Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Alberto Saracco

Fate il nostro gioco - gioco d'azzardo e matematica

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2017), n.2, p. 157–173.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_2_157_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2017.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 2, N. 2, Agosto 2017, 157-173

Fate il nostro gioco - gioco d'azzardo e matematica

ALBERTO SARACCO
Università di Parma
E-mail: alberto.saracco@unipr.it

Sommario: *In questo articolo si usa la probabilità per analizzare il gioco d'azzardo e si usa il gioco d'azzardo come motivazione per parlare di probabilità. Vuole fornire uno spunto per presentare la probabilità in maniera laboratoriale interessante per gli studenti delle scuole superiori.*

Abstract: *In this paper we use probability to analyze gambling and use gambling as a motivation to talk about probability. It can be used as a starting point to present probability in an interesting laboratorial way to students of high schools.*

1. – Introduzione

L'Italia è uno dei Paesi al mondo in cui il gioco d'azzardo è più diffuso, il Paese al mondo in cui più si gioca con le slot machine. Inoltre 1 gratta e vinci su 5 al mondo è venduto in Italia. Basti pensare che dal 2012 al 2014 ogni anno in Italia sono stati venduti gratta e vinci per oltre 9 miliardi di euro l'anno.

Nel 2015 sono stati 23 milioni gli italiani che hanno giocato in lotterie, scommesse e slot machine, spendendo complessivamente 88 miliardi di euro, perdendone 24.

La crisi del 2008 ha aumentato di molto le cifre spese dagli italiani al gioco. La propensione al gioco è infatti molto maggiore nelle classi meno istruite e più povere, rendendo di fatto il gioco d'azzardo una tassa antiredistributiva. Gli effetti sociali in termini di persone rovinate, famiglie distrutte, suicidi, sono devastanti.

Come se non bastasse, il gioco d'azzardo è un'impresa svantaggiosa anche per lo Stato italiano, che ha visto negli anni ridurre la propria parte di introiti – a favore dei gestori privati – e l'azzardo funge da moltiplicatore negativo per l'economia: cala la domanda di beni e servizi e lo Stato incassa meno da imposte dirette e indirette.

Insomma il gioco d'azzardo in Italia è una piaga di proporzioni gigantesche. La matematica, e in particolare la probabilità, può essere utile a combattere questa piaga, e viene come tale utilizzata in vari progetti di divulgazione e prevenzione, tra cui cito *Fate il nostro gioco* (www.fateilnostrogioco.it) della società Taxi 1729, da cui ho preso in prestito l'efficace titolo di questo articolo e molti degli aneddoti raccontati (tratti dall'omonimo libro [2]), e *Bet on math* (betonmath.polimi.it) del Politecnico di Milano.

In quest'ottica, dal 2014/15, in collaborazione con Francesco Morandin tengo per le scuole superiori un laboratorio PLS sul tema della probabilità e gioco d'azzardo. Sia per far conoscere la matematica (combinatoria e probabilità) e per aumentare le conoscenze informatiche (buona parte del laboratorio si svolge utilizzando *Excel*), sia per prevenire il rischio di gioco patologico, informando sulle reali possibilità di vincita.

Le varie sezioni di questo articolo seguono l'idea del laboratorio PLS, utilizzando vari giochi d'azzardo per introdurre vari concetti matematici, di probabilità e combinatoria, ovviamente, ma anche di teoria dei giochi (scelta della strategia ottimale).

Accettato: il 11 novembre 2016.

Alla fine di ogni sezione, analizziamo brevemente le storie di chi ha trovato un modo per vincere a quel tale gioco d'azzardo. La conclusione sarà che vincere al gioco d'azzardo non è impossibile, ma per farlo bisogna avere tali competenze e utilizzare tanto di quel tempo, denaro e lavoro, che – con lo stesso impegno e le stesse capacità – è possibile guadagnare molto di più in altro modo. Tutto ciò senza contare il fatto che tali competenze sono in possesso solo di un numero ridottissimo di persone. Vincere al gioco d'azzardo è molto difficile e per pochissimi, quando invece tutta la martellante pubblicità vuole far credere che sia facile e alla portata di tutti.

2. – La nascita della probabilità

La branca della matematica che va sotto il nome di probabilità è storicamente nata proprio per studiare il gioco d'azzardo.

In particolare, nel 1525 Gerolamo Cardano scrive il trattato *De Ludo Aleae* (Sul gioco dei dadi) dove analizza il gioco dei dadi, ma il testo viene pubblicato postumo dopo oltre un secolo, nel 1663, e non ha pertanto avuto seguito. Si è quindi soliti far risalire la nascita della teoria della probabilità al 1654, quando Pierre de Fermat e Blaise Pascal hanno un intenso scambio epistolare in cui discutono il problema del gioco interrotto [1, pag. 363], ovvero problemi del tipo:

Esercizio 2.1 — ([1]) Sofia e Federico giocano 10 euro al seguente gioco: tirano una moneta più volte, se escono 10 teste prima di 10 croci, vince Sofia, se escono prima 10 croci, vince Federico. Dopo 10 lanci sono uscite 7 teste e 3 croci e il gioco viene interrotto. Come vanno suddivisi i 10 euro tra i due giocatori?

Né Pascal né Fermat hanno scritto le loro conclusioni, ma la loro corrispondenza ha ispirato il trattato *De ratiociniis in ludo alee* (Sul ragionamento nel gioco dei dadi) scritto nel 1657 da Christiaan Huygens.

([1]) Daremo risposta a a questo esercizio alla fine dell'articolo, ma perché non provare ad affrontarlo, prima di leggere la soluzione?

Nei problemi che incontreremo avremo a che fare con eventi legati ad un numero finito di possibilità. In questo caso, la definizione classica di probabilità di un evento E è

il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili.

Ma che cosa vuol dire che i casi possibili sono tutti equiprobabili? Che hanno la stessa probabilità: sembra che sia una definizione non ben posta, che si morde la coda...

In realtà il punto fondamentale è che la teoria della probabilità è un macchinario che consente di calcolare le probabilità di eventi complessi a partire dalla conoscenza delle probabilità di alcuni eventi elementari, le cui probabilità ammettiamo di avere date. Ad esempio tutte le volte che leggiamo locuzioni del tipo *non truccato* sappiamo che abbiamo un'ipotesi su un'equiprobabilità di certi eventi elementari:

- moneta non truccata = testa e croce hanno entrambe probabilità del 50%;
- dado (a sei facce) non truccato = ogni faccia ha probabilità di $1/6$;
- un bambino bendato estrae una fra 90 palline uguali (lotto) = ogni pallina ha probabilità pari a $1/90$ di uscire.

Questa parte è la modellizzazione del problema. Poi la matematica entra in gioco e permette di calcolare la probabilità di eventi più complessi, come la probabilità di fare sei al SuperEnalotto o di ottenere la sequenza TTTCCTCTTT tirando 10 volte una moneta non truccata.

Si possono dare nozioni più complesse rispetto a quella classica di probabilità, permettendo così di calcolare le probabilità di eventi complessi una volta che siano note le probabilità dei casi elementari. In realtà non saremo interessati a questa generalità, ma per completezza diamo la definizione formale di probabilità. Il lettore non interessato può saltare alla prossima sezione.

Nel 1933 Andrej Nikolaevič Kolmogorov nel trattato *Foundation of the theory of probability* (Fondamenti della teoria della probabilità) assiomatizza rigorosamente la probabilità tramite i seguenti assiomi.

Dato l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento Ω, ad ogni evento casuale [2] $E \subset \Omega$ corrisponde un certo numero $P(E)$, chiamato *probabilità di* E, che soddisfa

(1) $0 \leq P(E) \leq 1$.
(2) La probabilità dell'evento certo Ω è $P(\Omega) = 1$.
(3) La probabilità dell'unione di un numero finito o infinito numerabile di eventi mutuamente esclusivi è pari alla somma delle probabilità di questi eventi.

Il caso classico si ottiene da questo quando Ω ha cardinalità finita e tutti gli eventi costituiti da un singolo elemento di Ω hanno la stessa probabilità.

3. – Il gioco d'azzardo

Cerchiamo ora di capire cos'è un gioco d'azzardo. Secondo l'enciclopedia Treccani *il gioco d'azzardo è un'attività ludica in cui ricorre il fine di lucro e nella quale la vincita o la perdita è in prevalenza aleatoria, avendovi l'abilità un'importanza trascurabile*.

Anche secondo la legge italiana le caratteristiche peculiari sono l'aleatorietà della vincita e il fine di lucro.

Curiosamente l'etimologia delle parole azzardo e aleatorio è simile: entrambi derivano dalla parola dado, in arabo *az-zahr* e in latino *alea*. In effetti il gioco dei dadi è uno dei giochi d'azzardo più antichi e – come abbiamo visto – è anche stato il primo su cui sono stati scritti dei trattati di probabilità.

In alcuni dei giochi che tratteremo la vincita è completamente aleatoria: non è possibile alcuna strategia. In altri è invece possibile adottare una strategia per vincere o perlomeno per limitare la perdita. Con vincere o limitare la perdita intendiamo nel lungo periodo: stiamo parlando di migliorare le probabilità di vincita o, come vedremo in seguito, la speranza matematica di vincita. Sulla singola partita (o su un numero ridotto di partite) la vincita è determinata dal caso e non è in alcun modo prevedibile.

