Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Luigi Corgnier, Carla Massaza, Paolo Valabrega

Dai reali di Dedekind e Cantor ai campi ordinati non archimedei

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2017), n.1, p. 45–61.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_1_45_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2017.

Dai reali di Dedekind e Cantor ai campi ordinati non archimedei

Luigi Corgnier
Politecnico di Torino
E-mail: luigi.corgnier@polito.it

Carla Massaza
Politecnico di Torino
E-mail: carla.massaza@polito.it

Paolo Valabrega
Politecnico di Torino
E-mail: paolo.valabrega@polito.it

Sommario: *In questo lavoro si discute in forma divulgativa il completamento di un campo ordinato secondo le teorie di Dedekind e di Cantor, confrontando i risultati nel caso archimedeo e in quello non archimedeo.*

Abstract: *This paper presents, with a non-technical approach, the Cantor completion and the Dedekind completion of an ordered field, focusing on the differences that arise when the base field does not satisfy the archimedean property.*

1. – Introduzione

Il cosiddetto Postulato di Archimede (o di Eudosso-Archimede) compare nel Libro V degli Elementi di Euclide e afferma che, *se ABC sono tre punti di una retta tali che B si trovi fra A e C e se si riporta il segmento AB a partire da B verso C una, due, ... volte, si finisce con il superare il punto C.*

Tale postulato nel mondo antico ebbe importanti applicazioni, in particolare al principio di esaustione, che permise a Eudosso di calcolare il volume di un cono e ad Archimede l'area sotto un arco di parabola.

In una possibile formulazione algebrica riferita agli interi positivi (ma il discorso si può allargare ai razionali positivi ed ai reali positivi), esso afferma che, dati due numeri interi positivi a, b, un multiplo abbastanza grande na di a supera b, ovvero che il sottomultiplo un n-esimo di b scende al di sotto di a, pur di scegliere il numero naturale n abbastanza grande.

Nessuno mise in discussione tale proprietà fino alla seconda metà dell'Ottocento, quando prima Veronese, poi Levi-Civita, infine Hilbert provarono in modo inconfutabile che esistono modelli di geometrie e di campi numerici dove non vale il Postulato di Archimede, sfidando con ciò l'ira del grande Cantor, inventore dei numeri transfiniti ma feroce avversario degli infinitesimi, da lui considerati non esistenti.

In realtà oggi i campi ordinati non archimedei sono accettati e studiati, anche se non molto noti.

Accettato: il ???

In questo articolo vogliamo mettere in evidenza le affinità e le differenze fra le proprietà dei campi ordinati in cui vale il Postulato di Archimede e quelle dei campi ordinati in cui non vale. In particolare ci occupiamo delle costruzioni di Dedekind e di Cantor del campo reale, che consentono di capire a fondo le differenze fra l'archimedeo e il non archimedeo, in quanto, se si richiede che l'estensione sia ancora un campo, le sezioni di Dedekind implicano obbligatoriamente la validità del Postulato di Archimede, mentre il completamento alla Cantor mediante le successioni di Cauchy può applicarsi anche in ambito non archimedeo.

Questo articolo è divulgativo e in parte rilevante i concetti e i risultati sono espressi in modo non troppo formale, così come gli esempi.

Dopo alcune premesse informali sui campi ordinati (il concetto di campo si considera noto a ogni lettore), si discute la proprietà archimedea e, laddove essa non sia verificata, si introducono i concetti di infinitesimo e di infinito (con qualche notizia storica). Si propone quindi l'esempio più elementare possibile di campo ordinato non archimedeo (da un'idea di Hilbert, ma semplificata). Si passa poi alla trattazione generale del completamento di un campo ordinato mediante le sezioni di Dedekind (che qui vengono presentate nella forma, a nostro parere più semplice di quella usuale, dei segmenti iniziali) e mediante le successioni di Cauchy, cioè alla maniera di Cantor. Viene quindi discussa la questione, più delicata, che riguarda la validità del Postulato di Eudosso-Archimede in un campo ordinato completato in ciascuno dei due modi: si mette in evidenza che il completamento alla Dedekind produce un campo archimedeo se e soltanto se si parte da un campo archimedeo (in caso contrario le sezioni di Dedekind non producono nemmeno un campo e quindi sono molto inappropriate per completare), mentre il completamento alla maniera di Cantor (con le successioni di Cauchy) produce sempre un campo, archimedeo o no a seconda del campo che si vuole completare. Si trattano infine i campi ordinati massimali, chiamati anche campi reali chiusi, che, come il campo reale nell'archimedeo, diventano algebricamente chiusi se si aggiunge loro la radice quadrata di -1; inoltre si mettono in evidenza alcuni aspetti topologici che distinguono il non archimedeo dal reale. Nel n. 10 si discute di uniforme continuità e teorema del valore intermedio in ambiente non archimedeo, nel n. 11 si presentano vari esempi, fra cui il campo di Levi-Civita e il campo degli iperreali, per poi concludere il lavoro con considerazioni sull'insegnamento dei numeri reali.

2. – Premesse informali

Si considera noto il concetto di campo, del quale sono esempi per noi interessanti non solo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, ma anche i campi delle frazioni $\mathbb{Q}(t)$, $\mathbb{R}(t)$, dove t è una indeterminata (n. 4). Fisseremo la nostra attenzione sui campi ordinati, rimandando, per una trattazione completa, a [3], [13], [26] e [16].

Campo ordinato è un campo in cui si sia introdotta una relazione di ordine totale compatibile con le operazioni di campo ([16]); senza entrare troppo in dettaglio, ricordiamo che in un campo ordinato valgono le regole ordinarie per trattare le disuguaglianze; in particolare, se $a < b$, allora si ha $a + c < b + c$ per ogni a, b, c nel campo e, se si definiscono positivi gli elementi maggiori di 0 e negativi gli elementi minori di 0, allora il prodotto di due positivi o di due negativi è positivo, mentre il prodotto di un positivo per un negativo è negativo (regola dei segni); le somme di quadrati non sono mai negative, sono anzi positive quando almeno un addendo sia non nullo; quindi 1 è positivo.

Per ordinare un campo, è sufficiente definire gli elementi positivi. Infatti la disuguaglianza $a > b$ può essere tradotta in $a - b > 0$.

È facilmente dimostrabile che ogni campo ordinato ha caratteristica 0; in particolare, esso contiene $\mathbb{Q}$ a meno di isomorfismi, e tramite $\mathbb{Q}$ una copia di $\mathbb{N}$, i cui elementi restano positivi nel campo.

In un campo ordinato si può introdurre una topologia legata all'ordine, e quindi le nozioni di limite e di convergenza. Per questo è sufficiente usare le stesse definizioni date in $\mathbb{R}$. Piú precisamente, per ogni elemento a del campo si definisce suo *intorno circolare di raggio* r (r elemento positivo del campo) l'insieme di tutti gli elementi x tali che il valore assoluto di $x - a$ (il massimo fra $x - a$ e $a - x$) sia minore di r. Nel seguito faremo l'ipotesi, non sempre necessariamente soddisfatta, che nel campo ordinato in questione la suddetta topologia ammetta una base numerabile di intorni dello zero; questa condizione è necessaria per parlare di convergenza di successioni.

3. – La proprietà archimedea: definizione, considerazioni euristiche e notizie storiche

Come già detto nell'introduzione, la proprietà archimedea è introdotta nel libro V di Euclide, Prop. 4, in forma geometrica. Noi la enunceremo in forma algebrica e la denoteremo con il simbolo *P.A.* Essa è vera nel semigruppo ordinato $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, e quindi, a partire di lí, nei campi razionale e reale.

Informalmente essa afferma che, presi un elemento positivo a e un elemento $b > a$, la somma di a con se stesso n volte supera b, purché n sia abbastanza grande. In formule:

$$a + a + a + ... + a = na > b.$$

Più formalmente essa si enuncia così:

Dati due numeri naturali a, b con $a \neq 0$, esiste un numero naturale n tale che risulti $na > b$.

In un qualunque campo ordinato $\mathbb{K}$, la proprietà archimedea si enuncia così:

(P.A.) Dati due qualunque elementi positivi $a, b \in \mathbb{K}$, con $a \neq 0$, esiste un numero naturale n tale che risulti $na > b$, o, equivalentemente, *il sottomultiplo $\frac{b}{n}$ di b è minore di a.* Essa può anche essere enunciata nella forma: *la copia in $\mathbb{K}$ dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non è limitata superiormente*, ossia: *dato un qualsiasi elemento del campo, è possibile trovare un numero naturale più grande di esso* (e di conseguenza infiniti). Infatti, se vale la proprietà di non limitatezza di $\mathbb{N}$, basta scegliere un numero naturale n maggiore di $\frac{b}{a}$ per assicurare che sia $a + a + a + ... + a = na > b$. Viceversa se, per ogni scelta di a e b positivi, esiste sempre un naturale n tale che sia $a + a + a + ... + a = na > b$, basta scegliere $a = 1$ per vedere che esiste sempre un naturale per cui risulta $n > b$; quindi $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente.

È facile dimostrare che il campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali soddisfa alla proprietà archimedea. Infatti esso coincide con il campo delle frazioni $\frac{r}{s}$ di numeri interi. Allora una frazione positiva (quindi r e s possono essere scelti positivi) è maggiorata dal numero naturale $r + 1$.

Si può provare (in modo non proprio immediato, si veda più avanti la Proposizione 7.1) che anche il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali è archimedeo. Il lettore può accontentarsi per ora della seguente osservazione: se un numero reale positivo è rappresentabile come una parte intera seguita da un allineamento infinito di cifre decimali non tutte uguali a 9, esso è banalmente maggiorato dalla sua parte intera aumentata di 1.

A questo punto potrebbe anche sorgere il dubbio che tutti i campi ordinati siano archimedei, ma questo è facilmente confutato portando esempi di campi non archimedei. Fra questi ci sono, come sarà verificato in seguito (n. 4 e n. 11), i campi $\mathbb{Q}(t)$ e $\mathbb{R}(t)$, opportunamente ordinati. Un esempio più sofisticato è il campo usato dall'Analisi non standard, di cui discuteremo, con qualche dettaglio, nel n. 11, esempio 3 (si vedano [11] e [20]).

