzioni automorfe. In particolare Bianchi fa un uso massiccio della rappresentazione geometrica di Poincaré e dei connessi poliedri fondamentali ([41]), la determinazione dei quali è uno degli scopi fondamentali. Oltre che la tematica in sé tipicamente legata agli interessi di Dedekind (si tratta di estendere agli interi algebrici lo studio di forme quadratiche reali) Bianchi utilizza i concetti introdotti dal matematico tedesco, numeri algebrici, moduli, ideali che ormai sono entrati nel lessico comune e non hanno particolare bisogno di presentazione.

La prima fase delle sue ricerche è sintetizzata in un lavoro pubblicato, in tedesco, nel 1891, nei *Mathematische Annalen* ([42]) nel quale vengono via via studiati i gruppi di trasformazione $\frac{az+b}{cz+d}$ con

([39]) G. Scorza, In Memoria di Luigi Bianchi, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 16, 1930, pp. 3-27.

([40]) L. Bianchi, Sulle forme quadratiche a coefficienti e a indeterminate complesse, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* (4), 5, 1° semestre, 1889, pp. 589-599.

([41]) Una trasformazione di Möbius f è ottenuta come prodotto di due inversioni rispetto a due cerchi Γ e Γ'. Ad ogni f possiamo associare una trasformazione dello spazio ottenuta come prodotto delle inversioni rispetto alle sfere ortogonali al piano di Möbius e passanti per i cerchi rispettivi. Questa trasformazione agisce nel semispazio superiore come un'isometria iperbolica (modello di Poincaré). Ogni sottogruppo discreto determina una tassellazione del semispazio attraverso poliedri, copie isomorfe (in senso iperbolico) del poliedro fondamentale.

([42]) L. Bianchi, Geometrische Darstellung der Gruppen Linearer Substitutionen mit Ganzen Complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, 38, 1891, pp. 313-333.

determinante 1 e con i coefficienti negli interi di Gauss (gruppo di Picard) e nell'anello $\mathbf{Z}[\varepsilon]$, con ε radice cubica dell'unità. Seguono poi l'applicazione alle forme di Dirichlet (con coefficienti nell'anello corrispondente) e alle forme hermitiane.

Nei due successivi lavori ([43]) sugli *Annalen*, Bianchi porta a compimento la sua opera con uno studio realmente significativo in cui vengono studiati gruppi di trasformazione, forme di Dirichlet e forme hermitiane a coefficienti nell'anello degli interi di un corpo di quadratico. Più precisamente, detto D un numero intero e ponendo $\omega = i\sqrt{D}$ tranne quando sia $D \equiv 3 (mod\ 4)$, nel qual caso $\omega = \dfrac{1+i\sqrt{D}}{2}$, il corpo da considerare è quello dei numeri $m + n\omega$, con m e n razionali. Il gruppo di queste trasformazioni è detto gruppo di Bianchi.

Come già detto, l'attività di Bianchi nel settore della teoria dei numeri proseguì fino al 1894, per poi avere una lunga interruzione. Non approfondirò ulteriormente tale attività ([44]), sperando che queste brevi note siano state sufficienti a far notare come con Bianchi ci si muova su tutto un altro piano: non più esposizioni più o meno brillanti di una parte della matematica di cui si intravedeva la bellezza e l'importanza, ma che non diveniva parte di un vero programma di ricerca, ma un uso consapevole di strumenti divenuti ormai parte integrante del bagaglio di un matematico perfettamente integrato nella più avanzata ricerca europea. Bianchi non spiega cosa è un ideale o un modulo; egli adopera questi oggetti matematici rivolgendosi a un pubblico ormai del tutto assuefatto a questi concetti. Anche per questo pubblica i suoi lavori fondamentali nella rivista di Klein (anche se li riassume sempre in italiano nei *Rendiconti Lincei*).

([43]) L. Bianchi, Sui Gruppi di Sostituzioni Lineari con Coefficienti appartenenti a Corpi Quadratici immaginari, *Mathematische Annalen*, 40, 1892, pp. 332-412, e 42, 1892, pp. 36-57.

([44]) Qualche notizia in più sui contributi di Bianchi alla teoria dei numeri si può avere da A. Brigaglia, An Overview ..., cit., pp. 431-452.

La teoria dei numeri algebrici nell'ultimo decennio del XIX secolo

Come già detto, Bianchi interruppe i suoi studi sulla teoria dei numeri algebrici nel 1894, quindi in un momento in cui il punto di vista di Dedekind sull'argomento si era ormai affermato, almeno in Germania, e si andavano profilando grandi sviluppi. Mi limito a qualche cenno.

Nel 1893 infatti era stata pubblicata la quarta edizione delle *Vorlesungen* di Dirichlet–Dedekind con una ulteriore versione dell'XI Supplemento e nello stesso 1893 aveva fatto il suo esordio nella teoria dei numeri algebrici David Hilbert con una brevissima nota di mezza pagina ([45]). Ma forse il punto di svolta nello sviluppo della teoria degli ideali si ha proprio nel 1894, quando in un breve lavoro ([46]) Adolf Hurwitz presentò una versione semplificata della teoria degli ideali nella quale ottiene il teorema di fattorizzazione unica in un modo più diretto, scelto poi da Hilbert nel suo *Bericht*. Nel breve volgere del tempo tra il 1893 e il 1897, data di pubblicazione dello *Zahlbericht* di Hilbert (su cui tornerò più avanti), vennero pubblicati un gran numero di lavori da parte di matematici tedeschi tra cui, a parte lo stesso Dedekind e Hurwitz e Hilbert, si possono citare Frobenius, Hensel, Minkowski. Forse vale la pena sottolineare che in tutti questi lavori la teoria degli ideali viene presentata come di Kronecker e Dedekind.

Ovviamente il punto di arrivo più noto e significativo di questo periodo è raggiunto da quello che è generalmente inteso come lo *Zahlbericht* di Hilbert ([47]). Rinviando per un esame di questo impor-

([45]) D. Hilbert, Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 3, 1893, p. 59.

([46]) A. Hurwitz, Über die Theorie der Ideale, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1894, pp. 291-298. Su questo lavoro di Hurwitz si può vedere M. Koreuber, *Emmy Noether, die Noether – Schule und die moderne Algebra*, Springer, 2015, p. 262

([47]) D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4, 1897, pp. 175-546. Il testo è tradotto in inglese da I. Adamson, D. Hilbert, *The Theory of Algebraic Number Fields, Springer*, 1998, con introduzione di Franz Lemmermayer e Norbert Schappacher.

tantissimo lavoro all'analisi fatta nella citata introduzione della traduzione inglese, qui mi limito a indicare come la esposizione della teoria di Dedekind si sia fatta in modo molto più semplice e diretto. Ci muoviamo all'interno dei numeri algebrici. Un ideale è definito come un insieme di numeri algebrici chiuso rispetto a combinazioni lineari a coefficienti interi algebrici, la divisibilità tra ideali non è più definita dall'inclusione, ma direttamente dalla moltiplicazione tra ideali, e così via, fino al teorema di fattorizzazione unica. Anche se giustamente il concetto di ideale è attribuito sia a Dedekind che a Kronecker, lo spirito che domina la trattazione è quello che Dedekind aveva esposto più volte: si tratta ancora di una contrapposizione tra "calcolo" e "ragionamento" che Dedekind (che ne aveva curato le opere) attribuisce a Riemann, seguito in questo da Hilbert. Scrive Hilbert con un grande afflato poetico, rispetto alla parte che lui (e non solo lui) ritengono una delle vette dell'opera di Kummer: *It is clear that the theory of these Kummer fields represents the highest peak reached on the mountain of today's knowledge of arithmetic; from it we look out on the wide panorama of the whole explored domain since almost all essential ideas and concepts of field theory, at least in a special setting, find an application in the proof of the higher reciprocity laws. I have tried to avoid Kummer's elaborate computational machinery, so that here too Riemann's principle may be realised and the proofs completed not by calculations but purely by ideas.* ([48])

Qualunque sia il giudizio su vari aspetti dello *Zahlbericht* conta il significato storico: esso rappresenta un punto di partenza necessario per tutta la letteratura successiva sull'argomento.

Dedekind e la teoria delle funzioni algebriche

Prima di inoltrarci brevemente negli avvenimenti del nuovo secolo è opportuno fare un passo indietro, a quando, nel 1882, Dedekind, con la collaborazione di Heinrich Weber, pubblica un lungo articolo destinato a fare epoca, dedicato stavolta alle funzioni algebriche. ([49]) Nello stesso numero della rivista Kronecker presentava ([50]) il suo punto di vista sullo stesso argomento: nasceva la moderna teoria aritmetica della geometria algebrica. Non era certo un caso. La storia della di questi lavori è interessante perché può riassumere la storia dei rapporti tra Kronecker e Dedekind. Ne abbiamo notizia dalla corrispondenza tra Dedekind e Cantor. L'articolo di Kronecker sulla teoria dei numeri algebrici e sugli ideali (interpretati in modo assai diverso) era, negli anni '70, quasi del tutto non pubblicato, anche se sostanzialmente noto agli addetti ai lavori. In realtà Kronecker aveva elaborato la sua teoria sin dal 1858. Ce lo comunica Kummer nel 1859:

In regard to the general theorems which are common to all theories of complex numbers, I can refer to the work of Herr Kronecker which will soon appear, in which the theory of the most general complex numbers is developed fully and with great

---

([48]) Cito dalla detta edizione inglese dello Zahlbericht, p. XI. La reale posizione di Riemann è controversa. Nella loro introduzione Lemmermayer e Schappacher riportano il punto di vista di Carl Ludwig Siegel, il quale *after having gone through Riemann's formidable handwritten notes on the zeta function, remarks: The legend according to which Riemann found the results of his mathematical work via "big general" ideas, without using the formal tools of analysis, does not seem to be as widespread any more as in Klein's time.* (p. XXV) Personalmente penso che il punto di vista di Dedekind non significhi affatto la convinzione di contrapporre "ragionamento" a "calcolo", ma piuttosto che il calcolo sia soltanto uno strumento per il raggiungimento dei risultati, ma che poi esso debba scomparire una volta che il ragionamento abbia permesso di comprendere le "vere" ragioni dei risultati. Vi sono molti passi della corrispondenza di Dedekind che confermano questo mio parere. È comunque una questione antica (si veda ad esempio la conferenza in cui Volterra confronta lo stile matematico di Brioschi con quello di Betti e Casorati) e forse meriterebbe un approfondimento.