4. – I gratta e vinci e le lotterie - la speranza matematica

Il tipo di gioco d'azzardo più semplice da studiare è indubbiamente costituito da gratta e vinci e lotterie. In questo tipo di giochi il giocatore compra un biglietto da un lotto di biglietti prefissato pagando una certa somma e poi scopre – subito nel caso dei gratta e vinci, in maniera differita nel tempo nel caso delle lotterie – se e che premio ha vinto.

Basta [3] andare sul sito internet dei monopoli di stato (*www.agenziadoganemonopoli.gov.it* e *www.lottomatica.it*) per avere i dati sul numero di biglietti stampati e sulla quantità e l'ammontare dei premi in palio.

Prendiamo ad esempio il Nuovo Miliardario [4], stampato in lotti da 142.560.000 biglietti da 5 € l'uno. La massa premi totali in palio ammonta ad euro 513.418.500,00.

Quanto vinco mediamente comprando un biglietto? Ho un modo semplice per calcolarlo: se comprassi tutti i biglietti, vincerei tutti i premi, per un totale di euro 513.418.500,00. Dividendo tale vincita per il numero di biglietti comprati, ottengo che la vincita media per biglietto è di circa $3,60$€.

Siccome un singolo biglietto costa 5€ ciò vuol dire che mi aspetto di perdere mediamente $1,40$€ ogni volta che compro un gratta e vinci Nuovo

(2) In realtà in alcuni casi non è possibile definire una probabilità per ogni sottoinsieme di Ω senza incorrere in contraddizioni, ma ci si deve limitare ad una famiglia di sottoinsiemi detti misurabili. Questo è dovuto a problemi creati dall'assioma di sommabilità numerabile ed all'assioma della scelta. Nei casi che ci interesseranno, dove lo spazio degli eventi ha cardinalità finita, questi problemi non sussistono.

(3) "Basta" andrebbe scritto tra virgolette, in quanto per una buona trasparenza sarebbe meglio avere questi dati direttamente sui biglietti in vendita, come peraltro accade in altri Paesi – ad esempio la Spagna, e non nascosti in una sezione del sito internet.

(4) Decreto ministeriale: http://www.agenziadoganemonopoli.gov.it/wps/wcm/connect/internet/ed/monopoli/giochi/lotterie/lotterie_istantanee/lot_ist_attive/li+nuovo+miliardario.

Miliardario, ovvero il 28% di quanto pagato per acquistarlo.

In realtà le cose vanno leggermente peggio, dato che *sui premi di importo superiore a* 500€ *è trattenuto dall'erario il* 6% *dell'importo eccedente i* 500€. Calcolando la vincita media per biglietto corretta, si ottengono $3,59$€. La differenza è indubbiamente piccola, ma contando tutti i biglietti venduti si traduce in quasi un milione e mezzo di euro ulteriori che restano alle casse dello Stato, e una diminuzione dei premi massimi da 500 mila euro a poco più di 470 mila euro.

Nei vari gratta e vinci (al momento in cui scrivo ne esistono ben 66, secondo il sito dei monopoli di Stato) la percentuale che resta al banco varia. In generale è maggiore per i gratta e vinci a basso costo e minore per i gratta e vinci ad alto costo. Quindi posso scegliere: spendere poco (anche solo 1€), perdendo tanto percentualmente, o spendere tanto (fino a 20€ per un singolo biglietto), perdendo meno percentualmente (ma molto in assoluto)?

La vincita media per biglietto che abbiamo calcolato va sotto il nome di speranza matematica di vincita e si indica con $\mathbb{E}$. L'abbiamo ottenuta facendo il rapporto tra la somma totale vinta e il numero di biglietti comprati. Se sono in palio n_i premi da V_i€, per un totale di $P = \sum_i n_i V_i$€ e n sono i biglietti complessivamente stampati, allora possiamo riscrivere la vincita media per biglietto nel seguente modo:

$$\mathbb{E} = \frac{P}{n} = \frac{\sum_i n_i V_i}{n} = \sum_i \frac{n_i}{n} \cdot V_i \,.$$

Possiamo interpretare il rapporto n_i/n come la probabilità di trovare uno degli n_i biglietti con cui si vincono esattamente V_i€. In tale modo posso calcolare la speranza matematica di vincita per ogni gioco d'azzardo:

$$\mathbb{E} = \sum_i P(V = V_i) \cdot V_i \,,$$

dove $P(V = V_i)$ è la probabilità di vincere esattamente V_i.

4.1. **Vincere al gratta e vinci.** Dato che il gratta e vinci è un gioco puramente di fortuna (ho pescato o no il biglietto vincente?) sembrerebbe impossibile trovare una strategia che ci permetta di guadagnare.

È però capitato che qualcuno sia in passato riuscito a trovare un metodo per individuare quasi certamente i biglietti vincenti, limitandosi quindi ad acquistare quelli. Ad esempio Mohan Srivastava, un geostatistico di Toronto, si accorge nel 2003 di un baco di progettazione dei gratta e vinci canadesi della serie Tic Tac Toe: osservandoli prima di grattarli è possibile capire se sono vincenti o meno. Mohan ha utilizzato per un po' il suo metodo per divertimento e ha calcolato che – lavorandoci a tempo pieno – sarebbe riuscito a guadagnare circa 600 dollari canadesi al giorno, ovvero molto meno di quello che guadagnava con le sue consulenze da provetto geostatistico.

Ha pertanto rivelato il suo trucco al team sicurezza di The Lottery, allegando alla sua lettera 20 gratta e vinci non grattati, divisi in due buste chiuse, una contenente gratta e vinci vincenti e l'altra perdenti. Diciannove previsioni su venti erano corrette. Immediatamente i gratta e vinci Tic Tac Toe sono stati ritirati dal mercato ([5]).

5. – La roulette - la legge dei grandi numeri

Nella roulette una pallina viene lanciata su una ruota che gira, finché si ferma in una delle scanalature della ruota. Le scanalature sono marcate con dei numeri. Ci sono due versioni di roulette, la francese (36 numeri, metà rossi e metà neri, e lo 0, verde) e l'americana (36 numeri, metà rossi e metà neri, e 0 e 00, verdi).

Si può puntare sul singolo numero, su una coppia di numeri vicini ([6]), su un quartetto di numeri vicini, su tre o sei numeri vicini, sui primi, gli ultimi o i 12

([5]) Per saperne di più sulla sua storia, potete leggere *L'uomo che vinceva prima di grattare* [2, pagg. 159-171] o *Cracking the scratch lottery code*

(http://www.wired.com/2011/01/ff_lottery/all).

Un dettagliato documento che spiega il metodo usato da Mohan si trova qui:

http://www.math.leidenuniv.nl/˜gill/
Jul2003_Report_on_TicTacToe.pdf.

([6]) Con numeri vicini intendiamo vicini sul tappeto di gioco; tipicamente sulla ruota della roulette saranno lontani fra loro.

numeri di mezzo; su pari o dispari, rosso o nero, sui primi o gli ultimi 18 numeri.

Gli incassi per le puntate vincenti nella roulette sono i seguenti (uguali per entrambe le versioni): 36 volte la posta per il numero singolo, 18 volte la posta per la coppia, 12 volte la posta per i 3 numeri, 9 volte la posta per 4 numeri (*carré*), 6 volte la posta per 6 numeri, 3 volte la posta per 12 numeri, e infine 2 volte la posta per pari/dispari, rosso/nero, 18 numeri.

Scegliendo una qualsiasi delle puntate, calcoliamo la speranza matematica di vincita quando puntiamo 100€ alla roulette:

$$\mathbb{E} = \frac{m}{n} \cdot k \cdot 100 = \frac{m \cdot k}{n} \cdot 100,$$

dove m sono i numeri puntati (i casi favorevoli), n i casi totali (37 o 38) e k è quante volte la posta si vince con quella puntata. Qualunque sia la scelta di giocata che facciamo, $m \cdot k$ è 36. Quindi la speranza matematica è la stessa per tutte le giocate ed è i $36/37$ della posta per la roulette francese, i $36/38$ per quella americana.

Pertanto giocando alla roulette si perde mediamente $1/37$ (ovvero $2,70$€ per ogni 100€ giocati) o $2/38$ (ovvero $5,26$€ per ogni 100€ giocati) di quanto puntato: la roulette è di gran lunga meno svantaggiosa del gratta e vinci.

La roulette francese è meno svantaggiosa di quella americana, ma la puntata minima è solitamente maggiore: lo stesso fenomeno già visto nei gratta e vinci.

Alla roulette la perdita media ad ogni giocata è molto piccola, ma tanto basta affinché il banco si arricchisca e i giocatori si rovinino. Si possono facilmente realizzare degli esperimenti che mostrano come nel lungo periodo i giocatori vadano certamente in rosso.

Sul sito *www.fateilnostrogioco.it* sono disponibili i dati di un tale esperimento realizzato materialmente durante una mostra a Bolzano nel 2013 con una vera e propria roulette francese a cui i visitatori erano invitati a puntare 100 euro suddivisi come meglio credevano. I dati dei 34 giorni sono stati segnati scrupolosamente e si è ottenuto che dopo 1880 giocate da 100 euro il passivo complessivo dei giocatori (o il guadagno del banco) era di 5130€, pari a $2,73$€ a puntata: molto vicino al valore di $2,70$€ che rappresenta la speranza matematica di perdita che abbiamo calcolato per la roulette, vedi figura 1.