In termini geometrici, sul campo reale, la proprietà archimedea afferma che, dati due segmenti, la somma del più corto con se stesso, ripetuta un numero sufficiente di volte, supera in lunghezza quello più lungo. In questa forma sembra una proprietà ovviamente vera, tanto che non è mai stata posta in discussione, fino a quando alla fine dell'Ottocento Hilbert costruì una geometria non archimedea, provando così che la proprietà archimedea non segue dagli altri assiomi della geometria.

Accettata per un momento l'esistenza di campi non archimedei, questo articolo cerca di analizzare quali analogie e quali differenze essi abbiano rispetto ai campi archimedei, cioè quali proprietà dipendano dall'ipotesi archimedea e quali no.

La proprietà archimedea si esprime anche affermando che, dati a e b positivi, il sottomultiplo $\frac{b}{n}$ di b è minore di a, per n abbastanza grande; quindi essa è alla base della validità di metodi iterativi, in cui si procede a passi successivi. Un esempio che dovrebbe essere noto è il processo dicotomico, in cui si dimezza ripetutamente un intervallo, fino a renderlo di lunghezza inferiore a quella di un preassegnato intervallo (notiamo che in un campo ordinato l'inverso di un elemento positivo 'grande' è un elemento positivo 'piccolo', quindi la *P.A.* autorizza il procedimento dicotomico). Pertanto non dovrebbe stupire il fatto che certe proprietà dimostrate con il processo dicotomico non siano valide nel caso non archimedeo.

In un campo non archimedeo cadono delle proprietà che si è abituati a ritenere del tutto ovvie. Ad esempio non è vero che il limite di n, per n tendente a infinito, sia infinito (nel senso a tutti noto). Infatti, per definizione, la successione dei numeri naturali è maggiorata da almeno un elemento.

Prima di procedere in dettaglio, introduciamo una terminologia suggestiva. In un campo non archimedeo, gli elementi più grandi di ogni numero naturale, che esistono per ipotesi, si chiamano 'infiniti positivi'. I loro opposti si chiamano ovviamente 'infiniti negativi'. Similmente gli elementi positivi più piccoli del reciproco di ogni numero naturale si dicono 'infinitesimi positivi', e analogamente per gli 'infinitesimi negativi'. Gli elementi non infiniti e non infinitesimi si dicono 'valutabili'. Gli elementi non infiniti si dicono 'finiti'. Quindi, in un campo non archimedeo, si può tranquillamente parlare di infiniti e di infinitesimi come elementi effettivi, e non solo limiti, come ci ha abituati l'Analisi matematica tradizionale. Dunque la proprietà archimedea di un campo ordinato si può enunciare anche nella forma: *non esistono elementi infiniti e non esistono elementi infinitesimi, tutti gli elementi sono valutabili.*

È facile dimostrare proprietà abbastanza ovvie di infiniti e infinitesimi, che riflettono quelle note dei limiti: la somma di due infiniti positivi è un infinito positivo, la somma di un finito e un infinito è un infinito con il segno dell'addendo infinito, la somma di un infinito positivo e uno negativo può assumere qualsiasi valore, il prodotto di infiniti (o infinitesimi) è rispettivamente infinito (o infinitesimo), il prodotto di un infinito con un infinitesimo può assumere qualsiasi valore.

Il percorso per arrivare ad ammettere che esistono infiniti e infinitesimi e che questi si possono trattare, in certo senso, come i numeri ordinari a tutti noti, è stato tortuoso e non privo di conflitti fra i matematici, coinvolgendone alcuni fra i maggiori dell'Otto-Novecento (e di tutti i tempi).

A Dedekind (1833-1916) e a Cantor (1845-1918) era chiaro che la proprietà archimedea si poteva dedurre nel sistema delle sezioni di numeri razionali proposta da Dedekind, mentre nel sistema delle successioni di Cauchy di numeri razionali proposta da Cantor mancava una dimostrazione rigorosa. Ciò farebbe pensare che Cantor si ponesse la questione della sua validità in generale. In realtà Cantor era assolutamente certo che si potesse dedurre anche nella sua teoria dei numeri reali, in quanto, in sostanza, una conseguenza degli assiomi comunemente accettati della matematica. Questa certezza gli fece attaccare i primi matematici che cercarono di introdurre numeri infinitamente piccoli ma non nulli, come ad esempio Thomae (ed altri). Gli attacchi di Cantor erano naturalmente ben fondati, grazie a notevoli errori commessi nelle definizioni e nelle dimostrazioni da Thomae (e dagli altri).

A un altro matematico di poco più giovane di Cantor e quindi di Dedekind, Giuseppe Veronese (1854-1917), all'inizio degli anni Novanta di due secoli fa, viene in mente che possa essere messa in discussione la 'ovvia' non esistenza degli infinitesimi. Ma tale dubbio, che poi si risolve positivamente per l'esistenza in un lavoro del 1892 [25], lo mette in conflitto con Cantor, convinto proprio del contrario e pronto ad attaccarlo (nonostante che Veronese fosse un estimatore di Cantor e dei suoi numeri transfiniti). Su questo tema ha scritto un bell'articolo il logico Laugwitz ([17]).

Su suggerimento di Veronese, agli inizi degli anni Novanta, Tullio Levi-Civita (1873-1941), allora studente a Padova e in seguito famoso per altre ricerche (la teoria dei tensori, sviluppata in precedenza da Gregorio Ricci Curbastro, poi usata in relatività da Einstein proprio nella forma dovuta a Levi-Civita) si dedica a uno studio sul postulato di Archimede, riuscendo nel 1892-93 a costruire un insieme con somma, prodotto, ordinamento come il campo numerico reale ma che, contrariamente a ogni intuizione elementare, non soddisfa affatto alla proprietà archimedea; in sostanza ci sono elementi positivi a, b tali che non basta prendere il doppio, il triplo, ... di a, per riuscire a superare b. Occorre dire che questi campi contengono davvero gli infinitesimi e gli infiniti; non si tratta infatti dei numeri transfiniti di Cantor (che non formano un campo numerico come quello razionale o reale), ma di elementi che appartengono a un nuovo insieme, dove sono permesse tutte le manipolazioni consentite sui numeri ordinari. In tali campi, oltre a numeri infiniti, ci sono numeri positivi che sono più piccoli di ogni numero razionale positivo, ma non sono affatto eguali a 0; in sostanza, ci sono i tanto misteriosi infinitesimi, che diventano nella teoria di Levi-Civita dei semplici e banali numeri come tutti gli altri.

Le proprietà dei campi ordinati (archimedei e non) analizzate in questo articolo sono essenzialmente quelle legate al *completamento di un campo*.

Il completamento è l'operazione che, applicata ai numeri razionali, porta a definire i numeri reali. Informalmente possiamo dire che l'insieme dei razionali è insufficiente per eseguire operazioni anche elementari. Ad esempio, si scopre che nessun numero razionale fornisce la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario, e si rimedia a questa e ad altre carenze ampliando $\mathbb{Q}$ con l' introduzione dei numeri reali. Più precisamente, in un campo ordinato emergono due motivi di incompletezza:

- Esistono sottoinsiemi limitati superiormente, ma privi di estremo superiore (cioè del più piccolo fra gli elementi che limitano superiormente l'insieme);
- Esistono successioni i cui elementi si avvicinano quanto si vuole fra di loro (dette 'convergenti internamente' o 'di Cauchy', concetto comunque precisato in seguito), ma che sono prive di limite.

L'operazione di completamento consiste nel tentare di introdurre tali elementi mancanti, e può essere fatta con due filosofie diverse:

- Si cerca di aggiungere tutti gli estremi superiori di tutti i sottoinsiemi limitati superiormente (completamento alla Dedekind);
- Si cerca di aggiungere tutti i limiti di tutte le successioni convergenti internamente (completamento alla Cantor).

Probabilmente il lettore conosce il completamento del campo dei numeri razionali, che produce il campo dei numeri reali, e sa anche che in questo caso i due metodi sono equivalenti. In questo articolo si fa vedere che questa equivalenza dipende in modo essenziale dal fatto che il campo di partenza è archimedeo. I risultati fondamentali sono:

- Se un campo è archimedeo, i suoi completamenti alla Dedekind o alla Cantor producono risultati equivalenti, e precisamente un campo ampliato, ancora archimedeo, e completo nei due sensi: ogni sottoinsieme limitato superiormente ha estremo superiore e ogni successione di Cauchy ha limite.
- Se un campo non è archimedeo, il suo completamento alla Cantor produce ancora un campo non archimedeo, completo nel secondo senso (ogni successione di Cauchy ha limite), ma non nel primo (esistono sottoinsiemi limitati ma privi di estremo).
- Se un campo non è archimedeo, il suo completamento alla Dedekind produce un insieme che *non è un suo sopracampo ordinato* e che inoltre è completo nel primo senso (ogni sottoinsieme limitato ha gli estremi) ma non nel secondo; infatti il completamento alla Dedekind non è un suo sopraspazio topologico, e quindi non ha senso parlare di successioni di Cauchy.

Pertanto l'unico completamento possibile di un campo non archimedeo è quello alla Cantor e quindi nel seguito useremo indifferentemente i termini *Cantor-completo* e *completo*.

Notiamo infine che una differenza fondamentale tra il campo reale (di cui tutti i campi archimedei sono sottocampi) ed i campi non archimedei consiste nella diversa struttura topologica. Infatti i campi non archimedei sono tutti *totalmente sconnessi*. Questa 'non buona' proprietà significa che ogni loro elemento possiede un intorno, piccolo a piacere, che è contemporaneamente aperto e chiuso; in forma equivalente, si può dire che esiste una partizione del campo, tutta costituita da insiemi contemporaneamente aperti e chiusi, ciascuno dei quali è rinchiudibile in un segmento di ampiezza prescelta.

