
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCO CARDIN

Trasporto ottimo, sistemi viventi

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 2
(2017), n.3, p. 327–341.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_3_327_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_3_327_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Trasporto ottimo, sistemi viventi

FRANCO CARDIN

Università di Padova

E-mail: cardin@math.unipd.it

Sommario: *In questa rassegna si traccia un incontro con la teoria del trasporto ottimo, fornendo alcune notizie sulla sua nascita, sulla sua rinnovata riscoperta e conseguenti inattese nuove applicazioni. Si parlerà di trasporto ottimo per il sistema arterioso, della legge di Kleiber, delle radici degli alberi, e infine, della diffusione della muffa *Physarum Polycephalum* e delle sue caratteristiche geodetiche. Il filo conduttore delle sezioni, apparentemente scollegate, è in realtà sempre il problema di Monge-Kantorovich, a partire dalla sua lettura originale statica, passando per una lettura dinamica di tipo stazionario, fino ad una lettura dinamica di tipo non stazionario (nel caso delle muffe), tendente asintoticamente nel tempo a Monge-Kantorovich. L'esposizione che segue si accompagna ad un utilizzo di tecniche di tipo basilare. Scogli in teoria della misura e analisi funzionale sono solo accennati e ci si cimenta nel mantenere fruibile il racconto per più possibili lettori interessati o incuriositi.*

Abstract: *This review concerns the optimal transport theory, providing some news about its birth, its renewed rediscovery and the resulting unexpected new applications. We are talking about optimal transport for the arterial system, Kleiber's law, tree roots, and finally the diffusion of the *Physarum Polycephalum* mold and its geodetic features. The central thread of our tale is the problem of Monge-Kantorovich, starting from its original static formulation, passing through a stationary dynamic reading, up to a dynamic non stationary transient phase (in the case of molds), tending asymptotically in time to the stationary Monge-Kantorovich setting. The exposition is accompanied by the use of very basic techniques. Measure theory and functional analysis are merely mentioned and we try to keep the story as readable as possible to interested people.*

1. – Introduzione

La teoria del trasporto ottimo ha avuto solidi pionieri: Monge (1781), Ampère (1820), e poi Kantorovich (1940), fino ai contemporanei, che la coltivano ad altissimo livello: non si può poi dire di aver attraversato questo paesaggio matematico senza aver visitato il magnifico manua-



le⁽¹⁾ (1000 pagine) di Villani [50], le rassegne e i progressi in Evans e Gangbo [21, 22], Ambrosio [2], Buttazzo [14], Pratelli [3], Benamou e Brenier [8], Santambrogio [41, 42] e di altri. Mi scuso per non ricordarli tutti. Prima di entrare nel cuore di alcune applicazioni nei sistemi viventi, come promesso nel titolo, osserviamo da vicino il tema prototipo del trasporto ottimo, come Monge⁽²⁾ grosso modo l'introdusse.

⁽¹⁾ 'magnifico': Arnol'd usò questo bellissimo epiteto, parlando in [5] del libro di Meccanica di Landau e Lifshitz (che è invece molto sottile).

⁽²⁾ Alternativamente, nel citato manuale di Villani [50], si introduce l'idea euristica di ottimalità con *panetterie* e *café-bistrot*: "Ai nostri giorni c'è a Parigi una via dedicata a Monge,

Accettato: il 30 maggio 2017.

Pensiamo ad un ambiente con paesaggio collinare, limitato, il cui profilo sia descritto dalla funzione quota $z = \tilde{z}(x, y)$, ed in esso pensiamo ad un problema di sterro e di riporto del materiale terroso, sostanzialmente incompressibile, la cui densità ρ_0 sia intesa qui proporzionale alla quota del paesaggio: $\rho_0(x, y) \propto \tilde{z}(x, y)$. Si debba progettare un nuovo paesaggio ρ_1 , p.e. una modifica del preesistente ρ_0 per la costruzione di una strada. Il progetto (ambizioso) sia quello di utilizzare esattamente il materiale presente, pertanto varrà una conservazione del materiale terroso, come previsto dalla (1) nella sezione successiva. Il problema ora è l'economia di questo lavoro: la movimentazione costa, sia proporzionalmente alla distanza, sia in relazione alla quantità di materiale trasportato. L'idea vincente di Monge fu di introdurre una ragionevole misura di tale costo – si veda la (3), per $\beta = 1$ – e di porre il problema della sua minimizzazione. Insomma: ogni redistribuzione, ogni nuovo pensabile paesaggio, con il vincolo di conservazione della massa terrosa, avrà un suo costo: ci si ritrova dunque a studiare un principio variazionale vincolato. L'ingresso tecnico sarà quello storico dei moltiplicatori di Lagrange, ma altri nuovi problemi tecnici si affacceranno. Proveremo a raccontarli, in modo piano.

La matematica per tale problema ebbe serie difficoltà a svilupparsi, i tempi non erano maturi, benché la classe di problemi suscitati da Monge fosse di indubbio interesse teoretico e pratico. Dopo Ampère,

e vi si trova un ottimo panificio chiamato Le Boulanger de Monge. Per un suo giusto riconoscimento, e per illustrare come il problema di Monge può essere ricondizionato in una prospettiva economica, provo ad esprimere il problema nel modo seguente. Si consideri un gran numero di panetterie, produttrici di brioches, che dovrebbero essere consegnate ogni mattina nei café-bistrot dove gli avventori le consumeranno. La quantità di brioches che può essere prodotta da ogni panetteria, e la quantità consumata in ogni café-bistrot sono note in anticipo, e possono essere modellate come misure di probabilità (c'è una 'densità di produzione' e una 'densità di consumo') su un certo spazio, che nel nostro caso sarebbe Parigi (dotato della metrica naturale, per cui la distanza tra due punti è la lunghezza del percorso stradale più breve per unirli). Il problema in pratica è quello di trovare dove ogni brioche debba andar collocata, in modo tale da minimizzare il costo totale del trasporto. Quindi, il problema di Monge è in realtà la ricerca di un accoppiamento ottimale; e per essere più precisi, la ricerca di un accoppiamento ottimale deterministico".

sarà necessario attendere la rivoluzione matematica di Kantorovich [30], negli anni '40 del secolo scorso, per un sensibile avanzamento: come descritto nelle sezioni successive, fondamentale sarà la rilettura debole, rilassata, in uno spazio 'grafico' del problema originale – si veda (15) e quanto segue – proponente così una versione *lineare* dell'ottimizzazione vincolata, estremamente analoga a problemi già ben noti della *programmazione lineare* della ricerca operativa, riportati brevemente nella sezione 6.3.

Questa riproposizione alla Kantorovich del problema *statico* del trasporto ottimo di Monge è recentemente risultata decisiva per la costruzione della versione *continua* di una efficace teoria variazionale [7], operante nei *grafi*, proponente la distribuzione *stazionaria* ottimale dei metaboliti, secondo una ben opportuna (geodetica) rete arteriosa distributiva – che la stessa soluzione del problema variazionale costruisce – in un corpo vivente ideale a riposo, cioè in situazioni di cosiddetto metabolismo basale. L'efficacia di tale ricostruzione è confortata dalla deduzione nel suo ambito della famosa *legge fenomenologica di Kleiber* [32], stabilente che il metabolismo basale B nei mammiferi scala con il metabolita presente M secondo la legge di potenza: $B \propto M^{3/4}$. Questa teoria variazionale prevede sia la distribuzione del metabolita nel corpo, sia la struttura stessa della rete arteriosa. A questo punto è forte la pulsione a testare questa teoria in maniera *duale*, nella ricerca della struttura delle radici degli alberi. E sempre di trasporto ottimo minimizzante un opportuno costo si tratta nella sezione 4.3: ora la rete delle radici deve assorbire nutrimento, non più distribuirlo, e la matematica appare in forte similitudine con quella del precedente modello.

Si è notato in questi ultimi anni che esistono dei problemi dinamici di transiente, *non-stazionari*, legati ancora a forme viventi che evolvono, che raggiungono asintoticamente distribuzioni stazionarie tipiche del trasporto ottimale. Ancora una volta, è stato proprio lo studio e la ricerca di un modello continuo di una pre-esistente descrizione discreta (sempre nei grafi) dell'evoluzione della *Physarum Polycephalum*, detta anche *muffa del fango* [45, 46], ad innescare il riconoscimento del meccanismo asintotico del trasporto ottimo. Questo nuovo ambiente continuo non stazionario appare infine naturale anche per lo studio e la predizione dell'evoluzione, da un lato, delle radici degli alberi, dall'altro, delle reti

tipiche dei delta fluviali. A tal proposito, sono discussi anche graficamente nella sezione 5.1 delle promettenti ‘messe a punto’ di tale modello matematico, offrendo una previsione di discretizzazione a partire da una teoria continua.

2. – Principio Variazionale statico: Monge

Iniziamo riproponendo il problema ancestrale di Monge. Nel compatto connesso Ω in \mathbb{R}^D , un certo materiale vi si trova collocato, di densità volumetrica $\rho_0(x)$, $x \in \Omega$: ebbene, vogliamo ricollocare tale materiale in una nuova distribuzione $\rho_1(x)$, dovremmo pertanto ritenere soddisfatto il vincolo

$$(1) \quad \int_{\Omega} \rho_0 = \int_{\Omega} \rho_1,$$

e vorremmo compiere tale operazione in modo che un certo *costo* di questa movimentazione, operazione rappresentata da un diffeomorfismo

$$(2) \quad \Omega \ni x \mapsto y(x) \in \Omega,$$

sia *minimo*. Come accennato nell’Introduzione, una buona definizione del *costo* è data un funzionale reale della forma

$$(3) \quad y(\cdot) \mapsto \mathcal{C}[y(\cdot)] = \int_{x \in \Omega} \|y(x) - x\|^\beta \rho_0(x) dx,$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea in \mathbb{R}^D .