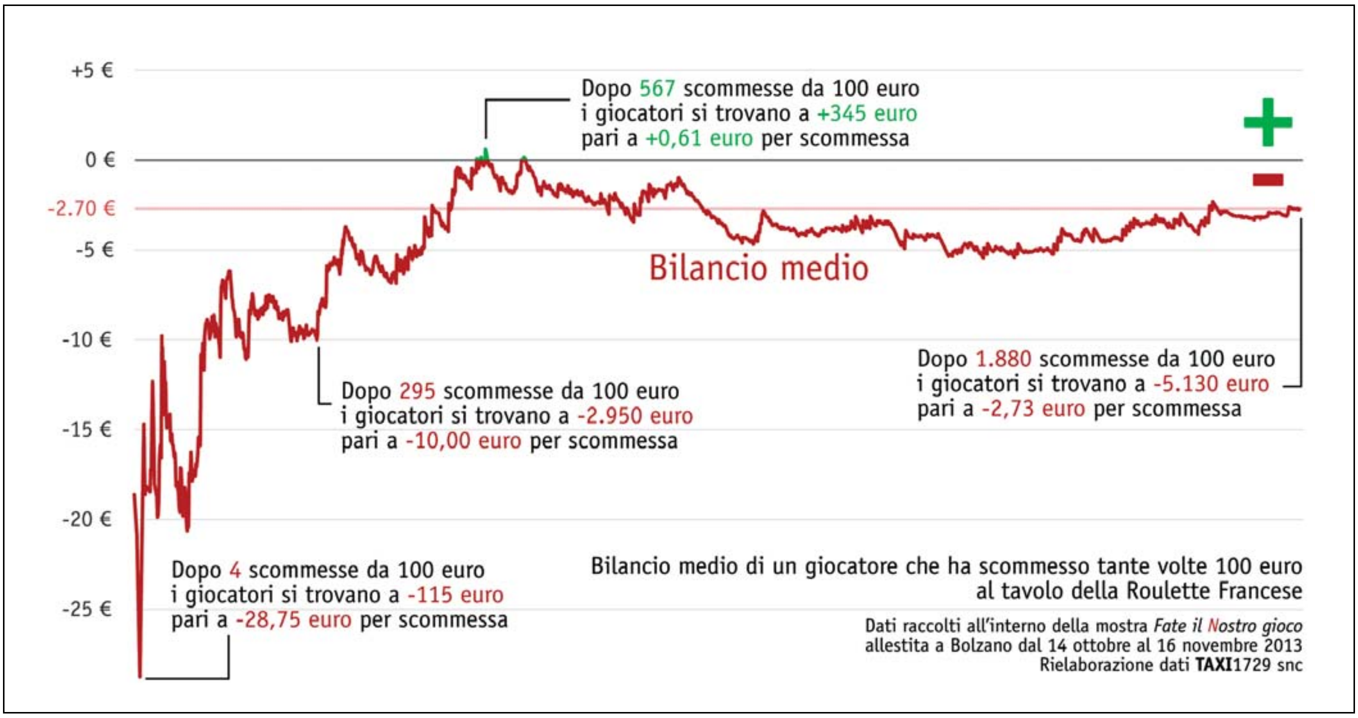

Figura. 1: I risultati dell'esperimento di Bolzano a cura di Taxi1729: il bilancio medio alla roulette nel tempo.

Tale esperimento può essere condotto in maniera più rapida, anche se meno spettacolare, utilizzando un semplice programma su un foglio di calcolo per simulare migliaia di lanci di pallina. Dopo qualche migliaio di lanci, la perdita media sarà molto vicina al valore ottenuto con il calcolo della speranza matematica.

Ciò è dovuto alla legge dei grandi numeri, che afferma che all'aumentare degli esperimenti aleatori, le frequenze osservate tendono alle probabilità. In particolare la vincita media di un giocatore all'aumentare delle giocate tende alla speranza matematica di vincita.

Altri teoremi di probabilità, come il teorema del limite centrale, ci permettono di dire molto di più: ad esempio a che velocità ci dobbiamo aspettare che la frequenza tenda alla probabilità. In particolare è possibile calcolare a priori dopo quante giocate abbiamo una probabilità p di essere in negativo. La parte interessante (soprattutto per chi gestisce il banco) è che se il numero di giocate è sufficientemente alto, la probabilità p di essere in negativo è arbitrariamente vicina a 1. Ovvero, giocando sufficientemente a lungo, il banco vince certamente. Siccome in un casinò ci sono migliaia e migliaia di puntate all'ora, il casinò non compie nessun azzardo: vince sempre.

5.1. **Perdere alla roulette: ovvero le strategie sbagliate.** Sono stati ideati molti metodi per *vincere* alla roulette. Uno particolarmente famoso e di successo è il metodo del raddoppio della puntata.

Punto 1 sul rosso. Se esce rosso vinco 2 e quindi ho un bilancio di $+1$. Se esce nero (o verde), punto nuovamente su rosso, cioè 2 (in totale ho puntato 3). Se esce rosso vinco 4 e quindi ho un bilancio di $+1$. Se esce nero (o verde), punto nuovamente su rosso, raddoppiando nuovamente la puntata, e così via, finché esce rosso (cosa che certamente accadrà in tempo finito) e concludo con un bilancio di $+1$.

Ripetendo il metodo, dato tempo a sufficienza, posso guadagnare cifre arbitrariamente alte.

Peccato che il metodo non funziona. Per due motivi: per far funzionare il metodo non serve solo tempo a sufficienza, ma anche denaro a sufficienza... A un certo punto potrei non avere soldi a sufficienza per raddoppiare la puntata precedente. Se ciò accade ho perso tantissimi soldi.

Inoltre ad un tavolo della roulette non posso puntare quanto voglio. C'è una puntata minima e una puntata massima. Se per esempio ad un tavolo la puntata minima è 10€ e la massima di 2.000€, allora partendo dal minimo dopo 7 raddoppi punto 1.280€. Se nuovamente non uscisse rosso non potrei più raddoppiare e avrei perso 2.550€. Questo accade se per 8 volte consecutive non esce rosso, il che capita con probabilità

$$P = \left(\frac{19}{37}\right)^8 \simeq 4,8\,‰.$$

Sono disposto a rischiare di perdere 2.550 euro circa una volta ogni 200 per guadagnarne 10 molto probabilmente? Ovvero davvero voglio giocare ad una lotteria al contrario, in cui ho una bassa probabilità di perdere molti soldi e un'alta probabilità di vincere una cifra irrisoria?

E soprattutto, reiterando il rischio (cosa che devo fare, se voglio guadagnare grandi cifre), cosa succede? La mia speranza matematica è, per ogni volta in cui applico il *metodo*:

$$\mathbb{E} = 10 \cdot (1 - P) - 2.550 \cdot P = 10 - 2.560 \cdot P = -2,38.$$

Per guadagnare cifre interessanti con questo metodo devo giocare a lungo, quindi si applica la legge dei grandi numeri e alla lunga ogni applicazione del metodo risulta in una perdita di $2,38$€... davvero un bel metodo, per il banco!

Proviamo a rapportare questa perdita alla spesa media che si ha per ogni applicazione del metodo. Con probabilità $18/37$ spendiamo 10€, con probabilità $19/37 \cdot 18/37$ ne spendiamo 30, con probabilità $(19/37)^2 \cdot 18/37$ ne spendiamo 70... Facendo i conti si ottiene che in ogni applicazione del metodo spendiamo mediamente circa 88€. Proviamo ora a rapportare la perdita media alla spesa media e otteniamo nuovamente una perdita di $2,70$€ ogni 100€ giocati: il vantaggio per il banco è sempre quello, ed è rimasto invariato nonostante l'applicazione del supposto metodo infallibile per vincere.

5.2. **Vincere alla roulette.** La roulette è quasi un gioco equo, nel senso che è di poco favorevole al banco. Se fosse possibile ridurre in qualche modo (anche in maniera minima) i possibili esiti del lancio di una pallina, ecco che il gioco si trasformerebbe in favorevole. Basterebbe riuscire a calcolare con una certa approssimazione la traiettoria della pallina nei pochi secondi tra il lancio della stessa e la fine delle puntate.

Nel 1978 un gruppo di matematici e fisici, gli *Eudaemons*, studiarono a fondo una roulette di un casinò di Las Vegas e svilupparono un microprocessore che calcolasse molto rapidamente il settore di arrivo della pallina. In questo modo riuscirono a sbilanciare la speranza matematica in loro favore e a vincere una piccola somma ([7]).

Sicuramente guadagnarono molto di più quando misero le loro competenze di matematica e fisica allo studio della teoria del caos e dell'andamento dei mercati finanziari.

Inoltre giocare alla roulette utilizzando un ausilio informatico di tale tipo è ovviamente vietato dai casinò, i cui metodi di controllo del comportamento dei giocatori sono a dir poco molto raffinati.

6. – Il lotto e il SuperEnalotto - combinatoria

Il lotto, il SuperEnalotto e molti altri giochi in giro per il mondo si basano su un meccanismo semplicissimo: vengono estratti m numeri a partire da un insieme di n numeri e i giocatori devono indovinare quali saranno i numeri ad essere estratti.

Ci sono due tipologie di giochi di questo tipo.

1. I giochi a vincita fissa, in cui, fissata la scommessa fatta, la vincita è un multiplo prefissato della cifra scommessa (stesso meccanismo della roulette, per intenderci): ad esempio il lotto ([8]).