Osservazione 3.1. – È opportuno ricordare che Cantor, oltre che della teoria dei numeri reali, è autore della teoria dei numeri transfiniti, che sono anch'essi numeri infinitamente grandi. Tuttavia tali numeri, che servono a misurare 'quanti elementi' ha un insieme infinito, non formano in alcun modo un campo numerico non archimedeo, anzi non formano affatto un campo, per varie ragioni; infatti essi non costituiscono un insieme e inoltre la somma e il prodotto fra essi definiti mancano del tutto delle ordinarie proprietà dei numeri, e presentano invece proprietà completamente diverse. Basti ricordare ad esempio che il numero transfinito $\aleph_0$ coincide con il suo quadrato e che non ha alcun senso considerare il numero (che dovrebbe essere infinitamente piccolo) $\dfrac{1}{\aleph_0}$.

4. – Un primo esempio di campo non archimedeo

Riportiamo, in forma semplificata, quanto presentato in [12].

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(t)$ il campo delle funzioni razionali a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Definiamo un ordinamento in $\mathbb{K}$ ponendo: $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0$ se e solo se la funzione di t associata a questo rapporto di polinomi è positiva per ogni valore sufficientemente grande di t tra i razionali. Poiché ogni funzione razionale ha un numero finito di zeri e di poli e quindi, per il teorema del valore intermedio, può cambiare di segno solo un numero finito di volte, questa definizione ha senso e dà luogo ad un ordine totale. È facile vedere che una funzione razionale è positiva se e soltanto se il quoziente fra i coefficienti direttori di $f(t)$ e di $g(t)$ è positivo. È anche facile controllare che la somma e il prodotto di due elementi positivi danno come risultato un elemento positivo e che questo garantisce la compatibilità dell'ordinamento introdotto con le operazioni del campo. Verifichiamo facilmente che il campo ordinato $\mathbb{Q}(t)$ così costruito non è archimedeo; infatti l'elemento t risulta maggiore di ogni numero naturale n, essendo la funzione polinomiale $t - n$ positiva, per ogni valore della variabile t maggiore di n.

5. – Sezioni di Dedekind su un campo ordinato

La teoria delle sezioni di Dedekind, che permette di costruire il campo reale a partire dal campo razionale, risale, come dice il nome, al matematico Dedekind, ed è presentata in molti trattati universitari di Analisi matematica, in forme leggermente diverse ma equivalenti fra loro ([8], [14], [15]).

Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato, eventualmente non archimedeo. Il completamento $D_{\mathbb{K}}$ mediante le sue sezioni di Dedekind è un suo soprainsieme ordinato, nel quale ogni sottoinsieme limitato superiormente ammette estremo superiore. $D_{\mathbb{K}}$ può essere dotato di due operazioni che estendono la somma e il prodotto di $\mathbb{K}$; tuttavia $D_{\mathbb{K}}$ risulta essere un campo ordinato rispetto ad esse e alla relazione di ordine sopra introdotta (e quindi un'estensione di $\mathbb{K}$) se e solo se $\mathbb{K}$ è archimedeo. Occupiamoci dunque della costruzione di $D_{\mathbb{K}}$ e delle sue proprietà.

Una *sezione di Dedekind (o segmento iniziale)* di $\mathbb{K}$ è un sottoinsieme $S \subset \mathbb{K}$ tale che:

1. $S \neq \emptyset$ e $S \neq \mathbb{K}$;
2. Se $x \in S$ e $y \in \mathbb{K}, y < x$, allora $y \in S$;
3. S non ammette massimo.

Questa definizione, che noi useremo d'ora in poi per la sua semplicità, non è quella originale, che considera coppie (A, B) di sottoinsiemi di $\mathbb{K}$ tali che $A \cup B = \mathbb{K}, A \cap B = \emptyset$, ogni $a \in A$ è minore di ogni $b \in B$. I nostri segmenti iniziali (presentati ad esempio nel trattato [14]) sono semplicemente i sottoinsiemi A contenenti gli elementi più piccoli.

Indichiamo con $D_{\mathbb{K}}$ l'insieme di tutte le sezioni di Dedekind di $\mathbb{K}$. Esso contiene un sottoinsieme $\mathbb{K}'$ in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{K}$, che identifichiamo con $\mathbb{K}$, considerando così $\mathbb{K}$ come sottoinsieme di $D_{\mathbb{K}}$. Piú precisamente, identifichiamo $a \in \mathbb{K}$ con la sezione $S_a = \{x \in \mathbb{K}/x < a\}$.

L'insieme $D_{\mathbb{K}}$ è ordinato come segue: $S < T$ se e solo se $S \subset T$. Abbiamo così introdotto in $D_{\mathbb{K}}$ un ordine totale, che induce su $\mathbb{K}$ l'ordine preesistente. Diremo che S è positivo se $S > 0$, dove 0 si identifica con $\{x \in \mathbb{K}/x < 0\}$.

Si può facilmente controllare che tra due elementi distinti di $D_{\mathbb{K}}$ cade sempre almeno un altro suo elemento (e, di conseguenza, ne cadono infiniti) e che ogni elemento di $D_{\mathbb{K}}$ ammette un maggiorante (e quindi infiniti maggioranti).

È immediato vedere che, *se X è un sottoinsieme di $D_{\mathbb{K}}$ limitato superiormente, allora esiste il suo estremo superiore sup(X)*, che è l'unione di tutti gli elementi di X. Analogamente, se X è limitato inferiormente, esiste il suo estremo inferiore *inf*(X), che è l'intersezione di tutti i suoi elementi. Pertanto l'insieme $D_{\mathbb{K}}$ soddisfa al requisito richiesto per essere un completamento di $\mathbb{K}$. Purtroppo, però, vedremo che solo nel caso archimedeo è possibile dotarlo di due operazioni e una relazione, che estendano quelle di $\mathbb{K}$ e lo rendano un campo ordinato.

Tentando di estendere le due operazioni di $\mathbb{K}$, vediamo che, nel caso in cui i due elementi S e T stanno in $\mathbb{K}$, ossia $S = \{x \in \mathbb{K}/x < S\}$ e $T = \{y \in \mathbb{K}/y < T\}$, la definizione che fornisce la somma già definita in $\mathbb{K}$ è la seguente:

$$S + T = \{x + y/x \in S, y \in T\} = \{x + y/x, y \in \mathbb{K}, x < S, y < T\}.$$

Analogamente, per il prodotto, se S e T sono entrambi positivi si ottiene:

$$ST = \{xy/x > 0, y > 0, x \in S, y \in T\} = \{xy/x > 0, y > 0, x < S, y < T\}.$$

(Al caso in cui uno almeno sia negativo si passa in modo ovvio).

È quindi naturale estendere queste due definizioni alle coppie di elementi S e T di $D_{\mathbb{K}}$, che non stanno necessariamente nel sottoinsieme identificato con $\mathbb{K}$.

Per il momento fissiamo l'attenzione sulla somma. È facile verificare, senza bisogno della *P.A.*, che essa è associativa e commutativa, che lo zero di $\mathbb{K}$ funge da elemento neutro e che la somma è *debolmente compatibile* con la relazione di ordine, ossia che $R < S$ implica $R + T \leq S + T$, per ogni T in $D_{\mathbb{K}}$. Tuttavia, *senza la P.A., non è vero che vale la compatibilità forte*, ossia che la precedente ipotesi implica: $R + T < S + T$. Per convincerci di questo consideriamo, in un campo non archimedeo, la sezione di Dedekind ω così definita: *x appartiene a ω se esiste un razionale q tale che sia $x < q$*; si vede facilmente che essa soddisfa la relazione $\omega + 1 = \omega$ e quindi la diseguaglianza forte $0 < 1$ dà luogo alla precedente eguaglianza. Questa stessa uguaglianza mostra anche che non può esistere l'opposto di ω, perché altrimenti ne seguirebbe $1 = 0$. Se ne conclude che: *affinchè la struttura algebrica di supporto $D_{\mathbb{K}}$ sopra definita sia un campo, bisogna che valga la P.A.*

Analizzando più profondamente la situazione, ci si rende conto che la ragione per cui la somma sopra definita non rende $D_{\mathbb{K}}$ neppure un gruppo (in quanto non esiste l'opposto di alcuni dei nuovi elementi introdotti) deriva dall'esistenza di sezioni del tipo di ω, cioè con la caratteristica seguente: esiste qualche elemento (per ω vanno bene tutti i naturali) che, sommato ad un qualunque elemento di ω, sta ancora in ω. Si può dimostrare che la *P.A.* vieta l'esistenza di tali sezioni.

Nel caso non archimedeo viene allora naturale fissare l'attenzione sul sottoinsieme $C_{\mathbb{K}}$ delle *sezioni contigue*, formato da tutte le sezioni per cui un simile fatto non succede, cioè definito così: *una sezione P sta in $C_{\mathbb{K}}$ se e solo se, per ogni ε positivo in $\mathbb{K}$, esiste un elemento a in P tale che sia $a + \varepsilon \notin P$.* Si dimostra che, rispetto alle due operazioni sopra definite, ristrette ad esso, $C_{\mathbb{K}}$ è un sopracampo ordinato di $\mathbb{K}$; però non è più vero che ogni suo sottoinsieme limitato ammette un estremo superiore.

Come abbiamo detto sopra, *nel caso archimedeo, risulta $D_{\mathbb{K}} = C_{\mathbb{K}}$*, e quindi l'insieme delle sezioni di Dedekind di un campo archimedeo è il completamento cercato.

OSSERVAZIONE 5.1. – Nel caso che le sezioni di Dedekind formino un campo, cioè che $D_{\mathbb{K}} = C_{\mathbb{K}}$ sia un campo archimedeo, dall'esistenza degli estremi inferiore e superiore discendono il principio degli intervalli incapsulati e quello dicotomico, sua conseguenza.

A. Principio degli intervalli incapsulati. Sia data una successione di intervalli chiusi $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, ognuno contenente il successivo. Allora la loro intersezione non è vuota, ed è precisamente l'intervallo chiuso $[c, d]$, dove $c = \sup(a_n), d = \inf(b_n)$. In particolare l'intersezione è ridotta a un solo punto se e soltanto se, assegnato un elemento positivo arbitrario ε, esiste un indice n per cui risulta $b_n - a_n < \varepsilon$.