Fatto importante: dobbiamo richiedere la mini-

mizzazione del costo \mathcal{C} con il vincolo di *conservazione locale della massa*⁽³⁾ e questa è data dalla relazione:

$$(4) \quad \rho_0(x) = \det \frac{\partial y}{\partial x}(x) \rho_1(y(x))$$

che esprime molto più della conservazione della massa totale (1). Nel caso di sufficiente regolarità (C^1) della mappa cercata $y(\cdot)$, per ogni misurabile $\Delta\Omega \subseteq \Omega$, la (4) rappresenta

$$(5) \quad \int_{x \in \Delta\Omega} \rho_0(x) dx = \int_{y \in y(\Delta\Omega)} \rho_1(y) dy.$$

Equivalentemente alla minimizzazione di (3) con il vincolo (4), la teoria dei moltiplicatori di Lagrange ci propone il seguente funzionale (non-vincolato):

$$(6) \quad (y(\cdot), \lambda(\cdot)) \mapsto \int_{x \in \Omega} \left[\|y(x) - x\| \rho_0(x) + \lambda(x) \left(\det \frac{\partial y}{\partial x}(x) \rho_1(y(x)) - \rho_0(x) \right) \right] dx.$$

Scriviamo e commentiamo le equazioni di Euler-Lagrange associate a tale principio variazionale. La funzione di Lagrange in (6) è

$$(7) \quad \mathbf{L}(x, y, \nabla_x y, \lambda) = \|y(x) - x\| \rho_0(x) + \lambda(x) \left(\det \frac{\partial y}{\partial x}(x) \rho_1(y(x)) - \rho_0(x) \right).$$

Prima di procedere, richiamiamo alcune proprietà algebrico-differenziali degli Jacobiani.

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{Li} \quad : \quad \text{complemento algebrico di } \frac{\partial y_L}{\partial x_i} (= y_{L,i}), \\ \det \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \delta_{ij} = \sum_L \mathcal{A}_{Li} \frac{\partial y_L}{\partial x_j}, \quad \det \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \delta_{LM} = \sum_i \mathcal{A}_{Li} \frac{\partial y_M}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial \left(\det \frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial y_L}{\partial x_i}} = \mathcal{A}_{Li}, \\ \sum_i \frac{\partial \mathcal{A}_{Li}}{\partial x_i} = \sum_i \mathcal{A}_{L,i,i} = 0 \quad (\text{Identità di Piola}). \end{array} \right.$$

Nel seguito ometteremo la sommatoria nelle coppie di indici uguali. Le equazioni di seguito giustapposte una sotto l’altra sono da ritenersi equivalenti, utilizzano le (8), e sono ausiliarie alla com-

⁽³⁾ Nel contesto della meccanica dei continui, dove la (4) rappresenta l’equazione di continuità per una deformazione $y(x)$, le variabili x sono assimilabili a variabili ‘materiali’ mentre le y a variabili ‘spaziali’.

preensione dell'esplicitazione delle equazioni di Lagrange.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \frac{\partial y_L}{\partial x_i}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y_L},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \mathcal{A}_{Li} \rho_1) = \rho_0 \frac{y_L(x) - x_L}{\|y(x) - x\|} + \lambda \det \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \rho_1}{\partial y_L},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \mathcal{A}_{Li} \rho_1 = \rho_0 \frac{y_L(x) - x_L}{\|y(x) - x\|}.$$

Definiamo $u(y)$,

$$(9) \quad u(y(x)) := \lambda(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_K} y_{K,i} \mathcal{A}_{Li} \rho_1 = \rho_0 \frac{y_L(x) - x_L}{\|y(x) - x\|}.$$

Usando la (8)₂,

$$\frac{\partial u}{\partial y_L} \det \frac{\partial y}{\partial x} \rho_1 = \rho_0 \frac{y_L(x) - x_L}{\|y(x) - x\|},$$

e mediante la (4),

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial y_L} = \frac{y_L(x) - x_L}{\|y(x) - x\|}.$$

Conseguentemente, lo scalare u soddisfa la seguente equazione di Hamilton-Jacobi di tipo *iconale*⁽⁴⁾:

$$(11) \quad \|\nabla_y u(y)\| = 1.$$

Considerando invece l'esponente $\beta = 2$ nella (3), più precisamente se inseriamo $\frac{1}{2} \|y(x) - x\|^2$ invece di $\|y(x) - x\|$, un calcolo analogo a quello sopra proposto mostra che il diffeomorfismo $x(y)$ dev'essere addirittura di tipo 'gradiente';

$$(12) \quad x(y) = \nabla_y \left(\frac{1}{2} \|y\|^2 - u(y) \right),$$

e dato che l'inverso di un diffeomorfismo gradiente è gradiente (è la teoria della trasformata di Legendre), tale è il diffeomorfismo cercato: $y(x) = \nabla_x S(x)$; riprendendo infine la (4), si ottiene la ben nota equazione di *Monge-Ampère*:

$$(13) \quad \rho_0(x) = [\det \nabla_x^2 S(x)] \rho_1(\nabla_x S(x)).$$

⁽⁴⁾ La genesi dei termini 'iconale' ed 'equazione iconale' è da ricercarsi nell'ottica geometrica, si veda p.e. nei manuali classici [11, 33].

La convessità introdotta offre un quadro analitico meno spigoloso rispetto al caso $\beta = 1$: Brenier [13] prova l'esistenza e unicità per $y(\cdot)$ in $\Omega = \mathbb{R}^n$ ed in seguito McCann [35] su varietà. Comunque, il quadro euclideo è completamente risolto solo attorno al 2000 in [3, 22, 16, 47], benché le premesse complete per il raggiungimento di tale risultato fossero ben presenti fin dal 1976 nel lavoro di Sudakov [44]: tutto ciò è ben spiegato, ed esteso, in [17].

3. – La versione *rilassata* di Kantorovich del trasporto ottimo

In anni recenti il matematico russo Leonid Vital'evich Kantorovich – nella foto giovanile qui a lato – appare quale protagonista di un corposo romanzo storico sulla programmazione economica sovietica [43]; in realtà, Kantorovich (1912-1986) introdusse per primo la teoria della



Programmazione Lineare [29] – in seguito sviluppata da George Dantzig e John von Neumann – ed elaborò da queste idee in maniera radicalmente nuova la teoria del Trasporto Ottimo e ricevette il premio Nobel per l'Economia nel 1975.

Questo notevole personaggio della matematica, di cui va almeno letto l'articolo commemorativo di Vershik [49], attraversa il nostro racconto perché nel 1942 compì un atto di grazia matematica (che utilizzeremo nella prossima sezione) introducendo una versione 'rilassata' [30] del principio variazionale di Monge, proprio ispirata dalla programmazione lineare, qui esposta brevemente nella Sezione 6.3. Precisamente, invece di investigare, come proposto in (3) e (4), intorno all'esistenza di un diffeomorfismo $y(\cdot)$ di Ω in sé minimizzante il seguente funzionale vincolato⁽⁵⁾ $\{\dots\}$:

$$(14) \quad \inf_{y(\cdot)} \left\{ \int_{\Omega} c(x, y(x)) \rho_0(x) dx, \quad y_{\#} \rho_0 = \rho_1 \right\},$$

⁽⁵⁾ Si intende qui $c(x, y) = \|y - x\|^\beta$ e con $y_{\#}$ il push-forward di densità di misure associato a $y(\cdot)$.

Kantorovich propose di ricercare misure γ nello 'spazio grafico' $\Omega \times \Omega$, minimizzanti il seguente nuovo funzionale vincolato ⁽⁶⁾ $\{ \dots \}$:

$$(15) \inf_{\gamma(\cdot, \cdot)} \left\{ \int_{\Omega \times \Omega} c(x, y) \gamma(x, y) dx dy, \pi_{\#}^{(x)} \gamma = \rho_0, \pi_{\#}^{(y)} \gamma = \rho_1, \right.$$

dove $(x, y) \mapsto \pi^{(x)}(x, y) = x$ e $(x, y) \mapsto \pi^{(y)}(x, y) = y$. Misure γ sottoposte a quel vincolo banalmente esistono, p.e. $\gamma = \rho_0 \otimes \rho_1$, e se $y(\cdot)$ è diffeomorfismo ottimale allora $\gamma = (Id \times y)_{\#} \rho_0$ risolve il problema rilassato; come ben posto in evidenza in [3], tale misura è concentrata sul grafico di $y(\cdot)$ in $\Omega \times \Omega$; viceversa, da una γ ottimale per il problema rilassato concentrata su un grafico si deduce una $y(\cdot)$ ottimale per il problema originale. Con tale formulazione si cattura un teorema di esistenza se p.e. Ω è uno spazio polacco ⁽⁷⁾ e $c(x, y)$ è semicontinua inferiormente.