([49]) R. Dedekind, H. Weber, Theorie der algebraischen Functionen der einer Veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 1882, pp. 181-290. Esiste una traduzione inglese di questo testo da parte di John Stillwell che ha anche scritto un'utilissima introduzione, R. Dedekind, H. Weber, *Theory of algebraic functions of one variable*, American Mathematical Society e London Mathematical Society, 2012. Io citerò sempre da questa edizione.

([50]) L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 1882, pp. 237-387.

simplicity. (51) In realtà la pubblicazione tarderà più di 20 anni. Dedekind racconta a Cantor come *Weber [avesse] spedito a Kronecker il lavoro, redatto da lui solo ma che era il risultato di una corrispondenza di un anno e mezzo e nella sua forma finale era stato discusso a voce fra noi due, il 20 ottobre 1880 ... non potevamo immaginare che sarebbe passato tanto tempo prima che lui finisse di scrivere ... Sono già 16 mesi da quando abbiamo avuto le prime bozze!* (52) Cantor fece perfino pervenire a Dedekind le bozze del lavoro di Kronecker.

Si possono giudicare in vario modo questi ritardi (lo stesso Dedekind assolve il collega, che giudica in buona fede), ma certo questo numero del *Journal di Crelle* resta memorabile negli annali della matematica, sia per quanto riguarda la teoria algebrica dei numeri, che per quanto riguarda la geometria algebrica. Non è qui mia intenzione effettuare un confronto, per altro affascinante, tra i due diversi punti di vista, per il quale rinvio ancora una volta agli articoli di Harold Edwards (53).

Il lavoro di Dedekind e Weber delinea un progetto di grande respiro, uno dei punti culminanti della matematica del XIX secolo che si proietta ben avanti nel secolo successivo: si tratta dell'unificazione tra teoria dei numeri e geometria algebrica. Non so esprimere meglio il piano di lavoro dei due matematici che attraverso una lunga citazione della loro introduzione:

The purpose of the following investigations is to construct the theory of algebraic functions of one variable, which is one of Riemann's great creations, on the basis of a simple, yet at the same time rigorous and completely general viewpoint. In previous investigations of this topic certain restrictive assumptions about the singularities of the functions under consideration have been made, as a rule, and the so-called exceptional cases have either been mentioned casually as limiting cases, or else left aside entirely. Likewise, certain basic theorems on continuity and developability have been assumed, on the evidence of geometric intuition. A sounder basis for fundamental concepts, as well as a general treatment of the theory, without exceptions, is obtained when one proceeds from a generalization of the theory of rational functions of one variable, in particular from the theorem that each rational function of one variable admits a decomposition into linear factors. This generalization is simple and well known in the first case, in which the number Riemann denoted by p (called genus by Clebsch) has the value zero. For the general case, which is related to the one just mentioned in the same way that general algebraic numbers are related to rationals, the way forward is found by carrying over to functions those methods that are most successful in the theory of numbers. (54) Se si pensa che sono passati appena tre anni da quando Dedekind lamentava la totale incomprensione del suo lavoro da parte dei matematici (anche quelli tedeschi) il passo appare decisamente audace. Anche se ancora non siamo a una vera e propria unificazione delle due branche così diverse della matematica (qui si parla più di analogia che di unificazione in un ambito più astratto) la strada è aperta. Le funzioni intere algebriche generali stanno a quelle di genere zero (birazionalmente equivalenti alle razionali) come gli interi algebrici stanno agli interi ordinari.

Cercherò di dare una rapida idea della marcia di Dedekind e Weber. Possiamo premettere la situazione, già perfettamente nota, del caso delle funzioni razionali $\mathbb{C}(z)$. In questo caso, l'anello degli interi corrispondente è l'anello dei polinomi $\mathbb{C}[z]$. In esso, come è ben noto, vale la divisione euclidea e, per il teorema fondamentale dell'algebra, ogni polinomio può essere fattorizzato in maniera unica (a meno di elementi invertibili) come prodotto di primi, i polinomi del tipo $(z - a)$. Le funzioni razionali sono le funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann che

(51) Qui Kummer con "complex number" intende "numero algebrico". La citazione è riportata da Edwards (in traduzione inglese) nella citata *Genesis of Ideal Theory*, a p. 329.

(52) Lettera di Dedekind a Cantor del 17 febbraio 1882. La citazione è tratta dalla traduzione italiana (curata da Pietro Nastasi e Gianni Rigamonti) della corrispondenza Dedekind – Cantor, apparsa in *Pristem/Storia, Note di Matematica, Storia e Cultura*, 6, 2002.

(53) H. Edwards, The Genesis ..., cit.; ma anche la sua ricostruzione, in linguaggio moderno, della teoria dei divisori di Kronecker, H. Edwards, *Divisor Theory*, Birkhäuser, 1990.

(54) R. Dedekind, H. Weber, *Theory of algebraic functions* ... cit., p. 41.

costituiscono banalmente un campo e quindi i primi del campo delle funzioni razionali ricoprono i punti al finito della sfera di Riemann.

Il campo delle funzioni algebriche è $\mathbb{C}(z)(y)$ dove y è radice di un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}(z)$, $g(y) = a_n y^n + \ldots + a_0 = 0$. Moltiplicando i coefficienti di questo polinomio per il minimo comune multiplo dei denominatori si può riscrivere $g(y) = f(z, y) = 0$. In questo caso $f(z, y) = 0$ è l'equazione di una curva o di una superficie di Riemann. Si dice che $\mathbb{C}(z)(y) = \dfrac{\mathbb{C}(z, y)}{(f(x, y))}$ è il campo delle funzioni razionali su di una superficie di Riemann (su di una curva). Due curve sono birazionalmente equivalenti se e solo se i rispettivi campi di funzioni sono isomorfi, fatto questo già noto a Riemann.

Uno degli scopi principali del lavoro è appunto quello di capovolgere questo procedimento e di dare un metodo puramente algebrico per ottenere da un dato campo di funzioni algebriche la corrispondente superficie di Riemann. Ne indicherò soltanto alcuni aspetti.

Dopo aver introdotto il campo delle funzioni algebriche, Dedekind e Weber vi definiscono la norma di una funzione algebrica f (il determinante, a meno del segno, dei coefficienti della espressione di f rispetto a una qualunque base), la traccia (la traccia, a meno del segno, della stessa matrice). Introducono inoltre il discriminante di un insieme di n (la dimensione del campo) funzioni algebriche $(f_1, \ldots, f_n)$, cioè il determinante della matrice (a_{ij}) con $a_{ij} = f_i f_j$. Con questi strumenti sono in grado di ricostruire tutto l'apparato analogo a quello della teoria dei numeri, fino alla fattorizzazione unica.

L'idea chiave del lavoro sta nella definizione, puramente algebrica, di punto della "superficie di Riemann" connessa a un campo di funzioni algebriche, Ω. Il procedimento è quello tipico della matematica in questi casi. Se la superficie fosse nota, a ogni punto p e a ogni $f \in \Omega$ sarebbe associato un ben determinato valore $f(p)$. Capovolgendo, Dedekind e Weber definiscono *punto* della superficie di Riemann, l'assegnazione, per ogni $f \in \Omega$, di un determinato valore f_0 della sfera di Riemann (i complessi, più infinito). Naturalmente tale assegnazione deve soddisfare alcune proprietà. Precisamente:

- Se f è costante $f = f_0$;
- $(f + g)_0 = f_0 + g_0$; $(f - g)_0 = f_0 - g_0$;
- $(fg)_0 = f_0 g_0$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)_0 = \dfrac{f_0}{g_0}$.

Vi è una proprietà fondamentale di questa assegnazione. L'insieme delle funzioni algebriche intere che si annullano in un punto dato costituisce un ideale primo e viceversa. Abbiamo così (con qualche aggiustamento per i punti all'infinito) una corrispondenza biunivoca tra i punti della superficie di Riemann e gli ideali primi dell'anello degli interi del campo Ω.