B. Principio dicotomico. Se si divide un intervallo chiuso in due parti mediante il suo punto medio, poi si dimezza una delle due parti e quindi si ripete l'operazione costruendo al passo $n + 1$ un intervallo metà di uno dei due costruiti al passo n, si ottiene, come intersezione, uno e un solo punto.

6. – Successioni di Cauchy

La teoria del completamento di Cantor attraverso le successioni di Cauchy è trattata ad esempio in [26], n. 67. Qui si riassumono i passi fondamentali.

L'obiettivo di questo paragrafo è specificamente la costruzione di un sopracampo ordinato $\hat{\mathbb{K}}$ di $\mathbb{K}$ soddisfacente queste due proprietà:

i) ogni elemento di $\hat{\mathbb{K}}$ è limite di una successione di Cauchy di elementi di $\mathbb{K}$;

ii) ogni successione di Cauchy di elementi di $\hat{\mathbb{K}}$ ammette limite in $\hat{\mathbb{K}}$.

Ricordiamo la definizione formale di *successione di Cauchy (o successione fondamentale)*, che ha senso in qualunque campo ordinato $\mathbb{K}$, archimedeo o non, in cui si definisca il valore assoluto di un elemento come l'elemento stesso se si tratta di un positivo e come il suo opposto se si tratta di un negativo (vedi n. 3).

La successione $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n \dots)$ *di elementi di* $\mathbb{K}$ *si dice di Cauchy se, per ogni* $\varepsilon \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0$, *esiste un naturale* n_0 *tale che, per ogni coppia di naturali* p, q *maggiori di* n_0, *sia* $|a_p - a_q| < \varepsilon$.

Si vede facilmente che ogni successione convergente è di Cauchy, mentre, in generale, non è vero il viceversa (ad esempio, non è vero su $\mathbb{Q}$).

Nell'insieme di tutte le successioni di Cauchy su $\mathbb{K}$, definiamo la relazione (di equivalenza) che identifica due successioni la cui differenza tende a zero. L'insieme quoziente rispetto a tale relazione verrà nel seguito indicato con il simbolo $\hat{\mathbb{K}}$. Il sottoinsieme di $\hat{\mathbb{K}}$ costituito dagli elementi rappresentati da una successione costante è in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{K}$ e verrà identificato con $\mathbb{K}$ stesso.

L'insieme $\hat{\mathbb{K}}$ ora costruito è il candidato a diventare un sopracampo ordinato di $\mathbb{K}$ in cui ogni successione di Cauchy converge, dopo l'introduzione in esso di due operazioni e di una conveniente relazione d'ordine.

Si comincia col definire in modo ovvio l'addizione e la moltiplicazione tra successioni:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n),$$
$$(a_n)(b_n) = (a_n b_n).$$

Si verifica poi facilmente che le definizioni sono corrette, cioè applicate a successioni di Cauchy producono ancora successioni di Cauchy, e che sono entrambe compatibili con la relazione di equivalenza. Quest'ultima affermazione significa che si possono definire l'addizione e la moltiplicazione tra classi, cioè tra elementi di $\hat{\mathbb{K}}$, eseguendo le operazioni su rappresentanti scelti a piacere nelle classi considerate. Anche la verifica del fatto che $\hat{\mathbb{K}}$ è un sopracampo di $\mathbb{K}$ non richiede particolari accorgimenti tecnici.

Infine, definiamo in $\hat{\mathbb{K}}$ un ordinamento totale, che lo renda un sopracampo ordinato di $\mathbb{K}$. A tale scopo, si introduce anzitutto un ordinamento parziale tra successioni di Cauchy nel modo seguente: $(a_n) < (b_n)$ *se e solo se esistono un elemento positivo* η *di* $\mathbb{K}$ *ed un numero naturale* n_0 *per cui vale la relazione* $b_n - a_n > \eta$, *per tutti gli* $n > n_0$. Brevemente, si dice che la diseguaglianza vale *definitivamente* tra gli elementi delle due successioni.

Si verifica facilmente che tale relazione è compatibile con quella di equivalenza e, passando al quoziente, determina un ordine totale, che si controlla rendere $\hat{\mathbb{K}}$ un campo ordinato estensione di $\mathbb{K}$.

Ogni elemento di $\hat{\mathbb{K}}$ è limite della successione di successioni costanti individuate dai suoi elementi, cioè: se $a = [(a_n)]$ è la classe di equivalenza della successione (a_n), allora $a = lim_{n\to\infty} a_n$, quando si identifichi a_n in $\mathbb{K}$ con l'elemento $[(a_n, a_n, \dots)]$ del completamento.

Infine, tramite una dimostrazione non banale, si verifica che ogni successione di Cauchy $(A_i), i \in \mathbb{N}$, ad elementi in $\hat{\mathbb{K}}$ (dove (A_i) è rappresentata dalla successione $(a^i_n), n \in \mathbb{N}$, di elementi di $\mathbb{K}$) ha limite in $\hat{\mathbb{K}}$, che è dunque chiuso rispetto all'operazione di passaggio alle classi di equivalenza di successioni di Cauchy: $\hat{\hat{\mathbb{K}}} = \hat{\mathbb{K}}$.

Se ne conclude che $\hat{\mathbb{K}}$ *è un completamento alla Cantor del campo ordinato* $\mathbb{K}$*; pertanto tale completamento esiste sempre, cioè anche nel caso che* $\mathbb{K}$ *sia un campo non archimedeo.*

OSSERVAZIONE 6.1. – Notiamo che, se il campo $\mathbb{K}$ non ammette una base numerabile di intorni dello zero, nessuna successione non definitivamente costante soddisfa la condizione di Cauchy; in tal caso pertanto ogni successione di Cauchy ha come limite l'elemento del campo che compare in essa da un certo punto in poi e quindi il completamento $\hat{\mathbb{K}}$ coincide con $\mathbb{K}$ stesso. Per escludere questa situazione banale supporremo, d'ora innanzi, l'esistenza di una base numerabile di 0-intorni.

Il completamento alla Cantor sopra definito è *essenzialmente unico*, cioè un qualunque completamento alla Cantor $\mathbb{K}'$ di $\mathbb{K}$ è isomorfo a $\hat{\mathbb{K}}$. L'isomorfismo si definisce così: ogni elemento di $\mathbb{K}'$ è limite di una successione di Cauchy di elementi di $\mathbb{K}$ e pertanto gli si assegna come immagine la classe individuata da tale successione. È laborioso, ma non difficile, verificare che tale corrispondenza è un isomorfismo tra campi ordinati.

È facile produrre esempi di campi ordinati non completi. Nel caso archimedeo, l'esempio più noto è $\mathbb{Q}$. Ad esempio, la successione che definisce il numero e è di Cauchy, ma non converge in $\mathbb{Q}$. Nel caso non archimedeo, possiamo controllare che il campo $\mathbb{Q}(t)$, ordinato nel modo descritto nel n. 4, non è completo nel senso di Cantor. Ad esempio, la successione $\left(a_n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{\frac{1}{2}}{i} t^{-i}\right)$ è di Cauchy e quindi converge ad un elemento $a \in \widehat{\mathbb{Q}(t)}$. Si può controllare che (a_n^2) converge a $1+t^{-1}$, e pertanto (a_n) converge a un elemento il cui quadrato è $1+t^{-1}$; ma questo elemento in $\mathbb{Q}(t)$ non esiste.

Nel n. 11 daremo esempi di campi non archimedei Cantor-completi.

OSSERVAZIONE 6.2. – Vale la pena di notare che la costruzione di Cantor si può presentare in modo più chiaramente algebrico. Si considerano l'anello A delle successioni di Cauchy a elementi in $\mathbb{K}$ e il suo ideale I formato dalle successioni nulle, cioè che tendono a 0. Si dimostra quindi che l'anello quoziente $\Omega = \frac{A}{I}$ è un campo e che in Ω si può introdurre un ordinamento totale compatibile con le operazioni. Ne seguono poi tutte le proprietà che abbiamo in precedenza enunciato e pertanto Ω risulta essere il completamento di $\mathbb{K}$ (si veda ad esempio [26], n. 67).

7. – Sezioni di Dedekind e successioni di Cauchy

Come abbiamo detto nei due precedenti paragrafi, $C_{\mathbb{K}}$ e $\hat{\mathbb{K}}$ sono entrambi campi ordinati, sopracampi di $\mathbb{K}$. Si può provare che essi sono isomorfi attraverso la funzione $f : \hat{\mathbb{K}} \longrightarrow D_{\mathbb{K}}$, definita mandando ogni elemento x di $\hat{\mathbb{K}}$ nell'insieme degli elementi di $\mathbb{K}$ minori di x (ovviamente rispetto al suo ordinamento, estensione di quello di $\mathbb{K}$), che è una sezione di $\mathbb{K}$. In modo formale:

$$f(x) = \{r \in \mathbb{K}/r < x\}.$$

Non è difficile verificare che f è un isomorfismo fra i campi ordinati $\hat{\mathbb{K}}$ e $C_{\mathbb{K}}$.

Abbiamo osservato, nel n. 5, che nel caso archimedeo risulta $C_{\mathbb{K}} = D_{\mathbb{K}}$ e quindi il completamento secondo Dedekind e quello secondo Cantor coincidono: si ottengono così due definizioni equivalenti del campo reale.

Nel caso archimedeo è dunque indifferente da un punto di vista teorico procedere alla Dedekind o alla Cantor: si ottengono comunque l'esistenza dell'estremo superiore e la convergenza delle successioni di Cauchy. Ma con il procedimento alla Cantor si ottiene l'esistenza dell'estremo superiore con molta maggiore difficoltà che con il procedimento alla Dedekind, il quale dà immediatamente il risultato, soprattutto se si usano i segmenti iniziali. Nel caso archimedeo sembra dunque più appropriato il procedimento alla Dedekind. Occorre però aggiungere che non è piccola la difficoltà di provare la convergenza delle successioni di Cauchy se si usano le sezioni di Dedekind per completare.

Per dare almeno un esempio di dimostrazione rigorosa, proveremo ora quanto è a tutti ben noto sui numeri reali, cioè che il campo reale è archimedeo e che ogni campo archimedeo è un sottocampo dei reali. Mentre la dimostrazione relativa alla costruzione di Dedekind è relativamente semplice, molto meno lo è quella relativa alla costruzione di Cantor, che quindi qui non presentiamo.