Si nota che il problema variazionale originale è ora diventato lineare in γ , come emerge esattamente nel problema finito-dimensionale della programmazione lineare in (49)₁, e i vincoli, anch'essi, sono nella correlata forma (49)₂: per Kantorovich l'estensione all'analogo continuo del problema duale (51) diventa pertanto della forma

$$(16) \sup_{\varphi_0(\cdot), \varphi_1(\cdot)} \left\{ \int_{\Omega \times \Omega} (\varphi_0(x) \rho_0(x) + \varphi_1(y) \rho_1(y)) dx dy, \varphi_0(x) + \varphi_1(y) \leq c(x, y) \right\}.$$

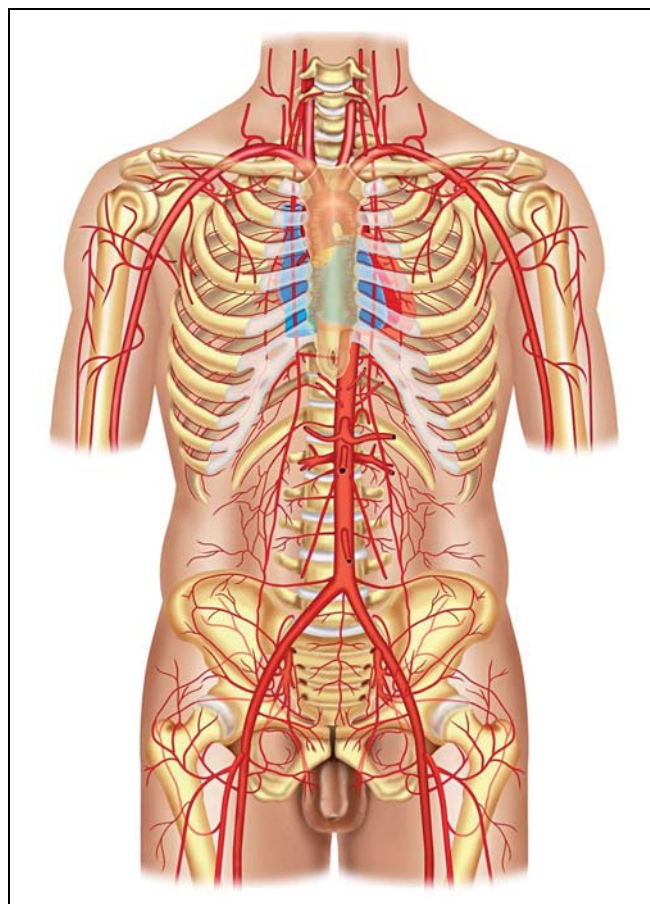
Questa rilettura duale appare subito tecnicamente virtuosa, tutto questo è ben descritto nei lavori citati. È rimarchevole il fatto che in [31] Kantorovich affermò che si rese conto, solo allora (nel 1948), che il suo lavoro avesse generalizzato l'impianto di Monge, che non conosceva nel 1942. Oltre alle importanti applicazioni elencate in [50], sono rimarchevoli quelle in [48] e l'elegante ed efficace ricostruzione dell'universo primordiale offerta in [27]. Per noi, qui nel seguito, sarà decisivo considerarne di Kantorovich la versione continua rilassata (15), e non entreremo nella versione continua duale del problema.

⁽⁶⁾ Le quantità $\pi_{\#}^{(x)} \gamma$ e $\pi_{\#}^{(y)} \gamma$ sono dette 'densità marginali'.

⁽⁷⁾ Uno spazio topologico (X, τ) si dice polacco se è separabile e completamente metrizzabile.

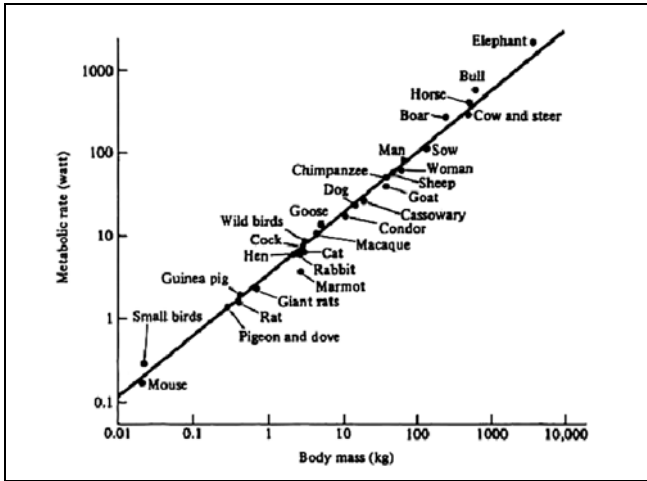
4. – Principio Variazionale stazionario: da Monge-Kantorovich a Banavar-Maritan-Rinaldo

Il muscolo cardiaco dei mammiferi pulsa con continuità liquido ematico trasportante nutrimento/metabolita attraverso una rete arteriosa, che si congettura sia variazionalmente disegnata, verso localizzazioni corporee che richiedono, con intensità diverse, opportune quantità di alimento. Se riteniamo nota la densità di consumo locale, punto per punto, e per unità di tempo, detta metabolismo basale, come si sviluppa la rete distributiva arteriosa? Che forma assume un ragionevole principio variazionale, cosa ottimizzare?



Una robusta base empirica di questo problema fondamentale fu con grande cura messa a punto negli anni '30 da Max Kleiber ⁽⁸⁾ [32], il quale osservò

⁽⁸⁾ Chimico, agronomo e biologo svizzero, 1893-1976.



che il metabolismo basale dei mammiferi (ma non solo), indipendentemente dalla loro taglia – dal topo all’elefante – scala con la potenza $3/4$ della massa del metabolita presente e quindi della massa totale del mammifero.

Tale sorprendente ‘legge di potenza’ è stata ripresa da vari studiosi; tra questi, un prolifico team⁽⁹⁾ composto da esperti internazionali di reti (networks, nelle più disparate accezioni, si veda [40]), due fisici e un ingegnere: Jayanth R. Banavar, Amos Maritan e Andrea Rinaldo. La loro giustificazione [7] della legge di Kleiber poggia su un principio variazionale su grafi, chiamato principio di ‘minima dissipazione’, sul quale si ritornerà tra breve, nell’Osservazione. Qui estenderemo al continuo quel principio, più precisamente, nostro scopo sarà di ritrovarlo da una naturale interpretazione del trasporto ottimo di Monge-Kantorovich, naturale teoria continua.

Lo scenario che vogliamo ora studiare non è più *statico*, non abbiamo da compiere un’unica manovra di spostamento ottimale, ora è dinamico, benché *stazionario*. Sia Ω un corpo vivente, a riposo, e i nostri ingredienti primari siano le seguenti densità per unità di volume e tempo, indipendenti dal tempo,

$$(17) \quad \begin{aligned} f^+ &\geq 0 : \text{densità di produzione di metabolita,} \\ f^- &\geq 0 : \text{densità di consumo di metabolita.} \end{aligned}$$

Il corpo Ω sia isolato, pertanto

$$(18) \quad \int_{\Omega} f^+(x) dx = \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

⁽⁹⁾ Dalla cui collaborazione sono emerse le successive considerazioni su Kleiber: [18].

Da un punto di vista genuinamente fenomenologico ammetteremo di conoscere il metabolismo unitario $f^-(x)$ e conseguentemente la necessaria produzione $f^+(x)$.

La rete arteriosa sia data dall’insieme (dei sostegni) delle curve caratteristiche di un campo vettoriale stazionario, rappresentante la velocità $v(x)$ del metabolita, a priori incognita,

$$(19) \quad v: \Omega \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}^D.$$

Tali curve connettono il supporto di f^+ con il supporto di f^- . Ammetteremo quindi che in ogni punto $x \in \Omega$ transiti una

$$(20) \quad \text{densità volumetrica di metabolita } : \rho(x),$$

trasportata con la locale velocità $v(x)$. Nel linguaggio della meccanica dei continui, tale descrizione stazionaria in costruzione è di tipo spaziale-Euleriano.

Che legame ‘meccanico’ sussiste tra gli oggetti finora introdotti? Queste quantità saranno organizzate da una equazione di bilancio, cioè dall’equazione di continuità spaziale-Euleriana di tipo stazionario, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$:

$$(21) \quad \nabla \cdot (\rho v) = f^+ - f^-.$$

A partire dal punto di vista della originale formulazione statica del *trasporto ottimo* e dei suoi ingredienti descrittivi possiamo arguire così: per ogni arbitrario intervallo di tempo di ampiezza T , la materia metabolica prodotta in quell’intervallo dalla sorgente, avente densità di produzione f^+ , deve essere ricollocata in modo da soddisfare nello stesso intervallo la richiesta di consumo avente densità f^- . Indichiamo con $\mathcal{S}(y, x)$ il *costo* (invece del precedente $c(y, x)$) del trasporto da y a x , costo che sarà indipendente da T per la stazionarietà del fenomeno che descriviamo. $\mathcal{S}(y, x)$ assume il significato di una sorta di lunghezza, possibilmente Riemanniana, da calibrare, in ogni caso generalizzante l’originale termine euclideo $c(y, x) = \|x - y\|$. Vanno messe in evidenza caratteristiche che ostruiscono una diretta generalizzazione del principio variazionale statico. Infatti:

(i) Considereremo la produzione f^+ di tipo atomico, concentrata nel ‘cuore’ $x_0 \in \Omega$ (ricordando il δ -Dirac : $\int_{\Omega} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0)$),

$$(22) \quad f^+(y) = \delta(y - x_0) \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

(ii) Appare ora coinvolto un certo numero di grandezze che rendono indeterminato il problema, f^+, f^-, S, ρ, v : è dunque necessaria l'introduzione di alcune ipotesi o leggi costitutive tra esse.