Per questi giochi c'è ben poco di nuovo da dire, rispetto a quanto già detto per la roulette. Infatti la roulette può a tutti gli effetti considerarsi un gioco di questo tipo. Anzi: il gioco di questo tipo più conveniente – o meglio meno sconveniente – per il giocatore.

Nel lotto vengono estratti 5 numeri tra 1 e 90 in maniera casuale: si può puntare sull'uscita di un singolo numero (*estratto*), o di due (*ambo*), di tre (*terno*), quattro (*quaterna*) o cinque (*cinquina*) numeri, oltre ad altre scommesse particolari (*ambetto*, *estratto determinato*) che non analizziamo.

Come possiamo calcolare la speranza di vincita per il caso del lotto? Abbiamo trovato sul sito di lottomatica tutti i premi per le varie puntate. Quello che resta da fare è calcolare la probabilità di vincere con una singola puntata, e quindi applicare la formula per la speranza matematica.

Per l'estratto i conti sono semplici: ci sono 5 casi favorevoli (i numeri estratti) su 90 casi totali, $P_1 = 1/18$.

Per tutte le altre puntate, dobbiamo contare sia quanti sono i casi favorevoli, sia quanti sono i casi totali. Vediamo ad esempio per l'ambo. Le coppie totali che posso formare con 90 numeri sono $90 \cdot 89/2 = 4005$ (ho 90 scelte per il primo numero, 89 per il secondo e in tal modo ho contato ogni coppia due volte). I 5 numeri estratti forniscono in totale $5 \cdot 4/2 = 10$ coppie favorevoli. Pertanto $P_2 = 10/4.005 = 2/801$.

In generale ci interessa sapere quanti sono i possibili insiemi di k numeri presi da un insieme di $n \geq k$ numeri:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Questo ci dà le seguenti probabilità per terno, quaterna e cinquina: $P_3 = 1/11.748, P_4 = 1/511.038$, $P_5 = 1/43.949.268$. Da cui posso calcolare le speranze matematiche di vincita per le varie puntate.

Considerando anche la tassazione al 6%, mentre alla roulette perdo mediamente il $2,7\%$ della cifra giocata, al lotto perdo ben di più: con estratto ed ambo il 41%, con terno il 64%, con quaterna il 78% e con cinquina ben l'87%.

Perchè le perdite percentuali sono molto minori alla roulette rispetto al lotto? Il motivo è semplice: un giocatore che entra in un casinò ben difficilmente farà una singola giocata, ma ne farà molte nel corso della serata, quindi anche un piccolo vantaggio del banco è sufficiente al banco per fare grandi incassi e contemporaneamente non spaventare il giocatore.

Viceversa, nel lotto l'estrazione è differita rispetto alla giocata, e le giocate dei singoli giocatori sono tendenzialmente più rade: il banco può spremere di più i giocatori senza spaventarli troppo.

Inoltre alla roulette le vincite sono piccole rispetto alla puntata: massimo 36 volte la puntata, mentre al

([7]) Per saperne di più sull'impresa degli Eudaemons, *Battere il banco: una sfida per soli geni* in [2, pagg. 45-51].

([8]) Si possono trovare tutti premi lordi pagati – verranno poi tassati del 6% – sul sito http://www.lottomaticaitalia.it/lotto/gioco/lotto_premi.html lotto sono molto più alte. La cinquina (al lordo delle tasse) viene pagata 6 milioni di volte la puntata: affinchè il gioco fosse equo, dovrebbe essere pagata quasi 44 milioni di volte la puntata. Ma quando decido se puntare un euro sulla possibilità di cambiarmi la vita percepisco davvero una qualche differenza se mi dicono che vinco 6 o 44 milioni di euro? Molto probabilmente no. E allora tanto vale che il banco si incassi direttamente quei 38 milioni di euro...

2. I giochi a totalizzatore o a vincita variabile, come il SuperEnalotto e il WinForLife. In alcuni giochi il montepremi è calcolato sulla base delle somme giocate per la singola estrazione. Quindi il calcolo della speranza matematica di vincita è semplicissimo: viene detto esplicitamente nelle regole ([9]) quanto il banco trattiene per sé. Nel caso del SuperEnalotto il 40%. Il gioco è pertanto mediamente (s)conveniente circa quanto giocare l'estratto o l'ambo al lotto.

Ma non sempre è così: infatti non tutta la restante parte della raccolta (per il SuperEnalotto il 60%) viene immediatamente redistribuita tra i giocatori.

Vediamo nei dettagli il caso del SuperEnalotto. Per giocare bisogna scegliere 6 numeri tra 1 e 90. Vengono poi estratti 6 numeri e un numero Jolly e si vince se se ne sono indovinati 2 o più numeri dei primi 6. Il montepremi viene suddiviso nel seguente modo ([10]):

- Tra chi indovina i 6 numeri viene diviso il $17,4\%$ del montepremi.
- Tra chi indovina 5 numeri e il Jolly viene diviso il 13% del montepremi.
- Tra chi indovina 5 numeri viene diviso il $4,2\%$ del montepremi.
- Tra chi indovina 4 numeri viene diviso il $4,2\%$ del montepremi.
- Tra chi indovina 3 numeri viene diviso il $12,8\%$ del montepremi.
- Tra chi indovina 2 numeri viene diviso il 40% del montepremi.
- Circa l'$8,4\%$ del montepremi è attribuito in premi istantanei, al momento della giocata della schedina.

([9]) Sempre nascoste in una qualche sezione del sito internet dei monopoli di Stato...

([10]) Vedi decreto RU/109175 del 16 novembre 2015, articolo 4, su *www.agenziadoganemonopoli.gov.it*

Però se nessuno totalizza il 6, allora la parte del montepremi attribuita ai 6 viene riportata all'estrazione successiva, consentendo al premio per i 6 (il *Jackpot*) di aumentare sempre di più.

In tal modo la speranza matematica di vincita non è costante, ma in realtà parte dal 60% quando il Jackpot è assente ([11]) e poi aumenta con l'aumentare del Jackpot.

Siccome bisogna indovinare una sestina fra

$$\binom{90}{6} = 622.614.630$$

bisogna mediamente attendere un elevato numero di giocate affinché il 6 venga realizzato e il Jackpot può anche crescere di molto ([12]), aumentando così la speranza matematica di vincita.

6.1. **Perdere al Lotto – i numeri ritardatari.** Dato che ogni estrazione è completamente indipendente dalle altre, non ha senso applicare delle strategie riguardo i numeri da puntare. In particolare non serve a nulla puntare sui numeri *ritardatari*, ovvero sui numeri che da più tempo non vengono estratti.

Il motivo di questa credenza è dovuto alla confusione tra la probabilità che un dato numero non esca per le prossime 100 estrazioni consecutive e la probabilità che non esca per 100 estrazioni consecutive, *sapendo che è uscito per le* 99 *precedenti*: nel primo caso la probabilità è bassa, circa lo $0,3\%$ pari a $\left(\frac{17}{18}\right)^{100}$, nel secondo è ovviamente la probabilità che non esca in una singola estrazione, ovvero $\frac{17}{18}$, circa il 94,4%.

Nei giochi a vincita fissa (come il Lotto) qualunque numero ha la stessa probabilità degli altri di essere estratto, e qualunque giocata è equivalente.

Nei giochi a totalizzatore, invece, giocare i numeri ritardatari è addirittura controproducente. Ovviamente ogni numero ha la stessa probabilità degli altri di essere estratto, ma siccome una volta vinto un premio tale premio viene suddiviso in parti uguali

([11]) Vi è in realtà un meccanismo leggermente più complesso che fa in modo che il Jackpot non sia mai esattamente zero, così da invogliare a giocare, ma non scendiamo nei dettagli che di poco modificano questa analisi.

([12]) Ad oggi il Jackpot record è stato quello vinto il 30 ottobre 2010, pari a 177.729.043€.

tra tutti coloro che hanno ottenuto lo stesso punteggio, allora ottimizzo la mia speranza di vincita giocando i numeri meno giocati [13]. Nei giochi a totalizzatore, quindi, non ho strategie per migliorare la mia possibilità di vincita, ma ho strategie per massimizzare la mia vincita nel caso riuscissi a vincere: giocare i numeri meno giocati. Purtroppo questo dato (quanto vengono giocati i singoli numeri), l'unico che ha una qualche utilità, non viene fornito da Lottomatica.

6.2. **Vincere il Jackpot**. Abbiamo visto che nei giochi a totalizzatore la speranza di vincita non è costante nel tempo, ma aumenta all'aumentare del Jackpot. Si può arrivare al punto in cui la speranza di vincita diventa maggiore della quota puntata (ovvero mediamente non perdo più soldi, ma li vinco) e pertanto diventa conveniente giocare.

Ci sono però due problemi.

Innanzitutto non è facile calcolare quali saranno i premi per le varie fasce di premio prima che i dati vengano resi noti dal gestore del gioco (quando c'è l'estrazione e non si può più giocare), ma è un problema che si può aggirare studiando il numero storico delle schedine giocate, di solito circa costante tranne quando il Jackpot è alto e si assiste ad un grande incremento delle giocate.