PROPOSIZIONE 7.1. – *Sia $\mathbb{R}$ il campo reale, definito alla Dedekind. Valgono le seguenti proprietà:*

i) *$\mathbb{R}$ è archimedeo;*

ii) *un qualunque campo archimedeo è isomorfo a un sottocampo di $\mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE. i) Siano a, b due sezioni di Dedekind positive tali che si abbia $a < b$. Si scelgano due numeri razionali positivi q, r tali che $q \in a, r \notin b$. Allora, in base all'ordinamento che abbiamo introdotto fra le sezioni, si ha: $q < a < b < r$. Poichè $\mathbb{Q}$ è archimedeo, esiste un naturale n tale che $nq > r$. Ne segue che $na > nq > r > b$.

ii) Sia $\mathbb{K}$ un campo archimedeo e sia $\mathbb{R}$ definito alla Dedekind. Proviamo innanzitutto che in esso non esistono elementi positivi minori di ogni razionale. Infatti sia $k \in \mathbb{K}$ un elemento positivo e sia q un razionale maggiore di esso. Per la proprietà archimedea, esiste un naturale n per cui vale la relazione: $nk > q$, da cui segue: $k > \frac{q}{n}$. Inoltre, sempre grazie alla proprietà archimedea, dato un elemento $k \in \mathbb{K}$, esiste un razionale maggiore di k.

Definiamo un omomorfismo iniettivo f di $\mathbb{K}$ in $\mathbb{R} = D_{\mathbb{Q}}$ come segue. Ad ogni elemento $k \in \mathbb{K}$ associamo il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ così definito: $f(k) = \{x \in \mathbb{Q}/x < k\}$. Si noti che $f(k)$ è una sezione di Dedekind. In effetti, per quanto detto sopra, valgono le proprietà 1 e 2 che definiscono le sezioni di Dedekind (n. 5); per quanto riguarda la 3, si supponga che $f(k)$ ammetta massimo m e si considerino gli elementi $m + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Per ogni $n \geq 1$ si deve avere $m + \frac{1}{n} \geq k$, cioè $\frac{1}{n} \geq k - m > 0$, il che contraddice la proprietà archimedea. Dunque vale anche la 3.

Verifichiamo che f è iniettiva. Infatti da $k_1 < k_2$ segue $0 < k_2 - k_1$ e quindi esiste $h \in \mathbb{Q}$, $0 < h < k_2 - k_1$. Di conseguenza risulta $f(k_1) < f(k_2)$, perchè gli elementi del tipo $x + h, x \in f(k_1)$, appartengono a $f(k_2)$ mentre non stanno in $f(k_1)$. La verifica che f conserva le operazioni è banale. □

8. – Enunciati equivalenti alla proprietà archimedea in un campo ordinato

In matematica è spesso utile enunciare una proprietà in più forme equivalenti, ciascuna delle quali è più adatta delle altre in certe situazioni in cui occorre usarla. Mettiamo dunque in evidenza alcune formulazioni equivalenti della *P.A.* su un campo $\mathbb{K}$, notando che le prime quattro di esse sono già state considerate nel n. 5 per la loro relazione con la *P.A.*; qui si precisa meglio il legame.

1. Il campo $C_{\mathbb{K}}$, definito nel n. 5, coincide con il suo soprainsieme $D_{\mathbb{K}}$.
2. $D_{\mathbb{K}}$ è un campo.
3, In $D_{\mathbb{K}}$ ogni elemento ammette opposto.
4. L'addizione è strettamente compatibile con l'ordinamento.
5. $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{K}$.
6. (Teorema di Bolzano-Weierstrass) Ogni sottoinsieme infinito $Z \subset \mathbb{K}$, limitato inferiormente e superiormente, ammette almeno un punto di accumulazione.

(Osserviamo che è molto facile verificare che il Teorema di Bolzano-Weierstrass non può valere in un campo non archimedeo. Ad esempio, se $k \in \mathbb{K}$ è un qualunque elemento positivo infinito, nell'intervallo $[0, k]$ il sottoinsieme infinito $\mathbb{N}$ non ammette alcun punto di accumulazione.)

È essenziale la seguente proprietà :

Se una qualunque di queste condizioni è soddisfatta (e quindi lo sono anche tutte le altre), allora $\hat{\mathbb{K}}$ e $D_{\mathbb{K}} = C_{\mathbb{K}}$ sono isomorfi come campi ordinati e definiscono il campo reale.

9. – Relazione tra campi ordinati massimali (o reali chiusi) e campi completi; problemi di densità e connessione

Si dice *campo ordinato massimale* o *reale chiuso* un campo che non ammette alcun sopracampo (proprio) ordinato, algebrico su di esso. Il termine ordinato massimale, più vecchio, è usato in [3] (n. 1, § 5), mentre il termine reale chiuso è usato in trattati più recenti quali [16] (cap 11, § 2), [13] (cap. 5.1), [19] (A.16).

Si dimostrano questi due fatti:

i) Ogni campo ordinato ammette una minima estensione algebrica ordinata massimale, unica a meno di isomorfismi, detta sua *chiusura reale*.
ii) Un campo ordinato $\mathbb{K}$ è ordinato massimale se e solo se $\mathbb{K}(i)$ è algebricamente chiuso (dove i è una radice dell'equazione $X^2 + 1 = 0$.)

(Per le dimostrazioni, si veda [3], n. 5, Th. 2 e n. 6, Th. 3, oppure [16], XI, § 2, Teor.1.)

La chiusura reale di un campo ordinato è significativamente diversa dal completamento, alla Dedekind o alla Cantor. Se il campo base è archimedeo, il completamento è sempre $\mathbb{R}$, mentre la chiusura reale è intermedia tra $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$; ad esempio, la chiusura reale di $\mathbb{Q}$ è formata dai soli numeri reali algebrici, che non formano un campo completo, né alla Dedekind né alla Cantor. Anche nel caso non archimedeo la chiusura reale può non essere per nulla completa (alla Cantor, unico modo possibile). Occorre inoltre osservare che il completamento nel caso archimedeo è sempre $\mathbb{R}$, quindi è anche reale chiuso, mentre nel non archimedeo può essere reale chiuso oppure no; per una discussione rimandiamo a [5], [6], [7], ma vogliamo ricordare (senza dimostrazione) che, *se $\mathbb{K}$ è ordinato massimale,* allora $\hat{\mathbb{K}}$ è anch'esso ordinato massimale ([3], Ex. 38), e che, nel caso in cui $\mathbb{K}$ non sia archimedeo, possono esistere elementi del suo sopracampo ordinato massimale $\bar{\mathbb{K}}$ che non stanno nel completamento $\hat{\mathbb{K}}$, ossia che non sono limiti di elementi di $\mathbb{K}$. Quest'ultima proprietà si può anche esprimere dicendo che:

un campo $\mathbb{K}$ *non archimedeo non è denso nel suo sopracampo ordinato massimale* $\bar{\mathbb{K}}$, mentre ogni campo archimedeo, che è intermedio fra il campo razionale e il campo reale, è denso in quest'ultimo.

Ricordiamo che uno spazio topologico si dice *sconnesso* quando è unione di (almeno) due aperti disgiunti. È ben noto che $\mathbb{Q}$ (con la topologia indotta dal suo ordinamento) è sconnesso, anzi è *totalmente sconnesso*, in quanto ogni suo punto a ammette un intorno contemporaneamente aperto e chiuso; basta infatti scegliere due numeri reali, ma non razionali, $r < a$ ed $s > a$ e considerare l'intorno aperto $]r, s[$ di a in $\mathbb{Q}$. Inoltre, fissato un elemento reale positivo ε piccolo a piacere, è possibile scegliere una successione crescente di numeri irrazionali positivi (a_n) per cui risulta: $a_0 < \frac{\varepsilon}{2}$ e inoltre $a_n - a_{n-1} < \varepsilon$. Allora la partizione di $\mathbb{Q}$ definita dagli insiemi

$$....,]-a_n, -a_{n-1}[, ...,]-a_0, a_0[, ...,]a_n, a_{n+1}[...$$

è tutta costituita da aperti, di diametro $< \varepsilon$.

Una situazione analoga non si presenta però nel campo massimale e completo $\mathbb{R}$, che risulta essere un insieme connesso, mentre *ogni campo ordinato non archimedeo ha le stesse proprietà di sconnessione di* $\mathbb{Q}$, anche nel caso in cui è ordinato massimale e completo secondo Cantor, purché esso sia dotato di una successione numerabile di elementi tendenti a zero.

10. – L' Analisi su un campo completo non archimedeo: qualche esempio di analogia o differenza rispetto all'Analisi sul campo reale

Per evidenziare meglio le differenze tra la situazione archimedea e la non archimedea, facciamo qualche esempio di proprietà, valide nell'Analisi sul campo reale, che nel caso non archimedeo o non sono valide o si dimostrano con tecniche diverse da quelle usate su $\mathbb{R}$.

Uniforme continuità

Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato completo non archimedeo, a base di 0-intorni numerabile (ad esempio il completamento di $\mathbb{Q}(t)$, ordinato nel modo descritto in precedenza, con t infinito positivo, in cui si può scegliere come base di 0-intorni l'insieme delle circonferenze di centro l'origine e raggio $t^{-n}, n \in \mathbb{N}$). Verifichiamo con un esempio che, a differenza di quanto succede nel campo reale, *su un suo qualunque intervallo chiuso è possibile costruire una funzione continua, ma non uniformemente continua.*

Sia $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...)$ una successione con elementi positivi, crescente e tendente a ∞ (ad esempio $\omega_n = t^n$) .

Definiamo sull'intervallo chiuso $[1, \omega]$ (con ω infinito qualsiasi) la seguente funzione crescente e continua:

$$f(x) = \begin{cases} \omega_n & \text{per } x = n \\ 0 & \text{per } x \text{ infinito} \\ \omega_n + (\omega_{n+1} - \omega_n)(x-n) & \text{per } x \text{ compreso tra } n \text{ e } n+1 \end{cases}$$

e verifichiamo che essa non è uniformemente continua.