Diventa, per (i), completamente inattuale una ricerca di diffeomorfismi $y \mapsto x_T(y)$.

A tale difficoltà (i), che è invece una peculiarità di questo nuovo format, si risponderà muovendoci verso la versione rilassata di Kantorovich. Invece, per ovviare al problema (ii), faremo tesoro di quanto osservato nel caso statico; infatti, in entrambi i casi $\beta = 1, 2$, è emersa una 'struttura gradiente' del trasporto (si veda (10) e (11)), questo spinge verso una naturale ipotesi costitutiva di tipo Fick, si veda p.e. [36], p. 322: in altri termini, ammettiamo che la rete di distribuzione arteriosa sia coinvolgente un potenziale (incognito)

$$(23) \quad S(x) := S(x_0, x), \quad S(x_0) = 0,$$

e che esista una funzione (costitutiva) scalare $n(x)$, per cui:

$$(24) \quad v = \frac{\nabla S}{n^2}.$$

Il termine scalare $1/n^2$ (pensato anche come riparametrizzazione⁽¹⁰⁾) modula la locale velocità del fluido, denotando in modo costitutivo la locale 'asperità', intrecciata con il locale metabolismo⁽¹¹⁾, al transito del metabolita.

Mettiamo in atto quanto enunciato. Si introdurrà il nuovo principio di ottimalità tralasciando la generalizzazione stretta del funzionale (14), bensì ricondizionandoci al suo analogo formato rilassato alla Kantorovich (15). Con la seguente mutazione variazionale: *dalla* ricerca di un trasporto ottimo dato da un diffeomorfismo, siamo ora ricondotti *alla* ricerca della stessa funzione potenziale $S(x) = S(x_0, x)$, con-

corrente alla formazione del costo, assieme alla ricerca della densità del metabolita ρ . A partire dal funzionale rilassato con vincoli:

$$(25) \quad \int_{\Omega \times \Omega} S(y, x) \underbrace{f^+(y)f^-(x)}_{\gamma(y, x)} dy dx, \\ \nabla \cdot (\rho v) = f^+ - f^-, \quad \int_{\Omega} \rho dx = M,$$

il carattere atomico di f^+ conduce al seguente principio variazionale per S e ρ :

$$(26) \quad \inf_{S(\cdot), \rho(\cdot)} \left\{ \mathcal{F} = \int_{\Omega} f^-(x) S(x) dx, \right. \\ \left. \nabla \cdot \left(\rho \frac{\nabla S}{n^2} \right) = -f^-, \quad x \in \Omega \setminus \{x_0\}, \quad \int_{\Omega} \rho dx = M \right\}.$$

OSSERVAZIONE 4.1. – *Il Principio Variazionale (26) a cui si è giunti, in particolare il funzionale $\int_{\Omega} f^-(x) S(x) dx$, appare essere esattamente la versione continua, lo stretto analogo, del termine*

$$(27) \quad \sum_X F_X L_X$$

nel Principio Variazionale di 'minima dissipazione' [7] messo a punto in un ambiente discreto (teoria dei grafi) e più volte utilizzato con successo in varie direzioni in teoria delle reti, si veda p.e. [39]. Il ruolo di F_X e di L_X è giocato nell'attuale contesto rispettivamente da f^- and S . Infine, si può riconoscere che il funzionale (27) è una versione discreta della metrica di Kantorovich-Wasserstein⁽¹²⁾ W_1 .

L'applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange propone una complessiva densità Lagrangiana⁽¹³⁾ in cui sono introdotti due moltiplicatori: uno è un campo scalare $\lambda = \lambda(x)$ per il vincolo

⁽¹⁰⁾ La funzione scalare n assumerà un ruolo omologo all'indice di rifrazione dell'ottica geometrica, si veda la (34).

⁽¹¹⁾ Una solida esperienza numerica e naturalistica ha maturato in Mario Putti – specialmente pensando al problema 'duale' delle radici degli alberi – la condivisibile congettura che n sia monotona in f^- . Comunque, nel nostro impianto considereremo sia n che f^- funzioni in Ω assegnate senza ulteriori legami costitutivi tra loro.

⁽¹²⁾ La denominazione 'metrica di Kantorovich-Wasserstein' può sembrare rindondante, dato che spesso viene invece citata come 'metrica di Wasserstein': la ricostruzione storica di tale attribuzione si può ritrovare in [49].

⁽¹³⁾ Una cosiddetta 'augmented Lagrangian': data L e vincolo $\varphi = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = L + \lambda\varphi$.

puntuale (25)₂ e l'altro è una costante reale $\mu \in \mathbb{R}$ associata al vincolo isoperimetrico ⁽¹⁴⁾ (25)₃:

$$(28) \quad f^-(x)S(x) + \lambda(x) \left(\nabla \cdot \left(\rho(x) \frac{\nabla S(x)}{n^2(x)} \right) + f^-(x) \right) + \mu \left(\rho(x) - \frac{M}{\text{vol } \Omega} \right).$$

Tale funzione è in realtà un rappresentante di una classe di equivalenza ⁽¹⁵⁾ di Lagrangiane: infatti, ritenendo isolato il corpo Ω , ricercheremo per delle S e ρ tali che $\left(\rho \frac{\nabla S}{n^2} \right) \cdot N|_{\partial\Omega} = 0$. La 'riduzione per parti al bordo' porta a

$$(29) \quad \mathcal{L}(x, \rho, S, \nabla S, \lambda, \nabla \lambda; \mu) = f^-(x)S - \frac{\rho}{n^2(x)} \nabla \lambda \cdot \nabla S + \lambda f^-(x) + \mu \left(\rho - \frac{M}{\text{vol } \Omega} \right)$$

con correlate equazioni di Euler-Lagrange:

$$(30) \quad \begin{aligned} S &: \nabla \cdot \left(\rho \frac{\nabla \lambda}{n^2} \right) = -f^- \\ \lambda &: \nabla \cdot \left(\rho \frac{\nabla S}{n^2} \right) = -f^- \\ \rho &: \frac{1}{n^2} \nabla \lambda \cdot \nabla S = \mu \end{aligned}$$

$$\text{vincolo isoperimetrico} : \int_{\Omega} \rho dx = M.$$

Dalle (30)_{1,2} la scelta per λ sarà chiaramente

$$(31) \quad \lambda = S,$$

cosicché dalla (30)₃ otteniamo per $\mu \in \mathbb{R}$,

$$(32) \quad \frac{|\nabla S|^2}{n^2} = \mu.$$

Per arbitrarie scelte di μ , denotiamo con S_{μ} la soluzione $\frac{|\nabla S_{\mu}|^2}{n^2} = \mu$, osserviamo che $\frac{|\nabla S_{\mu}|^2}{\mu} = n^2 = |\nabla S_1|^2$ cosicché $S_{\mu} = \mu^{\frac{1}{2}} S_1$.

Inoltre, da (30)₂ vediamo che $\rho_{\mu} \nabla S_{\mu} = \rho_1 \nabla S_1$, pertanto

$$\mu^{\frac{1}{2}} \rho_{\mu} = \rho_1, \quad M_{\mu} = \int_{\Omega} \rho_{\mu} dx = \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}} \int_{\Omega} \rho_1 dx = \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}} M_1 = M,$$

e l'unica scelta compatibile è dunque

$$\mu = 1.$$

Mettiamo infine in luce il significato dell'integrale $\mathcal{F} = \int_{\Omega} f^-(x)S(x)dx$ lungo l'ottimalità:

$$(33) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_{\Omega} f^- S dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\rho \frac{\nabla S}{n^2} \right) S dx = \\ &= \int_{\Omega} \rho \frac{|\nabla S|^2}{n^2} dx = M. \end{aligned}$$

4.1. La rete geodetica. La soluzione $S(x)$ del principio variazionale è dunque soluzione dell'equazione stazionaria di Hamilton-Jacobi (32) di tipo iconale, strettamente generalizzante la (11):

$$(34) \quad |\nabla S|^2 = n^2,$$

questa è la lunghezza delle geodetiche della metrica Riemanniana

$$(35) \quad g_{ij}(x) = n^2(x) \delta_{ij}$$

uscenti da x_0 e connettenti ogni x in Ω , incanalando il metabolita. Le linee di flusso di v sono dunque geodetiche di tale metrica, si veda per i dettagli nei capitoli 2 e 5 di [38].

4.2. La legge di Kleiber. Consideriamo ora delle elementari valutazioni di similitudine e riscaldamento. Dato che S è una lunghezza, $\forall s > 0: \Omega \rightarrow s\Omega$, essa è riscalante nel seguente modo:

$$(36) \quad S_s(x) = s S\left(\frac{x}{s}\right).$$

Assumiamo inoltre, come appare universalmente accettato ⁽¹⁶⁾, che il metabolismo f^- non riscaldi:

$$(37) \quad f_s^-(x) = f^-\left(\frac{x}{s}\right).$$

⁽¹⁴⁾ Si veda p.e. la sez. 1 del cap. 2 di [28].