Fino a questo punto la superficie di Riemann è definita soltanto come un mero insieme di punti, senza alcuna struttura. Per determinare i punti di diramazione, il genere, il teorema di Riemann–Roch, ecc. Dedekind e Weber costruiscono un apparato complesso che, con alcuni aggiustamenti, diverrà strumento essenziale della geometria algebrica qualche decennio più tardi. Tra i concetti introdotti cito quello di divisore, che Dedekind e Weber [D. W.] chiamano poligono ([55]), e che consiste in un insieme di punti che possono essere anche ripetuti. Un poligono si può scrivere sotto forma "moltiplicativa" $\mathcal{M} = \wp_1^{r_1} \wp_2^{r_2} \ldots$ (con $\wp_i$ punti). Con questa scrittura è possibile definire il prodotto di due poligoni come quello avente ciascun punto dei due con molteplicità somma. Le funzioni algebriche che si annullano nei punti di un poligono costituiscono un ideale (e viceversa). Questo ideale è esattamente il prodotto degli ideali primi associati ai punti con esponente uguale alla molteplicità del punto corrispondente nel poligono, ecc. Non sto a dilungarmi sul procedimento di D. W. che introdurranno in nuce anche valutazioni, numeri di ramificazione, ecc. Il genere viene quindi definito come

$$p = \frac{1}{2} w - n + 1 \qquad (a)$$

dove w è la somma dei numeri di ramificazione e n è il grado, che corrisponde nella teoria di Riemann al numero di fogli della superficie. Rinvio alla letteratura ([56]) per un approfondimento anche tecnico del

([55]) In realtà poligono è un divisore positivo, ma D. W. introducono anche il rapporto tra poligoni, ricostruendo così in pieno il moderno concetto di divisore.

([56]) Si può opportunamente consultare l'introduzione di John Stillwell alla citata traduzione inglese del D. W.

procedimento di D. W., ma forse si può notare come la (a) sia un teorema nella impostazione riemanniana. La tecnica di D. W. è proprio quello di capovolgere questo procedimento, nell'introdurre i vari concetti per via esclusivamente algebrico–aritmetica, e definire man mano i vari oggetti con opportune definizioni.

L'influenza della teoria di Dedekind e Weber in Europa e in Italia

Il fondamentale lavoro di Dedekind e Weber non ebbe un'accoglienza significativa immediata. Come scrive John Stillwell *The Dedekind–Weber arithmetization was not really the future of analysis, but it was the future of algebraic geometry* ([57]). In realtà questo articolo apparve in un momento di grande vivacità per la teoria delle funzioni di variabile complessa. Basti qui ricordare che nello stesso anno venivano pubblicati i fondamentali lavori sulle funzioni automorfe di Felix Klein e Henri Poincaré ([58]). Non seguirò qui gli aspetti legati allo studio delle funzioni algebriche dal punto di vista dell'analisi complessa, rinviando alla letteratura ([59]). Per quanto riguarda gli aspetti relativi alla geometria algebrica, è meglio ricordare alcune date. Nel 1882 nella geometria algebrica era in corso la piena assimilazione del punto di vista riemanniano (i "misteri riemanniani" di cui parlava Cremona) in un quadro algebrico–geometrico. Questa rilettura di Riemann era stata iniziata in modo sistematico da Clebsch negli anni '60 e continuata soprattutto dal suo allievo Max Nöther che nel 1873 aveva pubblicato il suo lavoro più famoso e negli anni '80 proseguiva alacremente il suo programma. Sempre negli anni '80 Picard dà inizio all'estensione della teoria di Riemann a due variabili, cominciando quindi lo studio trascendente delle superfici algebriche. In ogni caso l'interesse massimo non era tanto nella sistemazione e rigorizzazione della teoria ad una variabile, quanto alla sua estensione al caso delle superfici.

Per quanto riguarda l'Italia il momento era particolarmente delicato, in quanto la scuola "purista" di Cremona aveva alquanto esaurito la sua vena propulsiva. Tra i suoi allievi, era Eugenio Bertini quello che più di ogni altro si era avvicinato al punto di vista birazionale algebrico–geometrico di Nöther. Comunque quella che poi sarà vista come la scuola geometrica italiana era ancora di là da venire. Corrado Segre si sarebbe laureato l'anno successivo e avrebbe affrontato nel 1884 la marcia verso la piena acquisizione della visione algebrico geometrica. Ma l'atto di nascita della scuola geometrica italiana può farsi risalire all'incontro tra Segre e Castelnuovo, ancora qualche anno più tardi e soprattutto all'inizio dello studio delle superfici negli anni '90, in collaborazione con Federigo Enriques. Anche in questo caso, quindi, i grandi successi nell'"esplorazione di nuovi territori" (per usare un termine di André Weil) rendono non particolarmente appetibile metodi e risultati tesi soprattutto a giustificare rigorosamente note proprietà.

Inoltre credo che la complessiva lontananza dalla teoria dei numeri non permettesse di cogliere fino in fondo il fascino dell'analogia tra due grandi teorie.

In ogni caso dalla fine degli anni '80, la teoria di D. W. ha acquistato un suo posto riconosciuto all'interno dei diversi metodi.

Forse i primi a porre l'indirizzo aritmetico a fianco degli altri nella loro famosa storia delle funzioni algebriche sono Alexander von Brill e Max Nöther che suddividono gli indirizzi della geometria algebrica in cinque gruppi di cui il quarto è quello aritmetico di *Dedekind–Weber 1880, Kronecker 1881, Hensel.* ([60]) Di questo si rende perfettamente conto Segre, che certamente aveva letto e compreso a fondo il lavoro di D. W. e, riprendendo quasi letteralmente quanto scritto da Brill e Nöther ([61]),

([57]) J. Stillwell, Translator's Introduction, in R. Dedekind, H. Weber, Theory of algebraic ..., cit., p. 37.

([58]) F. Klein, *Über Riemann's Theorie der Algebraischen Functionen und ihre Integrale*, Teubner, 1882; H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica*, 1, 1882, pp. 55-127.

([59]) Vedi per esempio, U. Bottazzini, J. Gray, *Hidden Harmony – Geometric Fantasies*, Springer, 2013.

([60]) A. Brill, M. Nöther, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker – Vereinigung*, 3, 1892-93, pp. I-XXIII e 109-566 (ma del 1894) p. 287.

([61]) In realtà non mi è chiaro chi prende da chi. I due lavori sono pressoché contemporanei. Pur trovandosi nel numero della rivista del 1892 / 93, il lungo lavoro di Brill – Nöther è stato pubblicato nel 1894. Inoltre la prefazione (che scrive in un suo famoso lavoro: *La geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito, ed in particolare lo studio delle funzioni razionali dell'ente ossia delle serie lineari di suoi gruppi di punti, fondata da Riemann, si è poi svolta secondo vari indirizzi: quello funzionale che deriva appunto da quel sommo matematico; quello algebrico–geometrico che è dovuto principalmente all'importante lavoro dei sig.i Brill e Nöther; quello algebrico–aritmetico di Kronecker da un lato e dei sig.i Dedekind e Weber dall'altro.* ([62]) E naturalmente quello, che sarà citato più avanti, geometrico, suo e di Castelnuovo. Segre era entrato in contatto con la teoria degli ideali probabilmente sul finire degli anni '80 ed era stato spinto in quella direzione anche attraverso la sua corrispondenza con Hurwitz (che aveva avuto inizio nel 1887): *Quanto Ella mi accenna sulla teoria degl'ideali di Dedekind concorda perfettamente colle impressioni che io ne ho provato: come già in tutto ciò che Ella scrive trovo sempre molta affinità col mio modo di pensare* ([63]). Segre aveva senz'altro letto con attenzione il testo di D. W. e ne aveva colto la possibilità di utilizzo. Nello stesso lavoro già citato Segre espone l'idea di D. W. di punto di una superficie di Riemann (in effetti una delle parti più significative). Leggere direttamente Segre può essere utile, per apprezzare come il matematico piemontese comprendesse lo spirito di D. W. Scrive Segre a proposito delle superfici di Riemann: *In luogo di definirlo assumendo particolari coordinate e quindi particolari equazioni fra queste, si pensino simultaneamente per ciascun punto dell'ente i valori che in esso prendono tutte quante quelle variabili ... che finora chiamavamo "funzioni razionali dell'ente". Il punto dell'ente è precisamente un insieme, una coesistenza di valori di quelle variabili. Due qualunque di queste verificano in tutti i punti un'equazione algebrica; e se non vi sono infinite coppie di punti nei quali ognuna delle due prenda lo stesso valore, ogni altra variabile si potrà esprimere come funzione razionale delle altre due.* ([64]) Poco più avanti Segre dà una definizione di genere dichiaratamente ispirata al D. W. Cosa possiamo dedurre da questa citazione, per altro tra le pochissime fatte dal matematico piemontese? Mi pare che ci sia una conferma di quella *affinità con il modo di pensare*, rivendicata da Segre nella lettera a Hurwitz. Segre è, con Bianchi credo, il solo matematico di rilievo italiano che alla fine del XIX secolo è interessato a seguire le tendenze astratte che andavano affermandosi in Germania e che sono in qualche modo individuabili sotto il segno di Dedekind. Naturalmente questa affinità non poteva superare la diversità di interessi dei due matematici italiani.

Per il resto i geometri algebrici italiani, giustamente protesi nella grande avventura dello studio delle superfici, non paiono interessati alla crescente astrazione dei metodi aritmetici.