Se lo fosse, dato $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positivo qualsiasi, esisterebbe δ tale che, se $|x - \bar{x}| \leq \delta$, allora $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.

In particolare, scegliendo $\bar{x} = n$, $x = n + \delta$, si otterrebbe

$(\omega_{n+1} - \omega_n)\delta < \varepsilon$, da cui $\delta < \dfrac{\varepsilon}{(\omega_{n+1} - \omega_n)}$ per ogni intero positivo, e quindi

$\omega_{n+1} - \omega_n < \varepsilon/\delta = A$, dove A è una costante positiva indipendente da n. In questo caso la successione sarebbe maggiorata dalla successione

$$\omega_1, \omega_1 + A, \omega_1 + 2A, ..., \omega_1 + nA, ...$$

quindi sarebbe limitata superiormente da $\omega_1 + BA$, essendo B un elemento infinito qualsiasi, e non potrebbe tendere a ∞.

Proprietà conservate dall'uniforme convergenza di una successione

Si dimostra abbastanza facilmente che:

In un campo ordinato (archimedeo o non) una successione $S_n(x)$ uniformemente convergente di funzioni uniformemente continue (in un dato do-

minio) ha come limite una funzione $S(x)$ uniformemente continua (nello stesso dominio).

Poiché si può dimostrare che, anche nell'ambito non archimedeo, la convergenza di una serie di potenze è uniforme ed una potenza è una funzione uniformemente continua su ogni intervallo, ne segue:

Una serie di potenze è una funzione uniformemente continua su ogni intervallo del suo dominio di definizione.

La proprietà considerata ora è un esempio di proprietà che non dipende dalla *P.A.* Consideriamone ora una vera nel caso archimedeo e falsa nel non-archimedeo. Si può facilmente dimostrare il fatto seguente:

Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato non archimedeo, Cantor-completo rispetto alla topologia dell'ordinamento. Sia $(S_n(x))$ una successione di funzioni uniformemente convergenti alla funzione $S(x)$ sull'insieme D e supponiamo che su D ogni $S_n(x)$ ammetta massimo (minimo). Allora $S(x)$ ammette su D estremo superiore (inferiore).

Tuttavia in questa situazione puo' succedere che $S(x)$ *non ammetta massimo (risp. minimo) su D.* Verifichiamolo su un esempio.

Esempio

Sia $\mathbb{K} = \widehat{\mathbb{R}[t]}$, dove l'ordinamento di $\mathbb{R}(t)$ è definito come nell'esempio del n. 4, sostituendo $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{R}$. Costruiamo una successione di funzioni $f_n(x)$, continue su $D = [0, t]$, che converge uniformemente ad una funzione $F(x)$ su D, con la condizione che risulti:

- ogni $f_n(x)$ ha un minimo su D;
- $F(x)$ ha un estremo inferiore su D, ma non ha un minimo.

Sia $I = \{x / \exists r \in \mathbb{R}^+, 0 < x < r\}$. Indichiamo poi con η l'insieme degli infinitesimi e scegliamo $\varepsilon \in \eta, \varepsilon > 0$.

Definiamo:

$$f_n(x) = \begin{cases} \varepsilon^h & \textit{se } x \in h + \eta,\ h \in \mathbb{N},\ 0 \leq h \leq n, \\ 1 & \textit{se } x \notin \bigcup\limits_{h=0}^{n} h + \eta. \end{cases}$$

Qualunque sia x, ogni f_n risulta costante nell'intorno di x così definito: $U_x = \{x + y, y \in \eta\}$.

Pertanto f_n è uniformemente continua e la successione f_n converge uniformemente alla funzione F così definita:

$$F(x) = \begin{cases} \varepsilon^h & \textit{se } x \in h + \eta, h \in \mathbb{N}, \\ 1 & \textit{se } x \notin \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} h + \eta. \end{cases}$$

Pertanto $inf(F(x)) = 0$, ma $F(x)$ non ammette minimo su D.

Lo stesso esempio funziona sostituendo D con I.

Il teorema del valore intermedio

Ricordiamo l'enunciato di questo teorema, valido nel campo reale:

(TVI) Una funzione f continua sull'intervallo $[a, b]$ assume su tale intervallo tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Se il campo $\mathbb{K}$ non è archimedeo, tale enunciato è falso, anche se si aggiunge l'ipotesi che esso sia ordinato massimale e completo. Questo fatto è una conseguenza della sconnessione di $\mathbb{K}$. Infatti, se $\mathbb{K} = A \cup B$ è la partizione di $\mathbb{K}$ in due aperti disgiunti, scelti due elementi $\alpha \neq \beta$ in $\mathbb{K}$, la funzione che associa α ad ogni elemento di A e β ad ogni elemento di B è continua, ma non verifica l'enunciato del teorema, se si sceglie $a \in A$ e $b \in B$.

Tuttavia anche nel caso non archimedeo il teorema vale per qualche interessante classe di funzioni. Ad esempio, sotto la suddetta ipotesi che il campo, oltre che completo, sia anche ordinato massimale, si può dimostrare che il teorema del valore intermedio vale per i polinomi (per i quali, in realtà, non è necessaria la completezza, vedi [3], n. 5, Prop. 5) e, più in generale, per le serie di potenze (si vedano [5], [6], [7], [21], [22]).

La dimostrazione di quest'ultimo fatto è assai diversa da quella del caso reale, in quanto richiede l'uso di un forte strumento algebrico, il Lemma di Hensel per le serie ristrette (si vedano [10], Th. 3.7, p. 19, e [24], Teor. 5).

Si può infine dimostrare che anche nel caso non archimedeo vale una parziale inversione del suddetto teorema, che nel caso archimedeo è stata dimostrata da F. Tricomi ([23]), e che afferma quanto segue.

Sia f una funzione su un campo ordinato massimale e completo. Se sull'intervallo $[a,b]$ la funzione è iniettiva e se inoltre su ogni sottointervallo $[a',b'] \subset [a,b]$ vale il TVI, allora essa è continua e strettamente monotona su $[a,b]$.

11. – Esempi

1. Il minimo sopracampo ordinato di $\mathbb{R}$ si ottiene, a meno di isomorfismi, come estensione trascendente semplice $\mathbb{R}(t)$, introducendo in esso un ordinamento, con le stesse regole usate nel n. 4 per ordinare $\mathbb{Q}(t)$.

Si dimostra che il completamento di $\mathbb{R}(t)$ è costituito dal campo delle serie formali di Laurent $\mathbb{R}((t))$. Infatti, dopo aver applicato l'isomorfismo che manda t in $X = t^{-1}$, per ottenere una variabile X minore di ogni reale positivo, si vede facilmente che la topologia indotta sull'anello $\mathbb{R}[X]$ dall'ordinamento coincide con la topologia $(X)-adica$, rispetto alla quale il completamento di $\mathbb{R}[X]$ è $\mathbb{R}[[X]]$; poi si passa ai quozienti. (Per la traccia di una dimostrazione diretta si veda [3], A VI 44, Ex. 40).

2. Il minimo sopracampo di $\mathbb{R}(t)$ contemporaneamente reale chiuso (cioè ordinato massimale) e Cantor-completo risulta essere il campo $\mathcal{R}$ di Levi-Civita [18], descritto, in modo più moderno e accessibile, nell'articolo [22]. Ricordiamo qui la sua definizione, senza dimostrarne le proprietà, per le quali si può consultare [2]. A tale scopo ci servirà la definizione seguente.

Definizione 1. – Un insieme I di numeri razionali si dice *finito a sinistra* quando, per ogni $q \in I$, esiste solo un numero finito di elementi di I che risultano $< q$.

L'esempio più semplice di insieme infinito che risulta finito a sinistra è l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali. Si può inoltre facilmente dimostrare che:

Un insieme infinito I è finito a sinistra se e solo se esiste una biiezione tra I ed $\mathbb{N}$, che conserva l'ordinamento.

Definizione 2. – Indichiamo con $\mathcal{R}$ l'insieme delle funzioni x di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ con la seguente proprietà: *l'insieme dei punti in cui x non si annulla è finito a sinistra*. In formule:

$$\mathcal{R} = \{x : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} / \{q \in \mathbb{Q}/x(q) \neq 0\} \text{ è finito a sinistra}\}.$$

Useremo le seguenti notazioni:

- $x[q]$ indica l'immagine di x nell'elemento $q \in \mathbb{Q}$;
- $(\forall x)\ supp(x) = \{q \in \mathbb{Q}/x[q] \neq 0\}$
- $\lambda(x) = min(supp(x))$, per $x \neq 0$, e $\lambda(0) = +\infty$.

L'insieme $\mathcal{R}$, dotato delle operazioni di addizione e moltiplicazione con le regole formali usate per le successioni, risulta essere un campo. Inoltre il campo reale $\mathbb{R}$ può essere identificato con un sottocampo di $\mathcal{R}$ mediante l'isomorfismo $\Pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ così definito:

$$\Pi(x)[q] = \begin{cases} x & se\ q = 0 \\ 0 & altrimenti, \end{cases}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$.

In $\mathcal{R}$ viene introdotto il seguente ordinamento:

$$x > 0 \Longleftrightarrow x[\lambda(x)] > 0,$$

che risulta essere compatibile con le due operazioni introdotte e induce su $\mathbb{R}$ l'ordinamento naturale.

Si vede facilmente che l'ordinamento di $\mathcal{R}$ non è archimedeo, in quanto, ad esempio, $\lambda(x) < 0$ implica $nx < 1$, per ogni naturale n.

Gli elementi di $\mathcal{R}$ si possono anche rappresentare formalmente come serie con la seguente tecnica.

Si pone $d = \Pi(1)$, cioè:

$$d[1] = 1,\ d[q] = 0\ per\ q \neq 1.$$

Per ogni $x \in \mathcal{R}$ si dispongono gli elementi del suo supporto in ordine crescente, ottenendo:

$$supp(x) = \{q_1, q_2, ..., q_j, ...\}.$$

Allora ogni elemento di $\mathcal{R}$ si può scrivere nella forma

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x[q_j] d^{q_j},\ \ q_j \in supp(x).$$

Scegliendo come supporto tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ del tipo $[-n, \infty], n \in \mathbb{N}$, si ottiene il sottocampo delle serie di Laurent, che abbiamo visto essere il completamento di $\mathbb{R}(t)$.