⁽¹⁵⁾ Cioè, a meno di 'Lagrangiane nulle', p.e. divergenza di campi vettoriali che hanno identicamente flusso nullo attraverso $\partial\Omega$.

⁽¹⁶⁾ Discende dalla cosiddetta legge di Driesch, o legge delle dimensioni cellulari costanti, secondo la quale in tutti gli organismi dello stesso phylum, cellule corrispondenti tra loro per forma, per funzione e per posizione nel corpo hanno dimensioni simili e dunque simile consumo d'esercizio.

La massa totale di metabolita $M = \int_{x \in \Omega} \rho dx$ è riscalante *sulla base di* (33),

$$M_s = \int_{x \in s\Omega} f^-\left(\frac{x}{s}\right) s S\left(\frac{x}{s}\right) dx,$$

$$M_s = s^{D+1} \int_{y \in \Omega} f^-(y) S(y) dy = s^{D+1} M_1$$

mentre per il metabolismo

$$B_s = \int_{x \in s\Omega} f^-\left(\frac{x}{s}\right) dx = s^D \int_{y \in \Omega} f^-(y) dy = s^D B_1,$$

eliminando s tra le due espressioni,

$$\frac{M_s^{\frac{1}{D+1}}}{M_1^{\frac{1}{D+1}}} = s = \frac{B_s^{\frac{1}{D}}}{B_1^{\frac{1}{D}}}, \quad \frac{M_s^{\frac{D}{D+1}}}{M_1^{\frac{D}{D+1}}} = \frac{B_s}{B_1},$$

$$(38) \quad B_s \propto M_s^{\frac{D}{D+1}},$$

guadagnando infine, per $D = 3$, la Legge di Kleiber:

$$(39) \quad B \propto M^{\frac{3}{4}} \quad (\text{Legge di Kleiber}).$$

4.3. Radici (prima parte). La teoria sviluppata possiede un'inaspettata nuova interpretazione, *duale* in un certo senso, descrivente il regime stazionario di alimentazione di un albero, o di un altro vegetale, tramite le sue radici opportunamente ramificate. Compriamo quindi le seguenti re-interpretazioni delle grandezze precedentemente introdotte e variazionalmente correlate tra loro:

Ω : regione del sottosuolo interessata dalla rete delle radici di un albero,

x_0 : base dell'albero,

f^+ : densità per volume e tempo di alimento/acqua entrante in x_0 ,

f^- : densità per volume e tempo di alimento/acqua nel terreno Ω ,

ρ : densità di alimento/acqua stazionariamente trasportato lungo le radici,

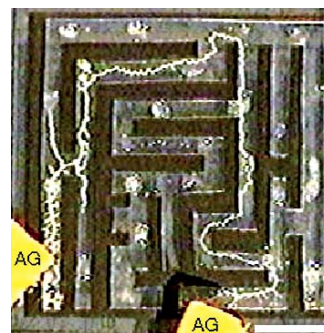
n : locale 'asperità' del terreno, coinvolgente f^- , vedi la nota (11).

Ci si convince che tale teoria propone pertanto una struttura ramificata geodetica delle radici. Ma come si sviluppano queste radici? qual è la loro crescita? come si arriva allo stato stazionario sopra descritto dal modello?

Preliminare a possibili risposte per queste questioni sarà la prossima teoria di crescita ed evoluzione della muffa del fango, detta, più precisamente, *Physarum Polycephalum*: si abbandonerà dunque momentaneamente il mondo e la matematica di Monge-Kantorovich, ritrovandolo alla fine, inaspettatamente, come il descrittore dello stato asintotico stazionario dell'evoluzione di tale microrganismo.

5. – *Physarum Polycephalum*: un modello non-stazionario

Recentemente, un team di matematici giapponesi, Tero, Kobayashi and Nakagaki [45], ha proposto un modello matematico per la dinamica e l'evoluzione della muffa (unicellulare) *Physarum Polycephalum*, detta muffa del fango, che sulla base di chiare evidenze sperimentali cresce e si propaga seguendo il percorso più efficiente tra sorgenti di cibo [37]. La figura mostra tale comportamento in un labirinto con due soli accessi sui quali è collocato del cibo: dalla colonizzazione dell'intero labirinto la muffa si ridistribuisce in maniera economica connettendo con il percorso più breve, geodetico, i due accessi (AG, in figura)[37].



Queste abilità della *P. Polycephalum* sono state utilizzate per l'analisi sperimentale di varie reti di trasporto. Alcuni ricercatori suggeriscono che questa muffa sia in grado di 'progettare' in maniera ottimale i collegamenti delle reti di trasporto, come si è constatato sperimentalmente per le ferrovie di Tokyo e della Spagna [46, 1].

Proponiamo nel seguito una estensione continua del modello discreto (su grafi) di [45]. Presentiamo inizialmente il modello originale. Dato un grafo non orientato $G = (E, V)$, con lunghezza degli archi (e : 'edge') positiva $\{L_e\}_{e \in E}$, il problema consiste nel determinare la 'funzione d'arco' D_e e la 'funzione di vertice' p_v soddisfacenti alle equazioni dinamiche (40) qui di seguito. La funzione f_v , esprime la

sorgente⁽¹⁷⁾ in $v \in V$, soddisfa l'equazione di compatibilità $\sum_{v \in V} f_v = 0$, e $\sigma(v)$ è la "star" del nodo v , cioè, l'insieme degli archi aventi il nodo v in comune. La scelta della funzione g nella (40c) è di tipo squisitamente fenomenologico. Inoltre, usando una classica analogia idraulica, la prima equazione (40a) impone il bilancio di massa del fluido descritto dal flusso Q_e costitutivamente assegnato dal prodotto di

$$(40a) \quad \sum_{e \in \sigma(v)} Q_e(t) = f_v \quad \text{per ogni } v \in V,$$

$$(40b) \quad Q_e(t) = D_e(t) \frac{(p_u(t) - p_v(t))}{L_e} \quad \text{per ogni } e = (u, v) \in E,$$

$$(40c) \quad \frac{\partial D_e}{\partial t}(t) = g(|Q_e(t)|) - D_e(t) \quad \text{per ogni } e = (u, v) \in E,$$

$$(40d) \quad D_e(0) = \hat{D}_e(0) > 0 \quad \text{per ogni } e = (u, v) \in E,$$

Nella successiva proposta teoria continua si opererà in prima misura con la scelta $g(x) = x$, quindi con $g(x) = x^2$ in (45), producendo una fenomenologia branching. Risultati numerici, nel caso di un modello con i termini sorgente concentrati nel primo ($v = 1$) e nell'ultimo vertice ($v = n$),

$$(41) \quad f_v = \begin{cases} +1 & v = 1 \\ -1 & v = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

mostrano che per $g(x) = x$ la conducibilità, asintoticamente nel tempo, tende a localizzarsi sugli archi costituenti la traiettoria più breve tra i due vertici estremi.

Questa abilità nella ricostruzione della geodetica minima è stata mostrata variazionalmente per modelli su grafi, molto più generali del precedente (41), da Bonifaci et coll. [10]: il loro importante risultato è stato anche pubblicizzato nella stampa italiana nazionale, nel 'Venerdì di Repubblica' del 24 febbraio 2012, [26]. Siamo giunti ora alla proposta dell'accennata generalizzazione continua di questo modello, che a differenza degli studi delle precedenti sezioni, prende in considerazione una situazione dinamica nuova: l'equazione (40c) infatti governa un transiente, se vogliamo, la formazione

un coefficiente di conducibilità (l'inverso di una resistenza) D_e , definito sugli archi del grafo G , moltiplicato per il gradiente discreto della funzione potenziale nodale p_v (40b). Il nucleo, la parte essenziale, del modello può essere identificato con (40c), che afferma che la conducibilità deve aumentare con l'intensità del flusso⁽¹⁸⁾, bilanciata da un termine di decadimento $-D_e$.

stessa del percorso della muffa, un setting definitivamente né *statico* né *stazionario*.



Questa generalizzazione [23] considera il seguente problema, definito su un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Data $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tale che $\int_{\Omega} f dx = 0$ e con la scelta $g(x) = x$, determinare le funzioni $(\mu, u) : [0, +\infty[\times \Omega \mapsto \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ soddisfacenti:

$$(42a) \quad -\nabla \cdot (\mu(t, x) \nabla u(t, x)) = f(x),$$

$$(42b) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x) = g(\mu(t, x) |\nabla u(t, x)|) - \mu(t, x),$$

$$(42c) \quad \mu(0, x) = \mu_0(x) > 0.$$

⁽¹⁷⁾ con segno.

⁽¹⁸⁾ matematicamente, significa che la funzione $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ deve essere non decrescente e con $g(0) = 0$.