Nel frattempo, in campo internazionale, il pionieristico lavoro di D. W. trovava finalmente un seguito. Citerò sommariamente. Il primo ad entrare prepotentemente in campo è un allievo di Kronecker, Kurt Hensel ([65]), che, cogliendo sia le indicazioni del suo maestro che quelle di D. W., in una serie di lavori tra il 1891 ([66]) e il 1895 svilupperà in punti non secondari e soprattutto sistematizzerà la teoria aritmetica delle funzioni algebriche. Sin dal primo lavoro di questa serie, Hensel compie due operazioni importanti:

è del maggio 1894) contiene riferimenti diretti al lavoro di Segre, che in effetti è datato novembre 1893. La questione in realtà non è importantissima, ma la individuazione dell'indirizzo aritmetico a fianco di quelli trascendenti è un segno di attenzione agli sviluppi della geometria algebrica astratta assai significativo.

([62]) C. Segre, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, *Annali di matematica pura e applicata*, (2), 22, 1894, pp. 41-142, in *Opere*, v. I, UMI, 1956, pp. 198-304, p. 198-199.

([63]) Lettera di Segre a Hurwitz del 15 agosto 1891, in E. Luciano, S. Roero, From Turin to Göttingen: Dialogues and Correspondence (1879-1923), *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 33, 2012, pp. 1-232, p. 104.

([64]) C. Segre, Introduzione, cit., p. 234.

([65]) Forse la migliore trattazione dell'opera di Hensel resta quella del suo allievo Helmut Hasse, H. Hasse, Kurt Hensel zum Gedächtnis, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 187, 1949, pp. 1-13; questa commemorazione contiene anche l'elenco dei lavori di Hensel.

([66]) K. Hensel, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 109, 1891, pp. 1-42.

1. innestare la visione di D. W. in quella, a lui più congeniale, di Kronecker;
2. esplicitare gli aspetti geometrico-algebrici alquanto sottintesi nel lavoro di D. W. e anche, pur se assai meno, in quello di Kronecker.

Non mi sembra un caso che già nel 1894 Nöther ponga Hensel come protagonista dell'indirizzo aritmetico nella geometria algebrica, a fianco di Kronecker e D. W.

In particolare nel 1899 Kurt Hensel introduceva i numeri p-adici [67], che sarebbero divenuti strumento essenziale per l'estensione su di un campo qualunque della teoria di Dedekind, e soprattutto il concetto di valutazione in cui il carattere geometrico-algebrico resta assolutamente prevalente. Hensel preciserà le sue idee in una serie di famosi trattati, su cui tornerò brevemente più avanti, nei primi anni del nuovo secolo. Già nel 1912 Abraham Fraenkel darà una sistemazione assiomatica dei numeri p-adici [68]. Ormai gli sviluppi della teoria aritmetica delle funzioni algebriche è intimamente collegata a quella della teoria algebrica dei numeri e agli sviluppi generali dell'algebra astratta. Lo strumento "teoria degli ideali" comincia ad essere onnivalente. Solo molto schematicamente si possono trovare confini artificiosi.

Un tipico intervento in questo senso è quello del grande scacchista (campione del mondo tra il 1894 e il 1921) Emanuel Lasker, che nel 1905 pubblica un lavoro [69] in cui, tra le altre cose, viene introdotto il concetto di ideale primario, cioè di ideale proprio I per il quale, se $ab\varepsilon I,\ o\ a\varepsilon I\ o\ b^n\varepsilon I$, per qualche intero positivo n. Il teorema fondamentale del lavoro di Lasker assicura che, in un anello di polinomi, ogni ideale è intersezione di ideali primari. Il teorema è noto come teorema di Lasker–Nöther, in quanto Emmy Nöther lo ha esteso, nel 1921, a anelli nötheriani.

Il lavoro di Lasker (che era stato anche allievo di Max Nöther) è del tutto orientato sulla tematica della geometria algebrica. In particolare il secondo capitolo (Sui moduli e gli ideali negli spazi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [70]) è interamente dedicato al rapporto tra numeri algebrici e polinomi dal punto di vista della geometria algebrica, nonché a un confronto con tutta la tradizione della geometria algebrica più facilmente leggibile attraverso i nuovi strumenti algebrico-aritmetici: si va naturalmente dai fondamentali lavori di Brill e Nöther del 1872/73 ai recenti lavori di Severi, passando per Bertini [71].

L'altro lavoro fondamentale che spinge in direzione di un'aritmetizzazione (ma ormai potremmo dire più semplicemente a un uso massiccio dei metodi dell'algebra astratta) è quello di Francis Macaulay, che nel 1913 pubblicava un articolo da molti punti di vista fondamentale [72], che non a caso viene pubblicato in Germania. L'itinerario di questo lavoro è da molti punti di vista assai indicativo della diffusione e dell'accoglimento dei metodi di Dedekind e un confronto con quanto successo in Italia può essere utile. Mi si concederà quindi una piccola deviazione.

Francis Sowerby Macaulay (1862-1937) è senz'altro il più importante tra i matematici non tedeschi ad essersi occupato degli ideali nell'anello dei polinomi nel primo quarto del XX secolo. È dovuto a lui un importante teorema di scomposizione degli ideali dell'anello dei polinomi in ideali primari analoga a quella di Lasker; inoltre egli è oggi famoso per aver

---

(67) K. Hensel, Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 6, 1899, pp. 83-88.

(68) A. Fraenkel, Axiomatische Begründung von Hensels p-adischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 141, 1912, pp. 43-76.

(69) E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Mathematische Annalen*, 60, 1905, pp. 20-116.

(70) Über Moduln und Ideale im Raume $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(71) Mi sembra significativa l'insistenza di Lasker per uno dei lavori di Severi che più potevano interessare il suo punto di vista: F. Severi, Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre, *Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, (5), 9, 1902, pp. 105-113. La citazione di Bertini penso si riferisca alla breve ma significativa nota sul teorema fondamentale di Nöther del 1889, E. Bertini, Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen, *Mathematische Annalen*, 34, 1889, pp. 447-449. Questo lavoro sarà citato anche da Macaulay e più tardi, da Krull.

(72) F. Macaulay, On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers, *Mathematische Annalen*, 74, 1913, pp. 66-121.

dimostrato che l'anello dei polinomi a coefficienti complessi è quello che oggi si chiama un anello di Cohen–Macaulay, ecc.

Tuttavia Macaulay era un docente di scuola superiore quasi del tutto estraneo agli ambienti accademici. Un insegnante brillante se tra i suoi allievi ci sarà anche John Littlewood. Lo stesso Littlewood ci segnala l'isolamento in cui lavorava Macaulay: *No one in England knew about his subject, and I believe he was very little in touch with workers abroad: he never spoke of his work, did not expect recognition in his life-time, and even when he was put up for the Fellowship of the Royal Society did not expect to be elected. In this, of course, he exaggerated, and his election gave him profound pleasure.* ([73])

Macaulay sembra fondamentalmente un autodidatta su queste tematiche estremamente nuove e avanzate. Egli aveva comunque iniziato a lavorare in geometria algebrica, nell'indirizzo di Nöther, sin dal 1900 ([74]). Al lavoro del 1913 seguiva un trattato ([75]) in cui sono contenuti molti nuovi risultati e che *was the first significant work on algebraic geometry in the spirit of Hilbert and Kronecker to be written in English* ([76]). Io a questi nomi aggiungerei quello di Dedekind. Anche se l'influenza di Kronecker (soprattutto attraverso il testo di König citato più avanti) è preponderante, la concezione degli ideali di Dedekind è sempre presente. In particolare nell'appendice (*Note on the theory of ideals*) i due metodi e le due concezioni sono continuamente presenti e raffrontate.

Occorre aggiungere che questo atteggiamento di sottovalutazione dell'opera di Macaulay perdura, almeno secondo la testimonianza di Van der Waerden, ancora fino al 1933. Scrive di Macaulay il matematico olandese: *a schoolmaster who lived near Cambridge, England, but who was nearly unknown to the Cambridge mathematicians when I visited Cambridge in 1933. I guess the importance of Macaulay's work was known only in Göttingen.* ([77])

Concludo questa digressione su Macaulay con un'osservazione apparentemente futile. Leggendo distrattamente il libro del matematico inglese sembra di essere avanti di una ventina d'anni. Lì il teorema di Lasker è divenuto, come diciamo oggi, il teorema di Lasker–Nöther; più in là si parla di Nötherian module e così via. Naturalmente non si tratta qui di Emmy, ma di suo padre Max. Ho detto che l'osservazione è solo apparentemente futile. In realtà ciò che è presente sia qui che nel lavoro di Lasker è una compiuta integrazione, avvenuta negli anni del XX secolo che precedono la guerra, tra il cosiddetto indirizzo algebrico-geometrico di Brill e Nöther e quello aritmetico di Dedekind e Kronecker. In qualche modo le grandi visioni culturali nate alla fine dell'Ottocento diventano ora strumenti di lavoro utili, in una visione integrata, a risolvere problemi ereditati dal passato. Man mano che si risolvono problemi concreti relativi a polinomi si è quasi costretti a servirsi di strumenti via via più astratti, fino a rendersi conto che l'oggetto dello studio non era un anello particolare, ma una struttura algebrica. Il passo ulteriore sarà compiuto dopo la grande guerra.

Un altro matematico interessante che rappresenta questa integrazione di diversi punti di vista è Heinrich Jung ([78]), allievo di Hensel fortemente influenzato dal maestro. Stavolta il campo di interesse di Jung riguarda proprio l'argomento centrale della ricerca dei geometri algebrici italiani, le funzioni algebriche di due variabili e quindi le superfici algebriche, un argomento questo che Hensel aveva cominciato a trattare nell'ambito della visione arit-

([73]) Citato in J. O'Connor, E. Robertson, Francis Sowerby Macaulay, in rete http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Macaulay.html

([74]) Per aspetti interessanti sulle attività di Macaulay il riferimento principale è J. Barrow – Green, J. Gray, Geometry at Cambridge, 1863-1940, *Historia Mathematica*, 33, 2006, pp. 315-356.