Si dimostra che, rispetto alla topologia indotta dall'ordinamento, $\mathcal{R}$ è contemporameamente completo e reale chiuso (cfr [2]).

3. Un interessante esempio di campo ordinato non archimedeo è costituito dall'insieme ${}^*\mathbb{R}$ dei numeri iperreali, introdotto negli anni 60 da Abraham Robinson (si vedano [11] e [20]).

La teoria dei numeri iperreali (che è parte dell'Analisi non standard) non può certo essere illustrata in questo articolo, e per la sua complessità e per la quantità di spazio che richiederebbe. Possiamo tuttavia dare un'idea di che cosa si tratti e di quali applicazioni abbia in matematica. Il metodo più usato per costruire un insieme di iperreali è quello di ultrapotenza. Vediamo in che cosa consiste.

Occorre in primo luogo partire dal concetto di filtro nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali:

un filtro F su $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme non vuoto dell'insieme $P(\mathbb{N})$ delle parti di $\mathbb{N}$ tale che

1. se A, B sono in F, allora anche $A \cap B \in F$,
2. se $A \in F$ e $A \subset B$, allora $B \in F$.

Un filtro è proprio se inoltre non contiene l'insieme vuoto (per impedire che esso sia tutto $P(\mathbb{N})$). D'ora in poi supporremo che il filtro sia proprio. Un filtro è detto principale se è formato da tutti i sottoinsiemi che contengono un naturale fisso. D'ora in poi escluderemo i filtri principali (che non conducono a iperreali non reali).

Un filtro è un ultrafiltro se, per ogni $A \subset \mathbb{N}$, o A o il suo complementare ${}^cA$ appartiene a F. Equivalentemente un ultrafiltro è un filtro massimale.

Il concetto di ultrafiltro (in realtà anche solo di filtro) permette di introdurre nell'insieme delle successioni di numeri reali una relazione di equivalenza: due successioni $r = (r_n), s = (s_n)$ sono equivalenti se l'insieme degli indici n tali che $r_n = s_n$ appartiene all'ultrafiltro. Diremo in tal caso che r e s coincidono su un insieme grande, o quasi dappertutto. La classe di equivalenza della successione $r = (r_n)$ si indicherà con il simbolo $[r]$ e l'insieme di tali classi, dette numeri iperreali, si denoterà con il simbolo ${}^*\mathbb{R}$.

Facendo quindi riferimento all'addizione e alla moltiplicazione definite termine a termine tra le successioni, si introducono analoghe operazioni tra le classi di equivalenza, ponendo, per r, s, t successioni, $r + s = t$, oppure $r \times s = t$, se e solo se l'insieme degli $n \in \mathbb{N}$ per cui $r_n + s_n = t_n$, oppure $r_n \times s_n = t_n$, appartiene all'ultrafiltro. Allo stesso modo si definisce una relazione di ordine parziale tra classi: $r < s$ se e solo se l'ultrafiltro contiene l'insieme degli n per cui $r_n < s_n$. Si determina così per ${}^*\mathbb{R}$ una struttura di campo ordinato.

Se si prende un ultrafiltro non principale si ottiene che ${}^*\mathbb{R}$ è un campo ordinato estensione propria di $\mathbb{R}$. Infatti in esso ci sono elementi (numeri iperreali) che sono positivi ma minori di ogni frazione $\frac{1}{n}$, ad esempio il numero $\varepsilon =$ classe di equivalenza della successione $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$. Ci sono anche numeri che sono maggiori di ogni numero naturale, come ad esempio la classe di equivalenza ω della successione $(1, 2, 3, \ldots)$. In ${}^*\mathbb{R}$ ci sono quindi infinitesimi e infiniti attuali. Si tratta dunque di un campo ordinato non archimedeo. Il numero reale a può essere identificato con la classe di equivalenza della successione $(a, a, a, \ldots)$, ottenendo così un'immersione di $\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{R}$ come sottocampo ordinato.

Apparentemente si possono costruire infiniti insiemi diversi di iperreali, facendo riferimento a ultrafiltri diversi. In realtà l'unicità di questa estensione è legata all'ipotesi del continuo (si veda [11], 3.16, per una discussione della questione).

Gli iperreali non sono interessanti soltanto per il fatto che formano un campo non archimedeo. Il loro principale interesse (che è la proprietà caratterizzante) sta nel cosiddetto principio di trasferimento, che qui non possiamo discutere in dettaglio, ma che stabilisce una corrispondenza fra proprietà elementari in $\mathbb{R}$ e proprietà in ${}^*\mathbb{R}$. Per introdurre tale principio, occorre ricordare che, se A è un insieme di numeri reali, ad esso si può associare in maniera canonica un sottoinsieme ${}^*A \subset^* \mathbb{R}$, detto *estensione non standard* di A. In effetti, per ogni successione (r_n) di reali, diremo che la sua classe appartiene a ${}^*A$ se l'insieme degli indici n tali che $r_n \in A$ appartiene all'ultrafiltro F. In questo modo si può introdurre ad esempio l'insieme ${}^*\mathbb{N}$ degli ipernaturali, che, a differenza di $\mathbb{N}$, non è limitato in ${}^*\mathbb{R}$. Si può quindi estendere una funzione f reale di variabile reale a una funzione ${}^*f :^* \mathbb{R} \to^* \mathbb{R}$ come segue: ${}^*f$ applicata alla classe della successione $r = (r_n)$ dà come risultato la classe della successione $(f(r_0), f(r_1), \ldots)$. Con il principio di trasferimento si possono provare numerose proprietà. Ad esempio, si può dimostrare direttamente che ${}^*\mathbb{R}$ è un campo ordinato perchè $\mathbb{R}$ lo è. In particolare, gli elementi non nulli di ${}^*\mathbb{R}$ hanno inverso.

Per capire meglio che cosa il principio comporta, vogliamo dare (senza dimostrazione, ovviamente), fra tantissimi, un esempio riguardante l'Analisi matematica. Cominciamo con il ricordare che l'iperreale b è infinitamente vicino all'iperreale c se $b - c$ è un iperreale infinitesimo (tutti i c di tale tipo formeranno l'*alone* di b).

Supponiamo ora che f sia una ordinaria funzione reale di una variabile reale e che ${}^*f$ sia la sua estensione agli iperreali. Allora si ha: f è continua (nel senso a tutti ben noto) nel punto reale c se e soltanto se l'iperreale ${}^*f(x)$ è infinitamente vicino al reale $f(c)$ per ogni iperreale x nell'alone di c. Ad esempio, con modesta fatica si può dedurre come corollario la continuità della funzione reale seno nel punto reale c, lavorando sugli iperreali dell'alone di c.

Naturalmente quando si afferma che varie dimostrazioni di proprietà dei reali si possono provare con modesta fatica usando il principio di trasferimento, occorre non dimenticare il macchinario preliminare (ultrafiltri, infinitesimi, estensioni non standard di insiemi, ...) di cui si deve avere padronanza.

Rimandiamo per una presentazione completa e dettagliata al volume [11].

12. – Considerazioni conclusive

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto e confrontato la teoria di Dedekind e la teoria di Cantor, rimandando per una trattazione completa a corsi di Analisi matematica e di Algebra che contengono dimostrazioni rigorose per entrambe le costruzioni. Da quanto abbiamo scritto non emergono alcuni fatti che solo la lettura e lo studio di tali testi può far capire. Vogliamo tuttavia dare qualche indicazione sulla complessità di ciascuna delle due costruzioni.

In primo luogo osserviamo che la costruzione di Dedekind, valida solo a partire dai razionali perché è richiesto il principio di Archimede, è la preferita dai trattati di Analisi matematica e anche dai docenti delle Scuole superiori (ai tempi in cui se ne parlava), e con qualche ragione. In effetti è alla portata di qualsiasi studente degli ultimi anni di Liceo, e a maggior ragione di un corso universitario scientifico (matematica, fisica, ingegneria). Non è naturalmente priva di punti critici, ad esempio quando si vogliano definire in modo rigoroso le operazioni fra sezioni o la compatibilità fra queste e l'ordinamento. È tuttavia abbastanza semplice la dimostrazione dell'esistenza dell'estremo superiore di un insieme superiormente limitato, purché si abbia qualche nozione di teoria degli insiemi; ne segue, senza particolari difficoltà concettuali, il principio degli intervalli incapsulati e quindi quello dicotomico, da cui si può dedurre il teorema di Bolzano-Weierstrass, che è alla base di molte proprietà dei numeri reali.

Non è invece per nulla banale arrivare a capire che, se si parte, anziché dal campo razionale, da un campo ordinato non archimedeo qualsiasi, si ottiene qualcosa di molto lontano da un campo.

La teoria di Cantor è invece preferita nei trattati di Algebra, a partire dal classico Van der Waerden (si veda [26]), e anche qui se ne capisce facilmente la ragione. In effetti la costruzione, che può partire da un campo ordinato qualsiasi, archimedeo o no, richiede qualche nozione sugli anelli, gli ideali, i quozienti e le classi di equivalenza, i campi, e quindi può essere presentata solo nella parte finale di un corso di Algebra (a meno di non aggirare l'algebra, introducendo anelli quoziente e campi senza nominarli esplicitamente). Ma non solo di nozioni algebriche preliminari si tratta. Quando si introducono l'ordinamento, le operazioni e la compatibilità fra queste e l'ordine, occorre dimostrare qualche non ovvia proprietà di limitatezza, inferiore e superiore, delle successioni di Cauchy. Non è nemmeno banale vedere che ogni successione di Cauchy di elementi del nuovo campo è convergente in questo. Se poi si aggiunge l'ipotesi che valga il postulato di Archimede nel campo ordinato di base, non è certo immediato provare che ogni insieme superiormente limitato ammette estremo superiore, la via migliore essendo forse la dimostrazione (non semplice) che la teoria di Cantor e quella di Dedekind portano in questo caso a campi isomorfi. Nessun problema invece presentano i corollari, come il teorema di Bolzano-Weierstrass, il principio degli intervalli incapsulati, ecc., che sono conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore e non richiedono ragionamenti specifici sulla natura degli elementi del completamento di Cantor.