Mentre l'equazione di continuità (42a) si propone come l'estensione continua del bilancio (40a), dalla struttura del sistema appare intuitivo dedurre che per $t \rightarrow \infty$, la (42b) diventi il vincolo che per μ strettamente maggiore di zero forzi la norma del gradiente di u ad essere unitaria. È stato il giovane matematico Enrico Facca ad osservare che se tale andamento asintotico si verificasse, allora (42) dovrebbe tendere, laddove $\mu > 0$, alla soluzione della *equivalente* formulazione del problema di *Monge-Kantorovich* (MK), come posto in evidenza con un'elaborata costruzione⁽¹⁹⁾ in [12, 19]: determinare (μ^*, u^*) soddisfacenti

$$(43a) \quad -\nabla \cdot (\mu^*(x)\nabla u^*(x)) = f^+(x) - f^-(x) (=f(x)),$$

$$(43b) \quad |\nabla u^*(x)| = 1 \quad \text{dove } \mu^*(x) > 0,$$

$$(43c) \quad |\nabla u^*(x)| < 1 \quad \text{dove } \mu^*(x) = 0.$$

Queste equazioni costituiscono la moderna rappresentazione PDE del classico problema del Trasporto Ottimo con costo $c(x, y) = |x - y|$. La congettura che i problemi (42) e (43) siano asintoticamente equivalenti (in qualche senso da specificare) è aperta. Molte evidenze numeriche – rappresentate in [24] – la corroborano e, ritenendo qui di seguito con $u = u(\mu)$ la soluzione (unica) di (42a), una promettente funzione di Lyapunov è stata individuata recentemente:

$$(44) \quad \mathcal{L}(\mu) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu |\nabla u|^2 dx$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(\mu) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu (1 + |\nabla u|)(1 - |\nabla u|)^2 dx$$

pertanto $\frac{d}{dt} \mathcal{L}(\mu) \leq 0$ e

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(\mu) = 0 \text{ se } |\nabla u(x)| = 1,$$

dove

$$\mu(x) > 0, \text{ altrimenti } \mu(x) = 0.$$

⁽¹⁹⁾ sulla quale in questa nota non entriamo nello specifico.

fatto questo fortemente in accordo con la congettura sopra menzionata di raggiungimento asintotico dello stato descritto in (43).

Infine⁽²⁰⁾, a patto di modificare la struttura costitutiva del sopra utilizzato flusso $Q = \mu|\nabla u|$ in $\bar{Q} = \mu|\nabla u|^2$, si riesce a riscrivere la dinamica (42b) in formato *gradiente*: $\mu_t = -\nabla_{\mu} \Phi(\mu)$, dove Φ è sostanzialmente individuato dalla stessa \mathcal{L} . Quest'ultimo fatto è cruciale: permette di utilizzare la tecnologia matematica alla Lyapunov per acquisire l'esistenza del flusso per ogni tempo $t \geq 0$.

5.1. Radici (seconda parte). Nella precedente sezione 4.3 una opportuna interpretazione 'duale' del trasporto ottimo stazionario ci offriva una descrizione modellistica ragionevole, comunque da sperimentare e verificare in campo, del meccanismo di prelievo e trasporto, lungo le radici, degli alimenti e dell'acqua, dal terreno al tronco di un albero. Ora, la presente teoria per il *Physarum Polycephalum* si può proporre come un modello di costruzione ed evoluzione della rete delle radici, in una situazione di transiente non stazionario. Nel lavoro [25] una insospettata nuova fenomenologia emerge da questa teoria – fortemente evocante il 'branching', studiato a fondo p.e. in [9, 41, 51] – offrendo così una più alta credibilità modellistica, proprio quando specifichiamo con una funzione non lineare $g(\mu|\nabla u|)$ il legame costitutivo per il flusso nella (42b). Se infatti consideriamo il trasferimento tra due assegnati, localmente uniformi, supporti rispettivamente per f^- e f^+ a forma di uguali rettangoli verticali appaiati (si vedano le figure), ebbene, al variare della potenza α in

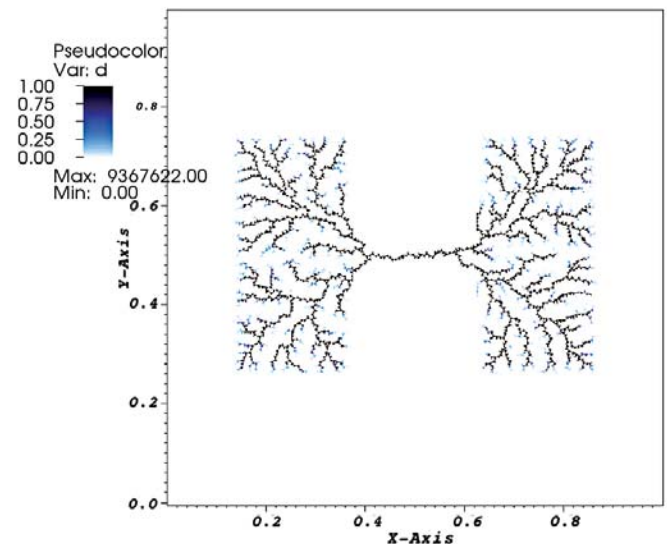
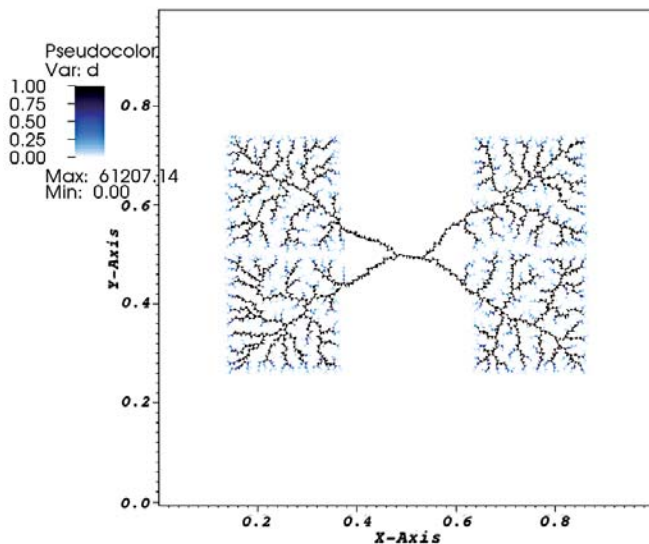
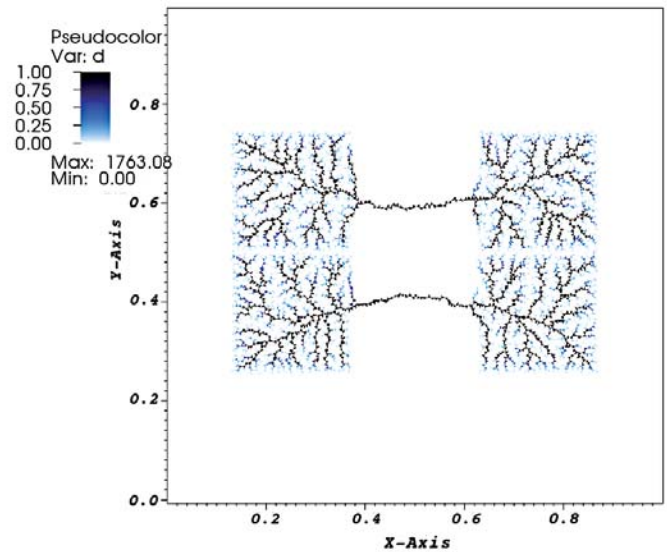
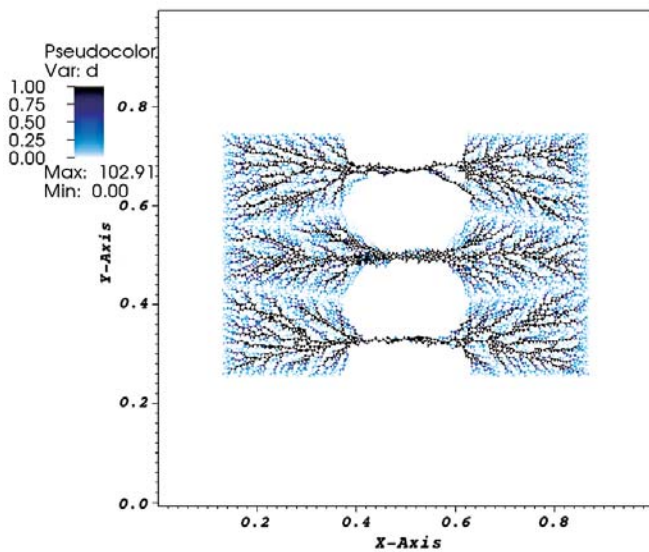
$$(45) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x) = g(\mu|\nabla u(t, x)|) - \mu(t, x) =$$

$$= (\mu|\nabla u(t, x)|)^{\alpha} - \mu(t, x),$$

per $\alpha = 1.1, 1.5, 2.0, 3.0$ rispettivamente, otteniamo mediante simulazione numerica le seguenti

⁽²⁰⁾ Grazie ad un suggerimento di Filippo Santambrogio (Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Parigi).

rappresentazioni asintotiche delle reti:



La conclusione finale è suggestiva: per questa strada ritroviamo una genesi di strutture discrete ramificate, a partire da un modello squisitamente continuo.

6. – Appendici

6.1. Identità di Piola. Sia $x : C^* \subset \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^D$ una deformazione, un diffeomorfismo di C^* sull'immagine $x(C^*)$. Sia $F^i_L(y) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_L} \right) (y)$ il gradiente di tale deformazione. Sia infine $\mathcal{D}(y) := \det F(y)$. Vale:

$$\left(\frac{F^i_L}{\mathcal{D}} \right)_{,i} = 0.$$

Tale identità la si ritrova in ‘utilizzo meccanico’ p.e. nel manuale [34].