Il secondo problema è capire tra quante persone verranno divise le vincite, soprattutto quelle alte (mentre non cambia molto se sono 40.000 o 50.000 le persone a totalizzare un 2 al SuperEnalotto, cambia di molto se il 6 viene fatto da 1, 2 o addirittura 5 persone!). Tante schedine vincenti con il 6, e il Jackpot si riduce tantissimo.

Non è un caso che i giochi a totalizzatore che hanno attirato gruppi di giocatori *professionisti* siano stati giochi in cui c'è un tetto al Jackpot associato ad un meccanismo di *roll-down*: quando il Jackpot supera una certa cifra prefissata, se non ci sono schedine che vincono il premio massimo, il Jackpot viene suddiviso tra coloro che hanno vinto i premi minori.

Sapendo quando il tetto verrà sfondato e giocando un numero elevato di schedine si è così (quasi) certi di poter contare su una reale speranza di vincita elevata e quindi di vincere grandi cifre. Questo meccanismo è stato sfruttato da vari gruppi organizzati negli USA nelle lotterie *Cash WinFall* del Massachusetts e *Winfall* del Michigan [14]. In questi gruppi la competenza matematica è alta: uno di essi era costituito da studenti del MIT di Boston.

La manna per questi gruppi dura dal 2005 al 2012, quando il Cash WinFall viene chiuso dallo Stato del Massachusetts.

7. – Il Black Jack - l'albero delle possibilità

Il Black Jack (o Ventuno) è un gioco di carte che si svolge tra il banco e i giocatori.

Il gioco si svolge con 2 o più mazzi di carte francesi (52 carte divise in 4 semi; per ogni seme le carte sono: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K): gli assi **A** valgono 1 o 11 a seconda di cosa è più conveniente, le figure **J**, **Q** e **K** valgono 10, tutte le altre carte il loro valore nominale.

Tutti i giocatori pagano al banco una posta (scelta dal giocatore) per giocare. Vengono poi date due carte ad ogni giocatore e una carta al banco. Tutte le carte sono scoperte. I giocatori, a turno, decidono se pescare una carta o fermarsi. I giocatori che *sballano* (superano il punteggio di 21 con le proprie carte) hanno perso. Quando tutti i giocatori rimasti si fermano, il banco pesca carte finché non supera il punteggio di 16, momento in cui è costretto a fermarsi [15]. Vincono i giocatori che non hanno sballato e che realizzano un punteggio più alto del banco oppure tutti i giocatori che non hanno sballato se il banco supera 21.

La vittoria viene pagata dal banco due volte la posta e il pareggio una volta la posta (ovvero il giocatore resta a bilancio nullo: è come se non avesse giocato).

Nel gioco ci sono alcune particolarità che per semplicità di ragionamento non prendiamo in considerazione per questa sommaria analisi del gioco, tra cui il *black jack* (mano con asso e dieci o figura,

(13) Ad esempio evitando i numeri da 1 a 31, che compaiono nelle date di nascita, o i numeri ritardatari, che tendono ad essere più giocati.

(14) Per i dettagli e tutta la storia, rimando a *Cash WinFall: quando il gioco si fa conveniente* [2, pagg. 103-117].

(15) Mentre i giocatori possono applicare una strategia, il banco non può farlo: le regole lo costringono a pescare o a fermarsi.

vincente anche sul 21 e pagata due volte e mezza la posta) che dà il nome al gioco.

Avere una strategia al Black Jack vuol dire saper decidere, in ogni situazione di carte sul tavolo (nostre e la carta del banco, le carte degli altri giocatori e le carte già uscite, eventualmente), se fermarsi (STAI) o pescare una carta (CARTA).

Ovviamente dato che le pescate non sono davvero indipendenti le une dalle altre, la strategia corretta dovrebbe tener conto anche di tutte le carte davanti agli altri giocatori e già uscite in mani precedenti o – se preferite – delle carte ancora presenti nel mazzo. Questo è difficile da fare e per semplicità supponiamo che le singole carte siano indipendenti le une dalle altre. Questa ipotesi è abbastanza vicina al vero nel caso si giochi con molti mazzi – nei casinò sono solitamente tra 6 e 8 – e quella in cui si gioca sia una delle prime mani.

Per semplicità trattiamo solo l'esempio di un caso banco contro un giocatore, ma dovrebbe essere semplice capire come questo si può generalizzare.

Supponiamo di avere 20 punti (due figure) e che il banco abbia 10 punti (una figura): conviene fermarsi o chiedere carta? Dobbiamo calcolare le probabilità di vittoria, pareggio e sconfitta nei vari casi.

CARTA: se pesco una carta diversa dall'asso (il che accade con probabilità 12/13) sballiamo e perdiamo. Se pesco un asso vado a 21 e mi fermo. In questo caso posso vincere o pareggiare (nel vero Black Jack potrei anche perdere, se il banco pesca l'asso e fa black jack). Serve analizzare le pescate del banco.

STAI: ho 20 punti. Il banco ne ha 10 e pesca. Se esce 7–9 (probabilità 3/13), il banco è costretto a fermarsi a 17-19 punti e io vinco. Se esce 10, pareggiamo (probabilità 4/13, ci sono anche le figure). Se esce asso (probabilità 1/13) il banco raggiunge 21 e vince. Gli altri casi vanno analizzati meglio uno per uno.

Quanto fatto finora basta e avanza per concludere che conviene fermarsi in tale situazione. Se voglio calcolare esattamente la speranza di vincita in entrambe le situazioni devo continuare ad analizzare i vari casi. Una tale analisi può essere effettuata tramite l'albero delle possibilità, ovvero proseguendo il ragionamento iniziato sopra.

In figura 2 vediamo l'albero (16) in dettaglio nel caso in cui io abbia 21 e il banco 10.

(16) Disegnato utilizzando *ironcreek.net/phpsyntaxtree/*

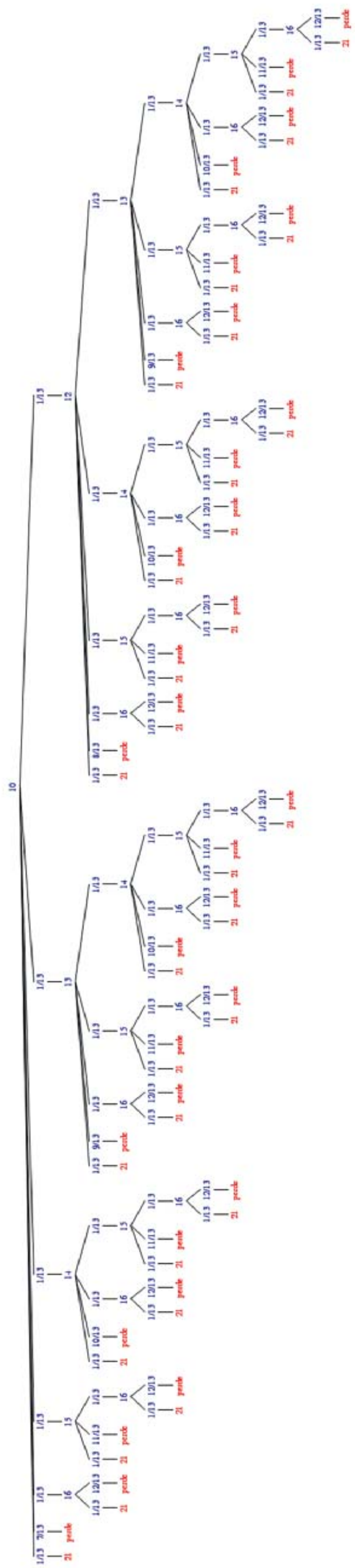

Figura. 2: L'albero delle possibilità nel caso in cui io abbia 21 e il banco 10.

L'albero viene disegnato nel seguente modo: partendo da un ramo, ovvero da una situazione di punteggio raggiunta dal banco, il ramo viene fatto diramare in vari rami, corrispondenti alle situazioni a cui può arrivare il banco pescando una singola carta, con l'indicazione della probabilità che ha di pescare una tale carta e del punteggio che raggiunge il banco. Il metodo viene ripetuto per tutti i rami, finché non si arriva alle situazioni finali in cui il banco non pesca più, perché ha perso, sballando o raggiungendo 17-20, o perché ha raggiunto 21, pareggiando. Tali situazioni finali (indicate in rosso) sono dette foglie.

Moltiplicando tra loro tutte le probabilità che si incontrano lungo i rami che portano ad una foglia perdente (e poi sommandole tra loro) ([17]) si ottiene la probabilità che ha il banco di perdere. Pertanto il banco riesce a pareggiare nell'$11,1\%$ dei casi mentre perde nell'$88,9\%$ dei casi (facendo un albero delle possibilità più dettagliato, si trova che sballa nel $21,2\%$ dei casi, mentre nei restanti si ferma tra 17 e 20).

Mettendo questo risultato insieme al fatto che con probabilità 12/13 pescando perdevamo, si ottiene che la situazione **CARTA** risulta in: sconfitta $92,3\%$ – pareggio $0,9\%$ – vittoria $6,8\%$ circa, corrispondenti ad una speranza di vincita pari a $\mathbb{E}(CARTA) = -0,855$ volte la posta.

Facendo gli stessi conti con l'albero delle possibilità nel caso (STAI) in cui sono a 20 e il banco a 10, si ottiene che il banco fa 21 e vince nel $11,1\%$ dei casi, fa 20 e pareggia nel $34,2\%$ dei casi e perde nel $54,6\%$ dei casi.