Si noti infine che un confronto fra le due teorie richiede di far vedere che davvero nella teoria di Cantor, ove manchi l'ipotesi archimedea, vengono a cadere l'esistenza dell'estremo superiore, il teorema di Bolzano-Weierstrass e il principio degli intervalli incapsulati.

È in particolare opportuno segnalare quella che è nel contempo una affinità e una differenza fra l'ambiente archimedeo e quello non archimedeo:

– il campo reale è l'unico, a meno di isomorfismi, campo ordinato archimedeo completo nel senso di Cantor (ma in esso esiste anche l'estremo superiore di ogni insieme superiormente limitato), ed ha chiusura algebrica ottenibile aggiungendo una radice quadrata di -1;
– un campo ordinato non archimedeo ha, oltre alla chiusura topologica alla Cantor, la chiusura ordinata massimale (o chiusura reale), anch'essa con chiusura algebrica ottenibile aggiungendo una radice quadrata di -1, ma ci sono numerosi campi ordinati non archimedei completi (o massimali), non isomorfi fra loro; inoltre i campi massimali non sono generalmente completi (nel senso delle successioni di Cauchy) e i campi completi non sono generalmente massimali.

Una rilevante differenza fra i due ambienti è infine data dalla validità nell'archimedeo completo, cioè sui reali, del teorema del valore intermedio per le funzioni continue (basato sul principio dicotomico, cioè sull'esistenza dell'estremo superiore), validità che viene a mancare in generale nell'ambiente non archimedeo, per quanto si mettano condizioni di massimalità e completezza. Tuttavia, con dimostrazioni completamente diverse da quelle note per il campo reale, si può, non senza difficoltà, provare il teorema del valore intermedio per certe classi di funzioni continue.

La teoria dei numeri reali, sezioni di Dedekind o successioni di Cauchy a seconda dei gusti del docente, alcuni decenni fa veniva abitualmente insegnata nei corsi universitari di Analisi matematica o di Algebra. In questi ultimi talvolta si trattava la teoria di Cantor senza introdurre l'ipotesi archimedea. Perfino in qualche classe di liceo venivano introdotte le sezioni di Dedekind, sia pure senza sviluppare in ogni dettaglio tutte le dimostrazioni.

Oggi entrambe le teorie sono quasi scomparse dalle Università e dalle Scuole superiori. Si tratta di una omissione non priva di conseguenze negative. In effetti i numeri reali si usano continuamente in matematica ad ogni livello, ma chi li usa non sempre sa con esattezza che cosa sono. Questo non impedisce naturalmente di usarli, per calcolare limiti, derivate, integrali e per dimostrare proprietà delle funzioni. La ripresa dello studio, nelle Scuole superiori e nelle Università, delle teorie di Dedekind e/o di Cantor consentirebbe agli studenti di fare qualche utile e interessante riflessione su rilevanti questioni fondative della matematica e sulla complessità di nozioni che vengono considerate ovvie e scontate e quindi non degne di approfondimento. Potrebbe anche portare, soprattutto nelle Scuole superiori, a qualche forma di interazione fra gli insegnanti di matematica e gli insegnanti di filosofia su temi storico-epistemologici, magari promuovendo la lettura di un vecchio libro ancor oggi valido e stimolante quale è il volume di Ludovico Geymonat, Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale (si veda [9]), se non addirittura qualche passo dalle opere [4] e [8] di Cantor e Dedekind.

Dal punto di vista della ricerca scientifica attuale, le questioni non archimedee, che hanno suscitato interesse parecchi decenni fa, oggi costituiscono un settore non certo centrale in matematica. Tuttavia si può segnalare ancora qualche ricerca sul teorema del valore intermedio, sul teorema della funzione inversa, sui massimi e minimi, sul teorema di Rolle, su questioni di ottimizzazione, soprattutto nel caso dei cosiddetti campi non archimedei di Levi-Civita, perfino con qualche applicazione all'informatica (si vedano ad esempio [21] e [22]), oltre a qualche ricerca di tipo storico (cfr [1]).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] V. Benci, P. Freguglia, *Alcune osservazioni sulla matematica non archimedea*. Matematica, Cultura e Società. Rivista U.M.I. Serie I, Vol. 1, N. 2, Agosto 2016.

[2] M. Bertz, *Calculus and numerics on Levi-Civita fields*. In M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, A. Griewank, editors, Computational Differentiation: Technique, Applications and Tools, pag 19-35, Philadelphia, SIAM (1996).

[3] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques, Livre II, Algèbre, chap. 6, Groupes et corps ordonnés*, N. Bourbaki et Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2007) (nel volume Algèbre, chap. 4 à 7; ed. originale Masson, Paris, 1981).

[4] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Mathematische Annalen, vol. 5, pp. 123-132 (1872) (in italiano in G. Cantor, *La formazione della teoria degli insiemi*, a cura di G. Rigamonti, Sansoni, Firenze, 1992 - il titolo italiano dell'articolo è *Sulla estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche*).

[5] L. Corgnier, C. Massaza, P. Valabrega, *On the Intermediate Value Theorem over a non-Archimedean Field*, Le Matematiche, Vol. LXVIII (2013) - Fasc. 11, pp. 227-248 (2013).

[6] L. Corgnier, C. Massaza, P. Valabrega, *Hensel's Lemma and the Intermediate Value Theorem over a non-Archimedean Field*. In corso di stampa su Journal of Commutative Algebra; arXiv: 1312.0877v1[math AC].
[7] L. Corgnier, C. Massaza, P. Valabrega, *Double Series over a non-Archimedean Field*, Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti, Vol. 93, No 1 (2015).
[8] R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers, Continuity and Irrational Numbers*, Dover, New York (1901) (in italiano in R. Dedekind, *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali*, a cura di O. Zariski, Casa editrice Alberto Stock, Roma, 1926; e anche in R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana, Bibliopolis, Napoli, 1983).
[9] L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale*, Bollati Boringhieri, Torino (2008), pubblicato nel 1947 da Levrotto e Bella sotto forma di dispense universitarie.
[10] S. Greco, P. Salmon, *Topics in m-adic topologies*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1971).
[11] R. Goldblatt, *Lectures on the Hyperreals An introduction to Nonstandard Analysis*, Springer, New York (1998).
[12] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, trad. it. P. Canetta, *Fondamenti della Geometria*, Feltrinelli, Milano (1970).
[13] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, Dover, New York (2009)
[14] A. Knapp, *Basic Real Analysis*, Birkhäuser Verlag, Basel (2005).
[15] E. Landau, *Foundations of Analysis*, Chelsea Publishing Company, New York (1966).
[16] S. Lang, *Algebra*, Addison Wesley P.C., Reading (1971)
[17] D. Laugwitz, *Debates about infinity in mathematics around 1890: The Cantor-Veronese controversy, its origins and its outcome*, Birkhäuser Verlag, Basel (2002).
[18] T. Levi-Civita, *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici*, Atti del R. Istituto Veneto, 1893, s. 7, t. 4, p. 1765-1815; ripubblicato in: Opere, v. 1, p. 1-39.
[19] P. Ribenboim, *The Theory of Classical Valuations*, Springer, New York (1998).
[20] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, (1996) (Revised Edition). Pubblicato originalmente da North Holland (1966).
[21] K. Shamseddine, M. Berz, *Intermediate value theorem for analytic functions on a Levi-Civita field*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, Volume 14 (Advances in non-Archimedean Analysis) (2007), 1001-1015.
[22] K. Shamseddine, M. Berz, *Analysis on the Levi-Civita field, a brief overview*, Advances in p-adic and non-Archimedean Analysis, 215-237 Contemp. Math, 508, Amer. Math. Soc., Providence R.I. (2010).
[23] F. Tricomi, *Sulle funzioni che assumono tutti i valori intermedi* Rend. Acc. Naz. Lincei, Serie XVIII, vol. XXX, fasc. 4 (1961).
[24] P. Valabrega, *Anelli henseliani topologici*, Annali di Matematica Pura e Applicata, 4 - XCI, (1972), 283-303.
[25] G. Veronese *Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale*, Atti del Circolo Matematico di Palermo, 6 (1892), 73-76.
[26] B. L. Van der Waerden, *Modern Algebra*, vol. I - vol. II, Frederick Ungar, New York (1950).

Luigi Corgnier

Ricercatore in fisica delle particelle elementari dal 1967 al 1971 presso Università di Torino. Ricercatore in teoria e sistemi di comunicazione dal 1972 al 1990 presso CSELT (poi TILAB). Si è occupato in particolare di trattamento di informazione visiva e riconoscimento di configurazioni. Progettista di sistemi avionici dal 1991 al 2000 presso Alenia Torino. Docente di Analisi Matematica, Geometria e Geometria Descrittiva presso il Politecnico di Torino, per circa dieci anni. Autore di circa 25 pubblicazioni scientifiche e coautore dell'appendice di un testo di Geometria.

Carla Massaza

Professore ordinario di Algebra presso l'Università di Siena e poi di Geometria presso il Politecnico di Torino fino al 2013. Si è occupata di Algebra Commutativa e di Matematica non archimedea. Autrice di più di trenta articoli scientifici su riviste nazionali e internazionali. Membro del Comitato Scientifico della rivista: Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino (fino al 2013). Reviewer per la rivista Zentralblatt.

Paolo Valabrega

Professore ordinario di Geometria presso il Politecnico di Torino fino al 2015. Si è occupato di Algebra Commutativa, Geometria Algebrica e attualmente di Matematica non archimedea. Fondatore e direttore per vent'anni del Centro linguistico del Politecnico di Torino. Responsabile del Progetto Polymath (Matematica in rete per le Scuole secondarie superiori - Politecnico di Torino - Istituto Superiore Mario Boella). Coordinatore del Comitato organizzativo del Premio Fubini per la Matematica dal 2009. Autore di circa 50 pubblicazioni scientifiche e di un libro di testo di Geometria.