Dall’analogo dell’Identità di Piola per l’inversa,

$$(\mathcal{D} y_{K,i})_{,K} = 0,$$

segue l’identità:

$$\mathcal{A}_{iK,K} = 0,$$

ma anche, per il complemento algebrico dell’inversa $y_{K,i}$, vedi le (8),

$$\mathcal{A}_{Ki,i} = 0.$$

6.2. Equazione di continuità stazionaria con produzione e consumo. Per ogni sottoinsieme misurabile $C \subset \Omega$ di punti coinvolti dal flusso $C \ni y \mapsto x(t, y) \in x(t, C) \subset \Omega$, pensati convenzional-

mente come punti iniziali del flusso al tempo $t = 0$, esprimiamo la derivata temporale della massa di metabolita in transito stazionario per $x(t, C)$:

$$(46) \quad \frac{d}{dt} \int_{x \in x(C,t)} \rho(x) dx = \int_{x \in x(C,t)} (f^+ - f^-)(x) dx.$$

Denotiamo $\mathcal{D}(t, y) = \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}(t, y)\right)$, il conto diretto mostra che per ogni misurabile C ,

$$(47) \quad \int_{y \in C} \left[\nabla \cdot (\rho(x)v(x)) - (f^+ - f^-)(x) \right] \Big|_{x=x(y,t)} \mathcal{D}(t, y) dy = 0$$

pertanto, sotto requisiti standard di regolarità, l'equazione (21) è ottenuta.

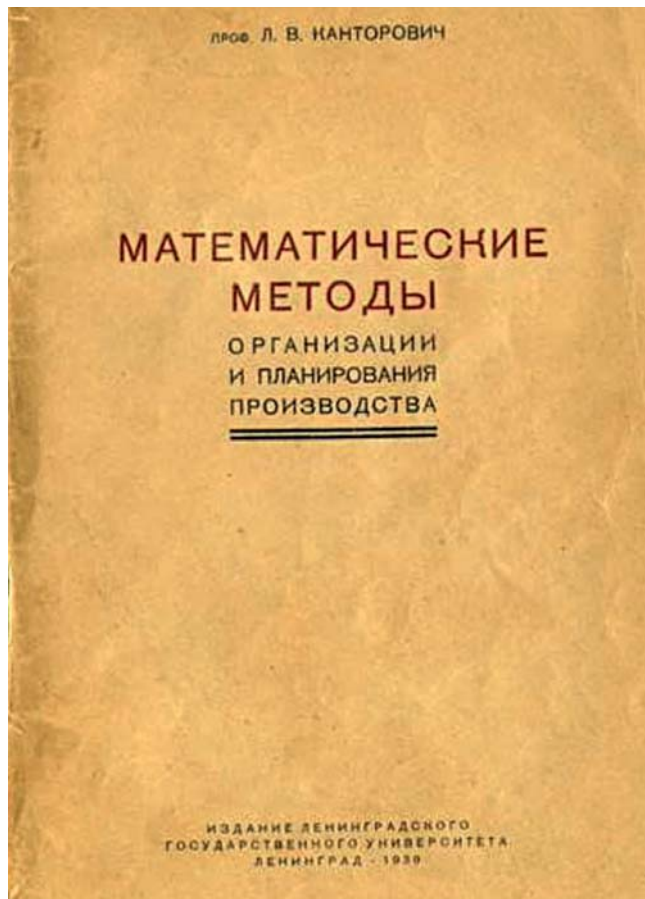
6.3. Una sinossi in Programmazione Lineare e dualità. ⁽²¹⁾ Ragioniamo muovendo dall'esempio di Cedric Villani in [50]: ci sono a Parigi \mathcal{N}_1 panettieri che forniscono \mathcal{N}_2 café-bistrot. Ogni α -panettiere produce b_α brioche, $\alpha = 1, \dots, \mathcal{N}_1$, mentre ogni L -café-bistrot ne vende b_L , $L = 1, \dots, \mathcal{N}_2$, ogni giorno. La ditta di trasporto sa che il costo unitario per trasportare una brioche dall' α -panettiere all' L -café-bistrot è esattamente: $c_{\alpha L}$. Si deve quindi studiare un piano di trasporto ottimo minimizzante la spesa complessiva. Indichiamo con $x_{\alpha L} \geq 0$ il numero di brioche trasportate dall' α -panettiere all' L -café-bistrot. La strategia, la scelta più opportuna delle $x_{\alpha L}$, dovrà tener conto di vincoli naturali, legati alla produzione e al consumo delle brioche. Questi vincoli

Infine, il principio variazionale diventa:

$$(49) \quad (\text{PL}) \begin{cases} \min(\sum_{\alpha L} c_{\alpha L} x_{\alpha L}) =: z^*, \\ \text{con i vincoli:} \\ x_{\alpha L} \geq 0, \quad \sum_{\alpha L} A_{\beta \alpha L} x_{\alpha L} = b_\beta, \quad \sum_{\alpha L} A_{M \alpha L} x_{\alpha L} = b_M. \end{cases}$$

Vedremo subito che esiste una strategia duale (PD) a (PL) che sposta la determinazione di z^* sulla ricerca di un piano, da concordare con panettieri e

⁽²¹⁾ Tale teoria, introdotta nel 1939 da Leonid Vital'evich Kantorovich, fu riscoperta dopo la Seconda Guerra Mondiale da George Bernard Dantzig che in tale ambito introdusse il ben noto metodo del Simplex.



sono squisitamente lineari, sono, nel caso che stiamo studiando: $\sum_\alpha x_{\alpha L} = b_L$ e $\sum_L x_{\alpha L} = b_\alpha$. Li riscriveremo questi vincoli, prudentemente pensando a generalizzazioni, nella seguente forma: esistono dei coefficienti $A_{\beta \alpha L}, A_{M \alpha L}$ per cui

$$(48) \quad \sum_{\alpha L} A_{\beta \alpha L} x_{\alpha L} = b_\beta, \quad \sum_{\alpha L} A_{M \alpha L} x_{\alpha L} = b_M.$$

café-bistrot, di prezzi (in realtà, fittizi) di acquisto e di vendita unitaria delle brioche. Infatti, per ogni coppia di stringhe $(y_\alpha, y_L) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_1} \times \mathbb{R}^{\mathcal{N}_2}$, $y_\alpha \geq 0, y_L \leq 0$, di prezzi unitari d'acquisto (costi positivi) e di vendita (costi negativi), per cui valga il vincolo:

$$(50) \quad \sum_\beta y_\beta A_{\beta \alpha L} + \sum_M y_M A_{M \alpha L} \leq c_{\alpha L},$$

si vede subito che, moltiplicando ambo i membri per $x_{\alpha L}$ (nulla cambia nella disuguaglianza, perché $x_{\alpha L} \geq 0$), sommando su α e L , e pensando che debbano le $x_{\alpha L}$ soddisfare anche ai vincoli (48),

si ottiene

$$\sum_{\beta \alpha L} y_{\beta} A_{\beta \alpha L} x_{\alpha L} + \sum_{M \alpha L} y_M A_{M \alpha L} x_{\alpha L} \leq \sum_{\alpha L} c_{\alpha L} x_{\alpha L},$$

$$\sum_{\beta} y_{\beta} b_{\beta} + \sum_M y_M b_M \leq \sum_{\alpha L} c_{\alpha L} x_{\alpha L}.$$

Ricapitolando: per ogni scelta di prezzi (y_{α}, y_L) con il vincolo (50), si ottiene un ‘lower-bound’ per z^* . Il miglior ‘lower-bound’ è dunque il

$$(51) \quad (PD) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \left(\sum_{\beta} y_{\beta} b_{\beta} + \sum_M y_M b_M \right) =: d^*, \\ \text{con i vincoli :} \\ \sum_{\beta} y_{\beta} A_{\beta \alpha L} + \sum_M y_M A_{M \alpha L} \leq c_{\alpha L}. \end{array} \right.$$

Il teorema centrale in questo contesto, abbastanza intuitivo, afferma che:

$$(52) \quad z^* = d^*.$$

Esso mostra che la politica di prezzi (y_{α}, y_L) che realizza (PD) è quella che copre esattamente le spese di trasporto, politica dunque di prezzi ‘fittizia’, cioè di guadagno nullo.

Desidero esprimere la mia gratitudine a tutti i colleghi collaboratori e amici, dai quali, discutendo, continuo ad apprendere conoscenze di matematica e natura: Giuseppe Buttazzo, Laura Caravenna, Giorgio Cassiani, Giuseppe De Marco, Luigi De Pascale, Enrico Facca, Peter Knabner, Amos Maritan, Michele Pavon, Aldo Pratelli, Mario Putti, Andrea Rinaldo, Filippo Santambrogio.