La situazione **STAI** risulta pertanto in: sconfitta $11,1\%$ – pareggio $34,2\%$ – vittoria $54,6\%$ circa, corrispondenti ad una speranza di vincita pari a $\mathbb{E}(STAI) = 0,435$ volte la posta.

La speranza di vincita con **STAI** è enormemente migliore di quella che si prospetta con **CARTA**. Non dubito che chiunque avrebbe scelto di fermarsi, con 20 punti.

Una simile analisi dettagliata può essere effettuata in modo simile, anche se con molti più conti, per tutti i casi possibili di punteggio di un giocatore e di carta del banco, svolta con l'ausilio di un foglio di calcolo elettronico. La complessità dell'albero delle possibilità nel semplicissimo caso in cui il banco è a 10 e noi a 21 rende bene l'idea di quanto sia complesso (computazionalmente, non certo dal punto di vista teorico) trattare il caso generale. L'albero delle possibilità è un ottimo metodo dal punto di vista teorico per calcolare le probabilità degli eventi. Dal punto di vista computazionale è spesso molto o troppo complesso.

Facendo l'analisi dettagliata si ottiene la seguente strategia:

Mani *hard* ovvero senza asso:

- con 11 o meno punti, CARTA;
- con 12 punti, STAI se il banco ha $4-6$, altrimenti CARTA;
- con $13-16$ punti, STAI se il banco ha $2-6$, altrimenti CARTA;
- con 17 o più punti, STAI.

Mani *soft* ovvero con asso (possono valere 10 in meno, più difficile sballare):

- con 17 o meno punti, CARTA;
- con 18 punti, STAI se il banco ha $4-8$, altrimenti CARTA;
- con 19 o più punti, STAI.

La vera strategia, in cui si tiene conto di tutte le regole del Black Jack (e di tutte le possibili giocate del giocatore), è ovviamente più complessa, ma si può trattare in modo del tutto simile studiando le probabilità di vittoria a seconda della giocata fatta attraverso un albero delle probabilità studiato con un foglio di calcolo.

Seguendo correttamente la strategia ottimale al Black Jack, la speranza di vincita è molto buona: mediamente si perde solo lo $0,7\%$ di quanto puntato. Ovviamente se non si gioca secondo la strategia ottimale, le cose possono peggiorare di molto.

7.1. **Vincere al Black Jack**. Siccome la speranza matematica di vincita al Black Jack è solo di poco sfavorevole al giocatore, basta che le probabilità effettive di pescare le varie carte varino di poco per riuscire a portare questa speranza in positivo.

In effetti i numeri su cui abbiamo calcolato le strategie ottimali sono ottenuti nell'ipotesi che le pescate siano indipendenti, cosa non vera dato che una carta già pescata non può essere ripescata.

Su questo si basano le strategie vincenti al Black Jack: sapendo quali sono le carte già uscite, posso –

([17]) È ovviamente consigliabile farlo con l'ausilio di un foglio di calcolo, data la mole di conti.

in teoria – rifare tutti i conti e decidere non solo quale strategia usare quando gioco, ma soprattutto se la strategia corretta è giocare o no una certa mano.

Ovviamente è impossibile riuscire a tenere conto davvero di tutte le carte già uscite e macinare i conti alla velocità con cui si svolge l'azione al tavolo di gioco. Pertanto sono state inventate delle strategie euristiche basate sul *contare le carte* ([18]) che funzionano approssimativamente nel seguente modo: si assegna un valore di -1 alle carte alte (asso, figure e 10), 0 alle carte medie (9, 8 e 7) e $+1$ alle carte basse (6, 5, 4, 3 e 2). Si sommano i valori di tutte le carte uscite (*conteggio*). Quando il conteggio è positivo, le probabilità di vincita migliorano per il giocatore; quando il conteggio è negativo, migliorano per il banco.

Un grande numero di mazzi fa sì che le carte pescate siano molto vicine ad essere indipendenti le une dalle altre e quindi serve un conteggio molto maggiore per alzare sensibilmente la speranza matematica di vincita. Per tener conto di questo si è soliti dividere il conteggio per il numero di mazzi ancora inutilizzati (*conteggio reale*).

I sistemi di conteggio non sono vietati ufficialmente nei casinò, a meno che siano svolti con l'aiuto di apparecchiature informatiche. Nonostante non siano vietati, spesso i casinò cercano di allontanare chi è sospettato di contare le carte. Tuttavia, Ken Uston, che è considerato il più grande contatore di carte mai esistito, riuscì a vincere una causa contro il casinò di Atlantic City con la motivazione che i casinò non possono proibire l'accesso ai bravi giocatori.

Un buon conteggio delle carte può portare la speranza matematica di vincita (che senza conteggio è a $-0,7\%$) fino a $+1\%$ o anche $+2\%$. Per arricchirsi serve giocare molto a lungo (rischiando di farsi allontanare dal casinò) e anche avere un cospicuo ammontare di denaro che si è disposti a perdere, come vedremo meglio nella prossima sezione.

8. – Il Poker Texas Hold'Em – la massimizzazione del profitto

Se nella prima mezzora non capisci chi è il pollo, allora il pollo sei tu.

Amarillo Slim – campione del mondo di Poker, 1972

Il Poker è un gioco di carte giocato con un mazzo di carte francesi basato sulle combinazioni di cinque carte o punti. Vi sono diverse varianti, tra cui attualmente la più famosa è il Texas Hold'Em.

Durante una mano di gioco ci sono varie fasi di puntate, in cui i giocatori possono mettere delle *chips* sul tavolo (a rappresentare del denaro puntato) oppure ritirarsi dal gioco. Alla fine, tra i giocatori che non si sono ritirati si vede chi ha totalizzato il punto che vale di più. Quel giocatore prende tutto il *piatto*, ovvero le *chips* presenti sul tavolo.

I punti possibili, da quello che vale di meno a quello che vale di più sono indicati in tabella 1.

TABELLA 1. – I punti (combinazioni di 5 carte) nel poker ([19]).

punto	descrizione
carta alta	la carta di maggior valore, nell'ordine: A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2
coppia	due carte uguali
doppia coppia	due coppie
tris	tre carte uguali
scala	5 carte in ordine di punteggio, non tutte dello stesso seme
colore	tutte le carte dello stesso seme
full	un tris e una coppia
poker	quattro carte uguali
scala colore	5 carte in ordine di punteggio, dello stesso seme

([18]) Esistono vari metodi diversi di conteggio, più o meno precisi. Ne esponiamo uno come semplice esempio.

([19]) Per carte uguali intendiamo con lo stesso valore; i semi non interessano tranne quando esplicitamente detto, ovvero per colore e scala colore. L'asso può essere usato in due scale: A,K,Q,J,10 o 5,4,3,2,A.

Meno è probabile un certo punto, più esso vale. Infatti nel poker all'italiana, che si gioca con meno di 52 carte, il full vale meno del colore.

Ci sono due diverse tipologie di poker: il *cash poker* e il torneo.

Il *cash poker* è stato introdotto in Italia solo dal 18 luglio 2011, quando è stato attuato il decreto legge sul gioco d'azzardo del 28 aprile 2009 volto a trovare fondi per le popolazioni danneggiate dal sisma de L'Aquila del 6 aprile 2009. Nel cash poker ad ogni mano non si puntano chips, ma veri e propri soldi.

Il torneo è una modalità di gioco in cui si paga una quota di iscrizione, si gioca con delle chips (in ugual numero per tutti i giocatori) e poi vengono distribuiti dei premi prestabiliti ottenuti dalle quote di iscrizione. A parte una quota che il casinò o il gestore del sito trattiene ([20]), le quote di iscrizione vengono trasformate in premi per il primo, il secondo, il terzo classificato.

La modalità cash è indubbiamente molto più pericolosa, in quanto può portare a perdite notevoli in poco tempo. Non è un caso che fosse illegale.

Vediamo ora le fasi di gioco nel Texas Hold'Em. Solitamente ad un tavolo sono seduti 9-10 giocatori, denominati, secondo l'ordine di gioco ([21]): piccolo buio (*small blind*, **SB**), grande buio (*big blind*, **BB**), sotto tiro (*under the gun*, **UTG**), altri giocatori **UTG+1**, **UTG+2**... e infine il bottone (*button*, **BTN**).

Le fasi del Poker Texas Hold'Em sono:

Pre flop: ogni giocatore seduto al tavolo riceve due carte coperte, che solo lui può guardare. Segue un giro di puntate. SB e BB devono effettuare una puntata obbligatoria (rispettivamente di 1 e 2 volte il minimo stabilito per il tavolo) e a seguire ogni giocatore può decidere se ritirarsi (*lascio o fold*), pagare quanto necessario per restare in gioco (*vedo* o *call*) o puntare più di quanto necessario per restare in gioco per forzare gli altri giocatori ad aumentare il piatto (*rilancio* o *raise*). Appena si ha un giro completo di *fold* e *call*, termina la fase. Se resta un solo giocatore in gioco, questo prende il piatto e termina la mano. Altrimenti il gioco passa alla fase del

Flop: vengono girate dal mazzo 3 carte che saranno in comune a tutti i giocatori per formare il punto. Segue un nuovo giro di puntate in cui i bui non sono più obbligati a puntare, a partire da SB. Da questa fase si aggiunge un'ulteriore possibilità per i giocatori: restare in gioco senza puntare nulla, se nessuno prima di loro ha puntato (*busso* o *check*). La fase si conclude esattamente come la precedente.