([75]) F. Macaulay, *The algebraic theory of modular systems*, Cambridge University Press, 1916.

([76]) J. Barrow – Green, J. Gray, Geometry at Cambridge, cit.

([77]) B. van der Waerden, The foundations of algebraic geometry from Severi to André Weil, *Archive for History of Exact Sciences*, 7, 1970, pp. 171-180.

([78]) Su Heinrich Jung non esiste molto. Una breve biografia nel sito dell'università di Halle, dove ha insegnato, contiene comunque l'elenco dei lavori, http://disk.mathematik.uni-halle.de/history/jung/index.html metica di Kronecker-Dedekind ([79]) e che Jung aveva proseguito ([80]).

Jung è senza dubbio il matematico che lavora nell'indirizzo algebrico-aritmetico più interessato al confronto con i geometri italiani e in particolare con Castelnuovo ed Enriques. Sarebbe un argomento da approfondire per meglio comprendere l'atteggiamento dei matematici italiani nei confronti di questo indirizzo appena emergente. Io qui mi limito a indicare un lavoro in cui Jung rilegge alcuni risultati di Castelnuovo ed Enriques alla luce del linguaggio e dei metodi di Dedekind (attraverso Hensel) ([81]).

Mi pare significativo che Jung, nel 1908, abbia tentato di far conoscere ([82]) i suoi metodi anche nell'ambiente franco–italiano in cui lo studio delle superfici algebriche stava vivendo il suo massimo sviluppo. Un piccolo episodio può dare un'idea della "freddezza" dei geometri algebrici italiani rispetto a questo indirizzo. Nel 1912 Jung aveva inviato un secondo lavoro, strettamente legato all'opera dei geometri italiani, per la pubblicazione sui *Rendiconti* di Palermo. Il lavoro era stato inviato a Castelnuovo come referee e quest'ultimo aveva probabilmente sconsigliato la pubblicazione. Ci resta la significativa lettera di Guccia, direttore dei *Rendiconti*, a Castelnuovo: *Finalmente, dopo matura riflessione, ho finito per accettare il lavoro ... Ora, io temo che altrimenti si potesse pensare che non tutti i metodi siano accettabili per i «RENDICONTI»* ([83]).

([79]) K. Hensel, Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen, *Acta Mathematica*, 23, 1900, pp. 339-416.

([80]) Vedi ad esempio H. Jung, Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängiger Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle x = a, y = b, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 133, 1908, pp. 289-314.

([81]) H. Jung, Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 138, 1910, pp. 77-95.

([82]) H. Jung, Sur les fonctions algébriques de deux variables, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 147, 1908, pp. 174-176. H. Jung, Primteiler algebraischer Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen und ihr Verhalten bei birationalen Transformationen, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 26, 1908, pp. 113-127. Questo e il successivo lavoro del 1912 sono, se non vado errato, i soli lavori dell'indirizzo aritmetico pubblicati in riviste italiane.

La trattatistica sui numeri e sulle funzioni algebriche a cavallo di due secoli

La precisa sensazione che l'ultimo decennio del XIX secolo rappresenti un punto di svolta, sancendo in qualche modo il definitivo accoglimento del punto di vista di Dedekind, ma ponendo anche le premesse per una nuova impostazione nel secolo successivo, si ha dall'apparizione dei primi manuali di teoria dei numeri nello stile di Dedekind e di Kronecker (se si vuole dopo le *Vorlesungen* di Dirichlet–Dedekind). Lascio la scelta ad Edmund Landau che ne cita nove ([84]), fino al 1927: il primo è il già citato testo di algebra di Weber del 1896, segue il testo di König del 1903 ([85]); terzo è, a sorpresa, il testo di Gazzaniga, anch'esso del 1903; quarto viene il diffusissimo, anche in Italia, trattato di Bachmann del 1905 ([86]); quinto è forse il più significativo di tutti, il testo di Hensel del 1908 ([87]); sesto l'unico in francese, del belga Châtelet, del 1913 ([88]); settimo il bellissimo testo di Bianchi, su cui tornerò, del 1921; ottavo il trattato di Hecke del 1923 ([89]), e infine il diffusissimo testo dello stesso Landau, del 1927 ([90]).

Una rapida occhiata a questo elenco dice che l'Italia del 1921 non era particolarmente indietro circa queste tematiche, e come vedremo anche sul piano della ricerca c'erano sintomi positivi.

([83]) Lettera di Guccia a Castelnuovo dell'1 maggio 1912, Archivio del Circolo Matematico di Palermo. Forse vale qui la pena indicare che nel secondo volume delle Opere di Segre alcune citazioni sono erroneamente attribuite ad Heinrich Jung, mentre si riferiscono a Giuseppe Jung, un allievo di Cremona a Milano.

([84]) Nel suo celebre testo, E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, seconda edizione, Teubner, 1927.

([85]) G. König, *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen*, Teubner, 1903.

([86]) P. Bachmann, *Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper*, Teubner, 1905.

([87]) K. Hensel, *Theorie der algebraischen Zahlen*, Teubner, 1908.

([88]) A. Châtelet, *Leçons sur la théorie des nombres*, Gauthier – Villars, 1913.

([89]) E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Akademische Verlagagesellschaft, 1923.

([90]) E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Hirzel, 1927.

Per quanto riguarda poi lo studio aritmetico delle funzioni algebriche, va innanzitutto detto che molti testi sui numeri algebrici contengono parti rilevanti relative alle funzioni algebriche, come ad esempio quello citato di König. Comunque, il testo di riferimento è quello del 1902 di Hensel e Landsberg ([91]).

Prima di lasciare quest'argomento occorre ricordare che uno dei frutti dell'impostazione di Dedekind fu anche il grande sviluppo dell'algebra astratta, che proprio nei primi decenni del XX secolo inizia a muovere i suoi primi, decisivi passi. Qui mi limito a citare il primo testo decisamente astratto sulla teoria dei campi: quello di Ernst Steinitz. ([92])

Dedekind e la teoria delle algebre

Forse la struttura algebrica più studiata nel corso della prima metà dell'Ottocento è stata quella di algebra, numeri ipercomplessi nella nomenclatura di allora. Il passaggio dai complessi agli ipercomplessi avviene con la nascita dei quaternioni di Hamilton, ma prosegue, soprattutto in ambiente inglese, con gli ottonioni, i biquaternioni, i bicomplessi, ecc. ma soprattutto con le matrici, studiate da Cayley, e con le algebre di Clifford. Questa fase raggiungeva il culmine forse nel 1870 quando Benjamin Peirce leggeva, di fronte alla National Academy of Sciences di Washington la sua classificazione delle algebre "astratte" sui reali ([93]).

In qualche misura, fino agli anni '70, questo sviluppo era rimasto estraneo alla corrente principale della matematica europea, forse in quanto rimasto troppo formale con pochi agganci ai grandi problemi aperti, per dirla con lo stesso Peirce, risultava (almeno apparentemente) *cold and unistructive like the artificial Linnean system of botany*.

([91]) K. Hensel, G. Landsberg, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*, Teubner, 1902.

([92]) Anche se si tratta di un articolo su di una rivista, costituisce praticamente una monografia: E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 137, 1910, pp. 167-309.

([93]) L'intervento di Peirce venne poi pubblicato, nel 1881, dall'*American Journal of Mathematics*. Questo lavoro, nato nell'ambiente di ricerca anglosassone, è forse il primo contributo veramente originale della matematica statunitense.

Nel maggio 1877 Frobenius presentò un lavoro, pubblicato l'anno successivo ([94]), sulle trasformazioni delle forme bilineari, che, nella sua ultima parte conteneva il suo famoso teorema sulle algebre di divisione sui reali (in cui dimostrava che esse sono necessariamente solo i reali stessi, i complessi e i quaternioni). Questo è forse il risultato più rilevante della matematica tedesca sulle algebre negli anni '70, ma lo stesso Frobenius non pare particolarmente preso da questi temi che restano collaterali. Mi pare centrata l'osservazione di Thomas Hawkins: *But ... he did not find hypercomplex numbers appealing in and of themselves.* ([95])

Una vera svolta nello studio delle algebre si ebbe nel 1884, quando Schwarz pubblicò la lettera ([96]) che gli aveva inviato l'anno prima Weierstrass, nella quale veniva presentata la teoria delle algebre da un punto di vista del tutto generale ([97]). In questo lavoro, dopo aver espresso gli elementi di un'algebra come combinazione lineare di n "unità" $\{e_i\}$ che determinano il sistema, definisce nel modo solito somma e prodotto di due elementi dell'algebra. Ponendo $e_i e_j = \sum\limits_1^n a_{ijk} e_k$, Weierstrass determina le condizioni sui coefficienti affinchè la moltiplicazione sia commutativa ed associativa e, stabilendo le condizioni per cui una equazione di primo grado sia risolubile, scopre che, per n > 2, l'equazione xy = 0 ammette certamente soluzione; ha quindi scoperto che un'algebra di dimensione > 2 sui reali ammette sempre quelli che chiama divisori dello zero, nome rimasto fino a oggi ([98]).

([94]) G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 84, 1878, pp. 1-63.

([95]) T. Hawkins, *The Mathematics of Frobenius in Context*, Springer, 2013, p. 451.

([96]) K. Weierstrass, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augustus-Universität zu Göttingen*, 1884, pp. 395-414.

([97]) Sul tema si può vedere J. Lützen, Julius Petersen, Karl Weierstrass, Hermann Amandus Schwarz and Richard Dedekind, in J. Lützen (ed.), *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers*, Copenhagen, 2001, pp. 223-254.

([98]) Le algebre con divisori dello zero erano già ben note agli studiosi inglesi, mai nominati da Weierstrass, di sistemi ipercomplessi che li avevano chiamati "nullifici".

Dedekind aveva da lungo tempo lavorato su problemi del genere e riconobbe subito nella struttura portante dell'algebra di cui parlava Weierstrass quella dell'anello dei numeri algebrici sui razionali su cui aveva tanto lavorato. Quindi nel 1885 Dedekind intervenne sull'argomento con un lavoro ([99]) di grande profondità. Tra le altre cose Dedekind estende la teoria di Weierstrass ad algebre sul corpo complesso e mostra come una tale algebra possa essere espressa come somma diretta di copie dei complessi stessi.

L'opera dei due matematici tedeschi dette luogo ad una ricca messe di ulteriori risultati su cui non mi soffermerò.

Qui mi voglio limitare a indicare come il lavoro di Dedekind abbia avuto profonda influenza su Corrado Segre, in particolare nel suo lavoro del 1891 sull'algebra dei bicomplessi ([100]), rimandando peraltro su questo lavoro ad un recente articolo di Cinzia Cerroni ([101]).

Conclusioni: La Matematica Italiana di fronte al nascere delle strutture algebriche

Jean Dieudonné ha scritto, a proposito dell'indirizzo aritmetico nella geometria algebrica: *Il s'agit de la dernière en date, car elle ne prend naissance qu'en 1882 avec deux mémoires fondamentaux, l'un de Kronecker et l'autre de Dedekind et Weber. Mais à la lumière de l'histoire ultérieure, c'est cette tendance qui devait exercer l'influence la plus profonde sur la naissance des concepts de la Géométrie algébrique moderne. ... En outre, cette conception de la Géométrie algébrique est pour nous la plus simple et la plus claire, rompus que nous sommes au maniement des notions d'algèbre « abstraite » : anneaux, idéaux, modules, etc. ; mais c'est précisément ce caractère « abstraite » qui reboutait la plupart des contemporains, déroutés de ne pouvoir y retrouver aisément les notions géométriques correspondantes; aussi l'influence de l'école algébrique resta-t-elle très faible jusque vers 1920* ([102]).

Ho cercato di mostrare come il periodo tra il 1882 e lo scoppio della guerra sia in realtà fondamentale per l'assimilazione delle idee di Dedekind, comunque quanto dice Dieudonné comporta che, se è vero che era già stato detto tutto da Dedekind, la comprensione piena del suo progetto avviene soltanto negli anni '20 e '30 (e più tardi, in una seconda ondata, con Grothendieck). Mi pare quindi giusto concludere con un breve cenno agli sviluppi delle idee di Dedekind negli anni '20 e sulla loro recezione in Italia.

Gli anni dell'immediato dopoguerra sono anni fatidici: sono gli anni dell'irrompere delle tematiche più direttamente strutturali soprattutto nell'algebra, nell'accorrere da tutto il mondo di giovani a Gottinga, non più attorno al vecchio Klein (che sarebbe morto nel 1925), ma a Hilbert e, per l'algebra, a Emmy Nöther (e i cosiddetti Nöther's boys).

Emmy Nöther, che ha curato la edizione delle opere matematiche di Dedekind (proprio nel periodo che si conclude nel 1932, poco prima che, con l'avvento del nazismo, fosse costretta ad abbandonare la Germania) conclude il periodo che abbiamo trattato e ne apre uno nuovo. Nel 1917, poco prima della fine della Grande Guerra, Emmy iniziò finalmente le sue lezioni a Gottinga, dedicate appunto alla teoria degli ideali, sui quali la sua prima pubblicazione fu nel 1920, scritta in collaborazione con Werner Schmeidler ([103]). Come dice Leo Corry *Dedekind's concepts and methods dominate the background of this joint paper.* ([104])

([99]) R. Dedekind, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augustus-Universität zu Göttingen*, 1885, pp. 141-159.

([100]) C. Segre, Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, *Mathematische Annalen*, 40, 1891, pp. 413-467.

([101]) C. Cerroni, From the theory of congeneric surd equations to Segre's bicomplex numbers, arXiv:1511.06917 [math.HO], 2015. Vedi anche C. Zappulla, *La Geometria proiettiva complessa. Origini e sviluppi da Von Staudt a Segre e Cartan*, tesi dottorato 2009, Università di Palermo, http://math.unipa.it/~grim/Thesis_PhD_Zappulla_09.pdf

([102]) J. Dieudonné, *Cours de Géométrie algébrique*, 1, Presses Universitaires de France, 1974.

([103]) E. Nöther, W. Schmeidler, Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differenzial – und Differenzausdrücken, *Mathematische Zeitschrift*, 8, 1920, pp. 1-35.

([104]) L. Corry, cit., p. 225.

L'anno successivo Emmy pubblicò quello che resta il suo lavoro più importante in questo campo, *Idealtheorie in Ringbereichen* ([105]).

Va completamente al di là degli scopi di questo lavoro un esame dell'opera della grande algebrista; quello che voglio limitarmi a sottolineare, riprendendo un'osservazione precedentemente riportata, è che, attorno al 1921, anche in Italia le cose sembravano muoversi e il messaggio di Dedekind avere finalmente portato frutti cospicui. Ricordo soltanto che, a partire dal 1920 e fino al 1923, Luigi Bianchi, dopo 25 anni di silenzio, riprende il filo interrotto dei suoi lavori di teoria dei numeri e di teoria degli ideali, sia pure mantenendosi sempre all'interno del campo complesso. Si tratta complessivamente di sei lavori, tra i quali spiccano per qualità quelli ([106]) dedicati agli ideali primari assoluti, cioè tali che la loro norma coincida con il più piccolo razionale nell'ideale stesso.

Ma, quel che forse è più importante, in quegli anni si inizia a formare, alla Normale di Pisa, una vera e propria scuola di algebra e teoria dei numeri. Cito alcuni nomi un po' alla rinfusa. Onorato Nicoletti, esperto nella teoria delle forme hermitiane; Gaetano Scorza, su cui tornerò tra poco; Giovanni Sansone, l'analista che iniziò la sua carriera scientifica con importanti studi sul gruppo di Picard; Pacifico Mazzoni, interessato nei gruppi finiti e nella teoria di Galois; Alberto Mario Bedarida, dalle grandi potenzialità, che era in contatto epistolare con Edmund Landau ed Emil Artin e aveva lavorato sulla teoria degli ideali; e ancora Luigi Fantappiè e Tito Chella; Michele Cipolla dedito allo studio di teoria dei gruppi e infine l'unico che proseguì (e ad altissimo livello) l'indirizzo di teoria dei numeri, Giovanni Ricci, di cui sono noti gli studi sulla congettura di Goldbach.

Luigi Bianchi aveva anche messo a disposizione dei suoi studenti dei pregevolissimi trattati. Già nel 1912 delle lezioni sulla teoria aritmetica delle forme quadratiche e poi tra il 1921 e il 1923 le sue importanti lezioni di teoria dei numeri, prima in forma litografica, poi a stampa ([107]). Il testo di Bianchi è perfettamente adeguato a livello internazionale, aggiornato e soprattutto scritto in modo didatticamente efficace. Per esempio, la introduzione della teoria degli ideali di Dedekind è preceduta da un'analisi accurata di una serie di casi particolari di ampliamenti algebrici dei razionali e del relativo anello degli interi. Bianchi chiarisce bene gli scopi della sua pubblicazioni (e del suo indefesso lavoro didattico alla Normale): *L'aritmetica, questo antico ramo delle scienze matematiche, colla semplicità dei suoi fondamenti, col rigore delle sue deduzioni, e soprattutto colla bellezza ed armonia delle sue verità ha sempre esercitato un fascino potente sulle menti dei più grandi matematici. Ma soltanto nel secolo scorso, per opera quasi esclusiva di matematici tedeschi, l'aritmetica ha trovato, si può dire, la via* regia, *elevandosi ad aritmetica generale dei corpi algebrici. E qui sono apparsi, completamente, i molteplici legami delle verità aritmetiche colle teorie dell'Algebra, colla teoria dei gruppi finiti ed infiniti, e colle proprietà delle più notevoli trascendenti dell'analisi ... Contribuire alla diffusione di queste teorie aritmetiche, troppo trascurate e pressoché ignorate fra noi è lo scopo che mi propongo colla pubblicazione di questo libro.* ([108])

Un vero progetto didattico e di ricerca quello che aveva intrapreso Bianchi. Un altro analogo parte all'incirca negli stessi anni e ha come protagonista un allievo pisano di Bianchi, Gaetano Scorza. Questa volta si tratta di un altro argomento che abbiamo visto avere origine (almeno in parte) dall'opera di Dedekind, la teoria delle algebre, una teoria su cui a Gottinga lavoravano Emmy Nöther e la sua scuola. Anche in questo caso si tratta dell'affiancare ad una

([105]) E. Nöther, Idealtheorie in Ringbereichen, *Mathematische Annalen*, 83, 1921, pp. 24-66.