River: viene girata un'ulteriore carta comune ai giocatori. Segue un nuovo giro di puntate con le modalità del flop.

Turn: viene girata una quinta e ultima carta in comune a tutti i giocatori. Segue un nuovo giro di puntate con le modalità del flop.

Showdown: se è rimasto più di un giocatore in gioco, i giocatori non ritirati possono a turno, a partire dall'ultimo giocatore che ha rilanciato e andando avanti nel senso di gioco, mostrare la loro mano per far vedere il loro punto, ottenuto con le 5 carte fra le 7 a loro disposizione che danno la combinazione migliore. Chi ha il punto migliore vince il piatto. Nel caso di un pareggio, il piatto si divide tra tutti i vincitori.

Una strategia nel Poker Texas Hold'Em consiste nel decidere in ogni occasione cosa scegliere tra check, call, fold e raise (e in questo ultimo caso, di quanto rilanciare). A differenza del Black Jack, in cui si ha un'informazione completa sulle carte che al momento sono uscite e l'unica incognita è rappresentata dalle carte che usciranno, nel Poker sono ignote anche le carte degli altri giocatori. Si possono prendere decisioni solo basandosi sulle proprie carte, su quelle comuni e su cosa hanno fatto gli altri giocatori ([22]).

Non è pertanto possibile – a differenza di quanto fatto nel Black Jack – calcolare con esattezza la propria probabilità di vincita ad un dato momento ([23]). Tale probabilità di vincita va stimata sulla

([20]) In una modalità simile a quella delle lotterie a totalizzatore: la speranza di vincita è data dalla percentuale della quota di iscrizione che viene rimessa in premi.

([21]) L'ordine di gioco è fondamentale nel poker, e cambia ad ogni mano.

([22]) È questo il motivo dell'importanza dell'ordine di turno, specialmente nel pre-flop: UTG non ha nessuna informazione a disposizione se non le proprie carte in mano, mentre BTN sa cosa hanno deciso di fare tutti i giocatori prima di lui.

([23]) Ovviamente chi può vedere tutte le carte in mano ai giocatori può calcolare tale probabilità di vincita, ed è quello che viene mostrato nell'iconografica quando guardiamo una partita di Poker Texas Hold'Em in televisione.

base dell'esperienza ([24]). La matematica entra in azione solo dopo.

Per semplificare il ragionamento, studiamo un caso semplice, in cui siano rimasti in gioco solo due giocatori, entrambi con 4500 chips. Sul piatto ci sono 1000 chips. Il primo giocatore va *all-in*, ovvero punta tutte le sue 4500 chips. Cosa deve fare il secondo giocatore? Per prima cosa deve stimare la sua probabilità di vincita, sulla base della sua esperienza. Diciamo che la sua probabilità di vincita stimata sia p. Può solo ritirarsi (fold) o vedere (call), puntando tutto. Vediamo la speranza di vincita nelle due situazioni.

FOLD: ritirandosi, tiene con certezza le sue 4500 chips. $\mathbb{E}(FOLD) = 4500$.

CALL: andando a vedere, con probabilità p prende il piatto di 10000 chips, altrimenti perde tutto. $\mathbb{E}(\text{CALL}) = 10000p$.

Se $\mathbb{E}(\text{CALL}) > \mathbb{E}\ (\text{FOLD})$, ovvero $p > 45\%$, conviene vedere, altrimenti conviene ritirarsi. L'efficacia della strategia, come evidente, dipende soprattutto da quanto il giocatore è bravo a valutare la sua probabilità di vittoria sulla base delle informazioni che ha.

In un caso più complicato, con più giocatori ancora in gioco e con più possibilità da analizzare (ad esempio perché non siamo costretti ad andare all-in e quindi vanno considerate svariate possibilità di rilancio), le cose si fanno più complicate.

Nel caso di un cash game, in cui si puntano soldi veri, l'analisi finisce qui. Ma nel caso di un torneo, non siamo in realtà interessati a massimizzare le nostre chips, ma a massimizzare il premio vinto a fine torneo. Dobbiamo quindi stabilire – una volta noti i premi per i vari piazzamenti dei giocatori – una corrispondenza tra chips possedute dai giocatori e speranza di vincita (in denaro) dei giocatori. Serve quindi associare ad ogni distribuzione delle chips tra i giocatori le probabilità di ogni piazzamento per i singoli giocatori.

Il modello di solito utilizzato per calcolare tali probabilità si chiama ICM (*independent chip model*). Tale modello assegna ad ogni giocatore una probabilità di arrivare primo proporzionale al numero di chips che il giocatore ha. Calcolare le probabilità per le altre posizioni è più complesso e si basa sulla probabilità condizionata.

Proviamo a fare i conti con il modello ICM nel caso di un torneo con premi da 50€, 30€ e 20€ per i primi tre giocatori. Siamo nella situazione dell'esempio precedente, con due giocatori restanti nella mano, entrambi con 4500 chips. Sul piatto ci sono 1000 chips. Il primo giocatore, A, va *all-in*, ovvero punta tutte le sue 4500 chips. Cosa deve fare il secondo giocatore, B?

Per poter rispondere dobbiamo avere le informazioni anche sugli altri giocatori che – sebbene si siano ritirati dalla mano – hanno ancora chips. Supponiamo ce ne siano due, C e D, rispettivamente con 500 e 4500 chips.

FOLD: il secondo giocatore si ritira, e quindi i quattro giocatori hanno di fronte a loro rispettivamente 5500, 4500, 500 e 4500 chips. In questa situazione ([25]) B ha circa il 30% di probabilità di arrivare primo, il 31% di arrivare secondo, il 32% di arrivare terzo e il 6% di arrivare quarto e non vincere nulla. Ciò corrisponde a una speranza di vincita $\mathbb{E}(\text{FOLD}) = 30,87$€.

CALL: con probabilità $1 - p$ il secondo giocatore perde la mano, resta senza chips e arriva quarto senza vincere nulla. Con probabilità p vince la mano, e quindi i quattro giocatori hanno di fronte a loro rispettivamente 0, 10000, 500 e 4500 chips. In questa situazione B ha circa il 67% di probabilità di arrivare primo, il 31% di arrivare secondo e il 2% di arrivare terzo. Ciò corrisponde a una speranza di vincita $\mathbb{E}(\text{CALL}) = 43,09 \cdot p$ €.

Se la speranza di vincita per il CALL è maggiore di quella per il FOLD, ovvero se $p > 71,6\%$, conviene vedere, altrimenti ritirarsi.

La situazione è enormemente diversa da prima: affinché andare a vedere sia conveniente in termini di chips, basta avere una probabilità maggiore del 45% di vincere la mano, ma perché lo sia in termini di premio vinto serve una probabilità di vincita molto più alta, superiore al $71,6\%$.

([24]) Questa è indubbiamente la parte più difficile nel gioco del poker, e la capacità di stimare correttamente tale probabilità a seconda delle situazioni è ciò che maggiormente distingue i bravi giocatori dai dilettanti. Tale valutazione si basa anche sulla branca della matematica detta teoria dei giochi.

([25]) Tutte le probabilità che seguono sono state calcolate con un piccolo programmino su un foglio di calcolo. Non scendiamo nei dettagli sul come siano calcolate.

Questo è dovuto al fatto che nel corso della partita le chips non hanno sempre lo stesso valore. Nella situazione precedente, il giocatore C è molto svantaggiato rispetto agli altri 3, e con un'alta probabilità arriverà quarto senza vincere premi. Ma se due degli altri giocatori vanno all-in uno contro l'altro, C si è assicurato al minimo un terzo posto e quindi 20€ di premio. Questi soldi certamente vinti da C vengono persi dagli altri giocatori.

Le due analisi portano a risultati molto diversi fra loro – e probabilmente portano a conclusioni diverse sulla strategia da tenere –, e fanno sì che il cash poker e il poker modalità torneo siano completamente diversi tra loro.

8.1. **Vincere al Poker Texas Hold'Em**. Di tutti i giochi d'azzardo che abbiamo trattato finora sicuramente il Poker Texas Hold'Em è quello dove c'è più spazio per la strategia di gioco e pertanto c'è maggiore margine di guadagno.

Ciò nonostante resta un gioco d'azzardo ed è quindi soggetto al caso. Una buona strategia porta semplicemente a migliorare il valore atteso di vincita. Se tutti i giocatori sono di pari abilità, e quindi le partite a poker sono casuali come il lancio di una moneta, la speranza di vincita dipende semplicemente da quanto il banco decide di trattenere per sé, come nel caso delle lotterie a totalizzatore, ed è solitamente sul -10%.

Se un giocatore è molto più bravo degli altri, può aumentare la propria speranza di vincita fino a portarla anche a $+80\%$. Ciò nonostante, per sfruttare la propria speranza di vincita positiva, bisogna giocare molto (ovvero sfruttare la legge dei grandi numeri): su un piccolo numero di partite può succedere di tutto anche se siamo molto bravi.

In particolare può accadere anche una lunga serie di tornei in cui non si vince nulla, ovvero si è in netta perdita: possono facilmente capitare anche 80-100 tornei consecutivi senza vincere nulla. Non volendo andare in bancarotta (e quindi smettere di giocare) prima di riuscire a sfruttare – tramite la legge dei grandi numeri – la propria abilità, ovvero la speranza di vincita positiva, serve avere un capitale molto grande rispetto al costo di partecipazione di un torneo.