([106]) L. Bianchi, Sugli ideali primarii assoluti in un corpo algebrico, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, (9), 1, 1922, pp. 1-18; L. Bianchi, Sulla composizione degli ideali primarii assoluti in un corpo algebrico, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (5), 32, 1923, pp. 53-58.

([107]) L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria aritmetica delle forme quadratiche e ternarie*, Spoerri, 1912; L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici e principi di aritmetica analitica*, Spoerri, 1921; L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici*, Zanichelli, 1923.

([108]) L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei numeri ...*, cit., p. IV-V.

serie di lavori di ricerca sull'argomento ([109]) un progetto didattico che si concretizza in un volume ([110]) con intenti chiaramente didattici.

Questo volume è particolarmente significativo per vari motivi. Innanzitutto è in assoluto il primo trattato sulla teoria delle algebre. Il primo in lingua tedesca apparirà solo nel 1927 ([111]). Un secondo motivo è che con l'opera di Scorza viene stabilito un contatto diretto con la scuola americana di algebra di Chicago, fondata da Leonard Dickson, ma sviluppatasi principalmente con l'arrivo nell'università americana dello scozzese Joseph Wedderburn ([112]). Proprio negli anni '20 tra i matematici tedeschi e gli americani si stavano stabilendo solide relazioni di ricerca. Scorza (e poi anche Cecioni ([113])) appaiono in questo momento come un terzo polo in grado di dialogare con i due gruppi.

Su questi due fronti la situazione in Italia appare in linea con quella del resto del mondo; certo indietro rispetto alla matematica tedesca, ma sugli stessi standards di quella americana e certo assai più avanti di quella francese. Invece purtroppo tutto tace su quello che poteva essere il terreno più favorevole: la teoria aritmetica della geometria algebrica inaugurata trenta anni prima dalla memoria di Dedekind e Weber. Come appare chiaramente dalla commemorazione di Bianchi da parte di Scorza, citata all'inizio, anche i filoni che più apparivano promettenti alla fine del decennio sembrano esauriti. Alla morte di Bianchi il gruppo che egli aveva formato appare disperso: alcuni, come Sansone e Fantappiè hanno cambiato indirizzo di ricerca, altri come Bedarida sono stati sostanzialmente emarginati. Personaggi certamente riconosciuti e influenti nel mondo accademico italiano come Scorza e Ricci, lamenteranno spesso l'isolamento in cui si sentono lasciati.

Mi pare giunto il momento di rileggere la citazione di Zariski fatta all'inizio: *It was a pity that my Italian teachers never told me there was such a tremendous development of the algebra that is connected with algebraic geometry*. Rileggendola attentamente appaiono due aspetti: da un lato vi è il rimpianto per aver conosciuto tardi e per via autonoma gli sviluppi dovuti ai grandi sviluppi sulla *algebra connected with algebraic geometry*, cioè dell'algebra nata negli anni '70 del XIX secolo sotto l'influsso determinante di Dedekind e Kronecker; ma dall'altro c'è una frase che dovrebbe riempirci d'orgoglio: il rimprovero è diretto ai suoi Maestri italiani, *my Italian teachers*. So bene che la storia non si fa con i se, ma non posso fare a meno di pensare che Oscar Zariski rappresenti un vero e proprio sviluppo "naturale" della scuola geometrica italiana ([114]), uno sviluppo che sarebbe forse stato organico e completo se il mondo accademico italiano non si fosse chiuso impermealizzandosi ai contributi esterni, se si fosse proseguita la politica scientifica dei Betti, dei Segre, che avevano mandato i Bianchi, i Fano, e tanti altri giovani promettenti a lavorare a

([109]) Non approfondirò questi importanti contributi di ricerca di Scorza. Mi permetto di rinviare ad un mio vecchio lavoro: A. Brigaglia, La teoria generale delle algebre in Italia dal 1919 al 1937, *Rivista di storia della scienza*, 1, 1984, pp. 199-237.

([110]) G. Scorza, *Corpi numerici e algebre*, Principato, 1921.

([111]) In realtà Leonard Dickson aveva pubblicato nel 1914 un volumetto, Linear Algebras, citato da Scorza, certo non adeguato e che sarà seguito nel 1923, da un nuovo testo, *Algebras and their arithmetics*, per il quale *Scorza's book has been of material assistance*. Nel 1927 il libro venne tradotto, in un'edizione completamente allargata e rivista, in tedesco (*Algebren und ihre Zahlentheorie*) e divenne il testo base sull'argomento per gli algebristi tedeschi. Sulle vicende di questo libro vedi G. Frei, The theory of algebras over number fields, in J. Gray, K. Parshall (eds.), *Episodes in the History of Modern Algebra*, American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2007, pp. 117-151.

([112]) Sulla scuola algebrica americana di Chicago esistono vari lavori pregevoli; vedi ad esempio K. Parshall, Joseph Wedderburn and the structure theory of algebras, *Archive for History of Exact Sciences*, 32, 1985, pp. 223-349; D. Fenster, Leonard Eugene Dickson and his work in the arithmetic of algebra, *Archive for History of Exact Sciences*, 52, pp. 119-159; D. Fenster, Research in algebra at the university of Chicago, in J. Gray, K. Parshall (eds.), *Episodes* ... cit., pp. 179-197.

([113]) Su Francesco Cecioni e il suo ruolo anche rispetto alla ricerca di Dickson, si veda A. Brigaglia, P. Mammone, Francesco Cecioni and the construction of division algebras, in A. Brigaglia, C. Ciliberto, E. Sernesi (eds.), *Algebra e Geometria (1860-1940): il contributo italiano*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, (2), 36, 1994, pp. 27-45.

([114]) Sull'opera di aritmetizzazione di Zariski, vedi S. Slembek, On the arithmetization of algebraic geometry, in J. Gray, K. Parshall (eds), *Episodes* ..., cit. pp. 285-299.

contatto con le tendenze internazionali più avanzate, che poi avrebbero reinterpretato in modo creativo. Mentre la nuova generazione di matematici francesi era impegnata a recuperare il terreno perduto (si pensi a Weil e a Chevalley) i matematici italiani non coglievano l'importanza di ciò che stava fermentando in alcuni ambienti, sia pure ristretti d'Italia.

Mi rendo conto di avere messo troppi "se" nel mio discorso, ma nel guardare ai rapporti tra l'opera di Dedekind e la matematica italiana, non posso fare a meno di avere la sensazione di una grande occasione mancata.

Bibliografia e Sitografia

Avigad J., Dedekind's 1871 version of the theory of ideals, https://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/Papers/ideals71.pdf

Bachmann P., *Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper*, Teubner, 1905.

Barrow-Green J., Gray J., Geometry at Cambridge, 1863-1940, *Historia Mathematica*, 33, 2006, pp. 315-356.

Bertini E., Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen, *Mathematische Annalen*, 34, 1889, pp. 447-449.

Bianchi L., Sulle forme quadratiche a coefficienti e a indeterminate complesse, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* (4), 5, 1° semestre, 1889, pp. 589-599.

Bianchi L., Geometrische Darstellung der Gruppen Linearer Substitutionen mit Ganzen Complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, 38, 1891, pp. 313-333.

Bianchi L., Sui Gruppi di Sostituzioni Lineari con Coefficienti appartenenti a Corpi Quadratici immaginari, *Mathematische Annalen*, 40, 1892, pp. 332-412, e 42, 1892, pp. 36-57.

Bianchi L., Sugli ideali primarii assoluti in un corpo algebrico, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, (9), 1, 1922, pp. 1-18.

Bianchi L., Sulla composizione degli ideali primarii assoluti in un corpo algebrico, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (5), 32, 1923, pp. 53-58.

Bianchi L., *Lezioni sulla teoria aritmetica delle forme quadratiche e ternarie*, Spoerri, 1912.

Bianchi L., *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici e principi di aritmetica analitica*, Spoerri, 1921.

Bianchi L., *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici*, Zanichelli, 1923.

Boi L., Giacardi L., Tazzioli R., *La Découverte de la Géométrie non Euclidienne sur la Pseudosphère*, Blanchard, 1998.

Bottazzini U., *Va' Pensiero*, Il Mulino, 1994.

Bottazzini U., Gray J., *Hidden Harmony – Geometric Fantasies*, Springer, 2013.

Brigaglia A., La teoria generale delle algebre in Italia dal 1919 al 1937, *Rivista di storia della scienza*, 1, 1984, pp. 199-237.

Brigaglia A., Mammone P., Francesco Cecioni and the construction of division algebras, in A. Brigaglia, C. Ciliberto, E. Sernesi (eds.), *Algebra e Geometria (1860-1940): il contributo italiano*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, (2), 36, 1994, pp. 27-45.

Brigaglia A., An Overview of Italian Arithmetic after the Disquisitiones Arithmeticae, in C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer, *The Shaping of Arithmetic after Gauss' Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, 2007, pp. 431-452.

Brill A., M. Nöther, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker – Vereinigung*, 3, 1892-93, pp. I-XXIII e 109-566.

Châtelet A., *Leçons sur la théorie des nombres*, Gauthier–Villars, 1913.