Per stare tranquilli, servirebbe avere un capitale che si è disposti ad investire di circa 500-1000 volte superiore al costo di ingresso dei tornei a cui si partecipa.

Un altro problema è dato dal fatto che difficilmente un giocatore umano riesce a superare lunghi periodi negativi (o anche lunghi periodi positivi) senza avere dei contraccolpi morali (demoralizzarsi o viceversa credersi imbattibile) che possono influenzare fortemente (di solito negativamente) la qualità del gioco e quindi la speranza di vincita.

I giocatori professionisti di Poker Texas Hold'Em, nella versione torneo o nella versione cash, giocano un elevatissimo numero di tornei o di mani per poter sfruttare al meglio il loro vantaggio in termini di speranza matematica di vincita. Possono giocare fino a 600 mani di poker all'ora, per 1600 ore all'anno. Senza contare che per mantenere il proprio livello di bravura e comprensione del gioco non bisogna solo giocare (e molto), ma anche studiare e rivedere le scelte compiute in alcune mani, e a questa attività dedicano ancora più tempo. è abbastanza comune che i giocatori di poker dedichino 10-12 ore al giorno al poker, sabati e domeniche comprese. Riescono a guadagnare 1.500, 2.000 e in alcuni rari casi anche 3.000 euro al mese. Ma a prezzo di un enorme e snervante lavoro. Con le loro notevoli e non comuni capacità ([26]) molti di loro possono riciclarsi nel mondo della finanza o dell'industria arrivando a guadagnare il doppio di quanto facevano con il Poker, lavorando di meno.

9. – I metodi infallibili per vincere al gioco

Vincere al gioco d'azzardo non è impossibile, e ci sono essenzialmente due modi per farlo.

Il primo è giocare molto poco e avere una fortuna sfacciata. Giocare poco può essere divertente: una serata al bingo con gli amici, o giocare una schedina puntando sulla vittoria della propria squadra del cuore una volta ogni tanto, è un divertimento come un altro. Giocare troppo in maniera compulsiva sperando di vincere è quasi certamente la strada per la rovina.

([26]) Profonde conoscenze matematiche, specialmente in teoria dei giochi e probabiltà, ma non solo, nonché grande capacità di analisi di situazioni complicate in tempi ridottissimi.

Il secondo – come dimostrato dai numerosi esempi che concludono le varie sezioni – è quello di avere una grandissima competenza matematica, una grande voglia di sfruttarla per comprendere al meglio i meccanismi e i possibili difetti dei giochi e una grande costanza e dedizione, molto tempo, denaro e duro lavoro.

Però se uno possiede tutte queste caratteristiche (cosa a dir poco non comune), sicuramente le può sfruttare meglio in un altro campo (ad esempio il mercato finanziario, non molto diverso dal gioco d'azzardo) per guadagnare ancora di più.

Ovviamente tutto questo senza citare il grande dilemma etico: i giochi d'azzardo portano un guadagno al banco, quindi il bilancio totale dei giocatori è in negativo. Se guadagni, stai facendo i tuoi soldi alle spalle di altri giocatori, magari malati di gioco con gravi problemi di povertà, ignoranza e indigenza alle spalle.

Ovvero, in un gioco d'azzardo ci sono quelli che perdono e si disperano e quelli che sfruttano la disperazione degli altri: se nessuno dei due ruoli ti piace, non giocare!

10. – Il problema del gioco interrotto

Come promesso, diamo ora una soluzione al problema del gioco interrotto.

Esercizio 2.1 — Sofia e Federico giocano 10 euro al seguente gioco: tirano una moneta più volte, se escono 10 teste prima di 10 croci, vince Sofia, se escono prima 10 croci, vince Federico. Dopo 10 lanci sono uscite 7 teste e 3 croci e il gioco viene interrotto. Come vanno suddivisi i 10 euro tra i due giocatori?

Mi è capitato più volte di porre questo problema a varie platee di studenti. Quasi sempre la platea si spaccava in due fazioni: una sosteneva che, siccome il gioco non era terminato, i dieci euro andassero divisi equamente tra Federico e Sofia, ovvero 5 a testa; un'altra che siccome erano uscite 7 teste e 3 croci, a Sofia spettavano 7 euro e 3 a Federico. Voi per quale versione propendete? O ne avete in mente un'altra?

Per rispondere, dobbiamo porci il problema di che cosa sia equo. Diciamo che è equo assegnare a Sofia l'ammontare che al massimo Alessandra sarebbe disposta a pagare a Sofia per subentrare al suo posto nel gioco ([27]). Ma quanto sarebbe disposta a pagare al massimo? Immaginiamo di giocare tantissime partite partendo da questa situazione: a volte vincerà Sofia, altre Federico. Se dividiamo la somma vinta da Sofia per il numero di partite giocate otteniamo quanto Sofia vince mediamente partendo da tale situazione. Alessandra ovviamente sarà al massimo disposta a pagare tale cifra, non di più. Bene, per la legge dei grandi numeri, tale somma mediamente vinta da Sofia sarà approssimativamente la speranza matematica di vincita di Sofia. Quindi la cosa equa da fare è assegnare ad ognuno dei due giocatori la speranza di vincita che ha nel momento in cui il gioco viene interrotto.

Per calcolare le speranze di vincita occorre calcolare le probabilità di vincita dei due. Ovviamente un metodo di calcolo di tale probabilità può essere quello di scrivere tutto l'albero delle possibilità – o farlo fare a un foglio di calcolo – ma, come abbiamo visto nella sezione dedicata al Black Jack, questo può essere molto lungo e complesso.

Il problema principale del gioco che stanno facendo Sofia e Federico è che non si sa quando terminerà: potrebbe capitare tra soli 3 lanci di moneta (se escono 3 teste) o anche tra 9 (se dopo altri 8 lanci sono uscite 9 teste e 9 croci).

Per agevolare i calcoli, la cosa migliore è trasformare il gioco in un altro, ad esso equivalente, osservando che dopo 19 lanci di moneta esattamente una tra testa e croce sarà uscita almeno 10 volte. Pertanto quella che è uscita almeno 10 volte dopo 19 lanci è anche quella che è uscita la decima volta per prima:

Esercizio 10.1 — Sofia e Federico giocano 10 euro al seguente gioco: tirano una moneta 19 volte, se escono più teste, vince Sofia, se escono più croci, vince Federico. Dopo 10 lanci sono uscite 7 teste e 3 croci e il gioco viene interrotto. Come vanno suddivisi i 10 euro tra i due giocatori?

Il vantaggio è che ora, dopo l'interruzione del gioco, resta da lanciare 9 volte la moneta: se escono 3 o più teste vince Sofia, se escono 2 o meno teste, vince Federico.

([27]) Questo è esattamente il metodo con cui vengono prezzati i vari derivati sul mercato finanziario.

I casi totali sono $2^9 = 512$ e i casi favorevoli a Federico

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{1} + \binom{9}{0} \;=\; 36 + 9 + 1 \;=\; 46\,.$$

Pertanto Federico e Sofia vincono rispettivamente con probabilità

$$P(F) = \frac{46}{512} \simeq 8,98\% \ ,$$

$$P(S) = 1 - P(F) = \frac{466}{512} \simeq 91,02\%$$

Pertanto al momento le loro speranze di vincita sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F) &= 10€ \cdot P(F) \simeq 0,90€; \\ \mathbb{E}(S) &= 10€ \cdot P(S) \simeq 9,10€, \end{aligned}$$

e così andrebbero suddivisi i 10 euro in gioco.

Ringraziamenti

Se questo articolo è scorrevole, ricco di informazioni e senza errori di matematica, buona parte del merito è di Sergio Benvenuti, Paolo Canova, Alessandra D'Alessandro, Francesco Morandin, Diego Rizzuto, Elia Santi e dei due referee anonimi.

Se nonostante il loro aiuto è rimasto di difficile lettura, noioso o con errori e imprecisioni, la colpa è tutta mia.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] CARL B. BOYER, *A history of mathematics* Revised reprint of the second edition. With a foreword by Isaac Asimov. Revised and with a preface by Uta C. Merzbach, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991. xx+715 pp.

[2] PAOLO CANOVA e DIEGO RIZZUTO, *Fate il nostro gioco. Gratta e vinci, azzardo e matematica*, Add Editore, 2016. 256 pp.

Nato a Torino nel 1979, si è laureato in matematica presso l'Università di Pisa e la Scuola Normale Superiore e perfezionato in matematica presso la Scuola Normale Superiore. Dopo periodi temporanei presso la Scuola Normale Superiore, l'Università di Roma Tor Vergata e quella di Milano Bicocca, dal 2009 è all'Università di Parma prima come Ricercatore e dal 2014 come Professore Associato in Geometria.
Autore di 2 libri e 15 pubblicazioni scientifiche, nella ricerca si occupa prevalentemente di analisi e geometria complessa e ipercomplessa.
Dal 2005 si occupa di divulgazione matematica e dal 2009 di giochi matematici. Dal gennaio 2017 è nel comitato editoriale di MaddMaths.

Scultura di Augustin Pajou (1730-1809). Museo del Louvre. Blaise Pascal (1623 -1662) mentre studia la cicloide; ai suoi piedi pagine sparse dei *Pensieri,* a destra il libro aperto delle *Lettere provinciali*.

Licenza: Pubblico dominio