Cerroni C., From the theory of congeneric surd equations to Segre's bicomplex numbers, arXiv:1511.06917 [math.HO], 2015

Chinello F., *Paolo Gazzaniga, un matematico dimenticato*, tesi di laurea, a. a. 1985 / 86, relatore M. Emaldi, Università di Padova.

Chinello F., Emaldi M., Paolo Gazzaniga e la teoria algebrica dei numeri del secolo XIX, *L'Educazione Matematica*, 3, 1990, pp. 161-177.

Corry L., *Modern algebra and the rise of mathematical structures,* Birkhäuser, 1996.

Dedekind R., Sur la théorie des nombres entiers algébriques, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 11, 1876, pp. 278-288 e (2), 1, 1877, pp. 17-41, 69-92, 207-248.

Dedekind R., *Theory of Algebraic Integers*, Cambridge University Press, 1996 (trad. J. Stillwell).

Dedekind R., Weber H., Theorie der algebraischen Functionen der einer Veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 1882, pp. 181-290.

Dedekind R., Weber H., *Theory of algebraic functions of one variable*, American Mathematical Society e London Mathematical Society, 2012, trad. J. Stillwell.

Dedekind R., Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augustus-Universität zu Göttingen*, 1885, pp. 141–159.

Dedekind-Cantor, Corrispondenza, *Pristem/Storia, Note di Matematica, Storia e Cultura*, 6, 2002 (tradotta e curata da P. Nastasi e G. Rigamonti).

Dieudonné J., *Cours de Géométrie algébrique*, 1, Presses Universitaires de France, 1974.

Dirichlet P., *Vorlesungen über Zahlentheorie*, dritte Auflage, Braunschweig, 1879.

Dirichlet P., *Lezioni sulla Teoria dei Numeri*, Venezia, Tipografia Emiliana, 1881 (trad. E. Faifofer).

Dugac P., *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin, 1977.

Edwards H., The Genesis of Ideal Theory, *Archive for History of Exact Sciences*, 23, 1980, pp. 321-378.

Edwards H., Dedekind's invention of Ideals, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 15, 1983, pp. 8-17.

Edwards H., *Divisor Theory*, Birkäuser, 1990.

Emaldi M., Paolo Gazzaniga e la teoria dei numeri algebrici, in *Le Scienze Matematiche nel Veneto dell'Ottocento, Venezia*, 1994, pp. 209-223.

Fenster D., Leonard Eugene Dickson and his work in the arithmetic of algebra, *Archive for History of Exact Sciences,* 52, pp. 119-159.

Fenster D., Research in algebra at the university of Chicago, in J. Gray, K. Parshall (eds.), *Episodes in the History of Modern Algebra,* American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2007, pp. 179-197.

Fraenkel A., Axiomatische Begründung von Hensels p-adischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 141, 1912, pp. 43-76.

Frei G., The theory of algebras over number fields, in J. Gray, K. Parshall (eds.), *Episodes in the History of Modern Algebra,*

American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2007, pp. 117-151.
Frobenius G., Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, - *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 84, 1878, pp. 1-63.
Fubini G., Commemorazione di Luigi Bianchi, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (6), 10, 1934, Appendice, pp. 34-44.
Gazzaniga P., Espressioni di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti, *Annali di Matematica*, (2), 10, 1880-82, pp. 279-290.
Gazzaniga P., Sui residui di ordine qualunque rispetto ai moduli primi, *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, (6), 4, 1885 / 1886, pp. 1271-1280.
Gazzaniga P., *Gli elementi della teoria dei numeri*, Drucker, 1903.
Hasse H., Kurt Hensel zum Gedächtnis, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 187, 1949, pp. 1-13.
Hawkins T., *The Mathematics of Frobenius in Context*, Springer, 2013.
Hecke E., *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Akademische Verlagagesellschaft, 1923.
Hensel K., Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 109, 1891, pp. 1-42.
Hensel K., Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 6, 1899, pp. 83-88.
Hensel K., Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen, *Acta Mathematica*, 23, 1900, pp. 339-416.
Hensel K., Landsberg G., *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*, Teubner, 1902.
Hensel K., *Theorie der algebraischen Zahlen*, Teubner, 1908.
Hilbert D., Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 3, 1893, p. 59.
Hilbert D., Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4, 1897, pp. 175-546.
Hilbert, *The Theory of Algebraic Number Fields, Springer*, 1998, trad. Di I. Adamson, con introduzione di Franz Lemmermayer e Norbert Schappacher.
Hurwitz A., Über die Theorie der Ideale, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1894, pp. 291-298.
Iurato G., *On some historical aspects of Riemann zeta functions*, 2, 2013, <hal 00907136>, https://hal.inria.fr/file/index/docid/828587/filename/RZF1.pdf
Jung H., Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängiger Verändlicher x, y in der Umgebung einer Stelle x = a, y = b, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 133, 1908, pp. 289-314.
Jung H., Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 138, 1910, pp. 77-95.
Jung H., Sur les fonctions algébriques de deux variables, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 147, 1908, pp. 174-176.
Jung H., Primteiler algebraischer Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen und ihr Verhalten bei birationalen Transformationen, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 26, 1908, pp. 113-127.
Klein F., *Über Riemann's Theorie der Algebraischen Functionen und ihre Integrale*, Teubner, 1882.
König G., *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen*, Leipzig, 1903.
Koreuber M., *Emmy Noether, die Noether–Schule und die moderne Algebra*, Springer, 2015
Kronecker L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 1882, pp. 237-387.
Landau E., *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, seconda edizione, Teubner, 1927.
Landau E., *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Hirzel, 1927.
Lasker E., Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Mathematische Annalen*, 60, 1905, pp. 20-116. Lemmermeyer F., *Reciprocity Laws: from Euler to Eisenstein*, Springer, 2013.
Luciano E., Roero S., Da Torino a Gottinga, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 33, 2012, pp. 1-232, p. 104.
Lützen J., Julius Petersen, Karl Weierstrass, Hermann Amandus Schwarz and Richard Dedekind, in J. Lützen (ed.), *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers*, Copenhagen, 2001, pp. 223-254.
Macaulay F., On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers, *Mathematische Annalen*, 74, 1913, pp. 66-121.
Macaulay F., *The algebraic theory of modular systems*, Cambridge University Press, 1916.
Martini L., Algebraic research schools in Italy at the turn of the twentieth century: the cases of Rome, Palermo, and Pisa, *Historia Mathematica* 31, 2004, pp. 296-309.
Netto E., *Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra*, Teubner, 1882.
Netto E., *Teoria delle sostituzioni e sue applicazioni all'algebra*, Versione dal tedesco con modificazioni e aggiunte dell'autore per G. Battaglini, Loescher, 1885.
Nöther E., Schmeidler W., Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differenzial – und Differenzausdrücken, *Mathematische Zeitschrift*, 8, 1920, pp. 1-35.
Nöther E., Idealtheorie in Ringbereichen, *Mathematische Annalen*, 83, 1921, pp. 24-66.
O'Connor J., Robertson E., Francis Sowerby Macaulay, in rete http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Macaulay.html
Parshall K., Joseph Wedderburn and the structure theory of algebras, *Archive for History of Exact Sciences*, 32, 1985, pp. 223-349.
Poincaré H., Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica*, 1, 1882, pp. 55-127.
Reye T., *Geometria di Posizione*, Venezia, 1884.
Scarpis U., *Primi elementi della teoria dei numeri*, Hoepli, 1897.
Scorza G., *Corpi numerici e algebre*, Principato, 1921
Scorza G., In Memoria di Luigi Bianchi, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 16, 1930, pp. 3-27.
Segre C., Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, *Annali di matematica pura e applicata*, (2), 22, 1894, pp. 41-142, in *Opere*, v. I, UMI, 1956, pp. 198-304.
Segre C., Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, *Mathematische Annalen*, 40, 1891, pp. 413-467.
Severi F., Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre, *Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, (5), 9, 1902, pp. 105-113.
Slembek S., On the arithmetization of algebraic geometry, in J. Gray, K. Parshall (eds), *Episodes in the History of Modern Algebra,* American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2007, pp. 285-299.
Steinitz E., Algebraische Theorie der Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 137, 1910, pp. 167-309.
Tazzioli R., New Perspectives on Beltrami's Life and Work, in S. Coen, *Mathematicians in Bologna*, Birkhauser, 2012, pp. 477-480

Tchebichev P., *Teoria delle Congruenze*, Loescher, 1895 (trad. I. Massarini).
Van der Waerden B., On the sources of my book Moderne Algebra, *Historia Mathematica*, 2, 1975, pp. 31-40.
Van der Waerden B., The foundations of algebraic geometry from Severi to André Weil, *Archive for History of Exact Sciences*, 7, 1970, pp. 171-180
Weber H., *Lehrbuch der Algebra*, Vieweg, 1896.
Weierstrass K., Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augustus-Universität zu Göttingen*, 1884, pp. 395-414.
Zappulla C., *La Geometria proiettiva complessa. Origini e sviluppi da Von Staudt a Segre e Cartan*, tesi di dottorato 2009, Università di Palermo, http://math.unipa.it/~grim/Thesis_PhD_Zappulla_09.pdf

Aldo Brigaglia

Pensionato, già per molti anni docente di Matematiche Complementari presso l'Università di Palermo. Si occupa principalmente di storia della matematica e in particolare di storia della geometria algebrica e di storia delle matematiche in Sicilia. Ultimamente si interessa della storia delle trasformazioni geometriche e delle tassellazioni e dei poliedri negli spazi e negli iperspazi.