Sono infine debitore della grande generosità e pazienza dei referee.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

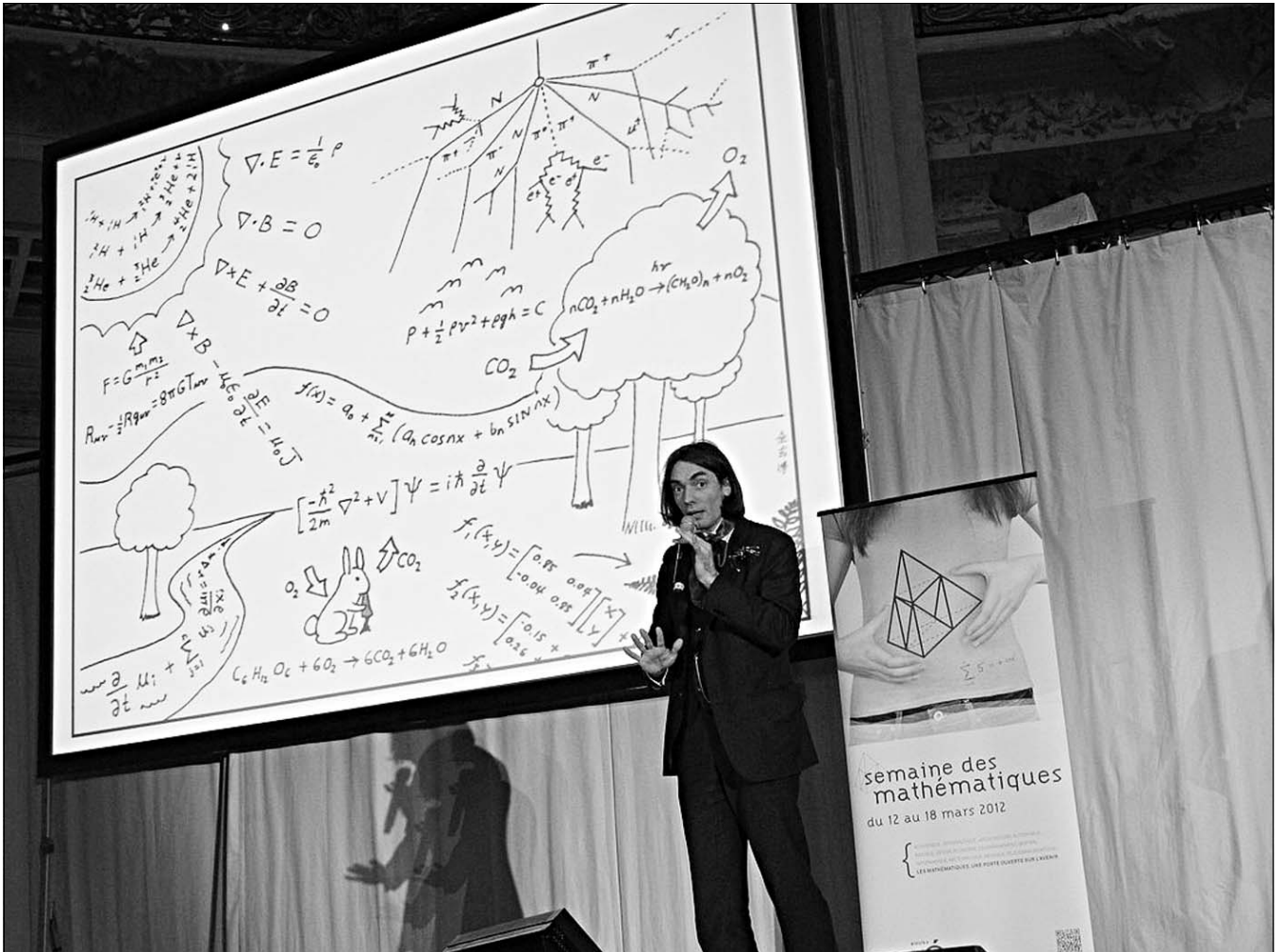
- [1] ADAMATZKY, A. (2010). *Physarum Machines: Computers from Slime Mold*. World Scientific series on nonlinear science. World Scientific.
- [2] AMBROSIO L., *Lecture notes on optimal transport problems. Mathematical aspects of evolving interfaces* (Funchal, 2000), 1-52, Lecture Notes in Math., 1812, Springer, Berlin, 2003.
- [3] AMBROSIO L., PRATELLI A., *Existence and stability results in the L1 theory of optimal transportation, Optimal transportation and applications* (Martina Franca, 2001), 123-160, Lecture Notes in Math., 1813, Springer, Berlin, 2003.
- [4] AMPÈRE A. M., *Mémoire contenant l'application de la théorie*. Journal de l'École Polytechnique, (1820).
- [5] ARNOL'D V. I., *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti, 478 pp., 1979.
- [6] CARDIN F., BANAVAR J. R., MARITAN A., *Optimal transport in living system*, proposto per la pubblicazione, 2017.
- [7] BANAVAR J.R., MARITAN A., RINALDO A., *Size and form in efficient transportation networks*, Nature, **399**, 130-132 (1999).
- [8] BENAMOU J.-D., BRENIER Y., *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*. Numer. Math. **84** (2000), no. 3, 375-393.
- [9] BERNOT M., CASELLES V., MOREL J.-M. *Optimal transportation networks. Models and theory*. Lecture Notes in Mathematics, 1955. Springer-Verlag, Berlin, 2009. x+200 pp.
- [10] BONIFACI V., MEHLHORN K., and VARMA, G. (2012). *Physarum can compute shortest paths*. Journal of Theoretical Biology, 309:121-133.
- [11] BORN M., WOLF E., *Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Third edition Pergamon Press, 1965 xxviii+808 pp.
- [12] BOUCHITT E, G., BUTTAZZO, G., and SEPPECHER, P., *Shape optimization solutions via Monge-Kantorovich equation*. C. R. Acad. Sci. Paris S er. I Math. **324** (1997), no. 10, 1185-1191.
- [13] BRENIER Y., *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*. Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), no. 4, 375-417.
- [14] BUTTAZZO G., *Evolution models for mass transportation problems*. Milan J. Math. **80** (2012), no. 1, 47-63.
- [15] BUTTAZZO G., *Problemi di ottimizzazione in teoria del trasporto ottimo*. Boll. Unione Mat. Ital. (9) **1** (2008), no. 2, 401-427.
- [16] CAFFARELLI L., FELDMAN M. and MCCANN R., *Constructing optimal mass for Monge's transport problem as a limit of strictly convex costs*, J. Amer. Math. Soc. (2002), 1-26.
- [17] CARAVENNA L., *A proof of Sudakov theorem with strictly convex norms*. Math. Z. **268** (2011), no. 1-2, 371-407.
- [18] CARDIN F., MARITAN A., BANAVAR J. R., *Optimal transport from a point-like source*, proposto per la pubblicazione, 2017.
- [19] EVANS L. C. and GANGBO W. (1999). *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*. Mem. Amer. Math. Soc, 137:653.

- [20] DREYER O., PUZIO R., *Allometric scaling in animals and plants*, J. Math. Biol. **43**, 144-156 (2001).
- [21] EVANS L.C., *Partial Differential Equations and Monge-Kantorovich Mass Transfer, Current Developments in Mathematics*, Int. Press, Boston, MA, 1999.
- [22] EVANS L.C. and GANGBO W., *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Mem. Amer. Math. Soc., **653**, 1999.
- [23] FACCA E., CARDIN F., PUTTI M., *Towards a stationary Monge-Kantorovich dynamics: the Physarum Polycephalum experience*, in stampa sul SIAM Journal on Applied Mathematics (SIAP), <https://arxiv.org/pdf/1610.06325.pdf>, 2017.
- [24] FACCA E., DANERI S., CARDIN F., PUTTI M., *Numerical Solution of Monge-Kantorovich equations via a dynamic formulation*, proposto per la pubblicazione, 2017.
- [25] FACCA E., CARDIN F., PUTTI M., *Branched transportation via dynamical PDE model*, proposto per la pubblicazione, 2017.
- [26] FORMICA F., *La muffa intelligente che può disegnare le "reti" delle città*, 'Venerdì di Repubblica', 24 febbraio 2012.
- [27] FRISCH U., MATARRESE S., MOHAYAEI R., SOBOLEVSKI A., *A reconstruction of the initial conditions of the Universe by optimal mass transportation*, Nature **417**, 260-262 (16 May 2002).
- [28] GIAQUINTA M., HILDEBRANDT S., *Calculus of variations. I. The Lagrangian formalism*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 310. Springer-Verlag, Berlin, 1996. xxx+474 pp.
- [29] KANTOROVICH, L.V., *Mathematical methods in the organization and planning of production*. Reprint of the book, published in 1939, with introductory paper of L. V. Kantorovich. St. Petersburg, Publishing House of St. Petersburg Univ., (2012) 96 pp.
- [30] KANTOROVICH L.V., *On mass transportation*, Doklady Acad. Sci. USSR. **37** (7-8) (1942), 227-229 (in Russo).
- [31] KANTOROVICH L.V., *On a problem of Monge*, Uspekhi Mat. Nauk. **3** (1948), 225-226 (in Russo). Tradotto in inglese nel Journal of Mathematical Sciences, Vol. 133, No. 4, 2006, pag. 1383.
- [32] KLEIBER M., *Body Size and Metabolism*, Hilgardia, Vol. 6, January, 1932, N. 11, pp.315-353.
- [33] LANDAU L. D., LIFSHITZ E. M., *The classical theory of elds*. Second edition. Course of Theoretical Physics, Vol. 2. Pergamon Press, Oxford-London-Paris-Frankfurt; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. 1962 ix+404 pp.
- [34] MARSDEN J. E., HUGHES T. J.R., *Mathematical foundations of elasticity*. Corrected reprint of the 1983 original. Dover Publications, Inc., New York, 1994. xviii+556 pp.
- [35] MCCANN R., *Polar factorization of maps on Riemannian manifolds*. Geom. Funct. Anal. **11** (2001), no. 3, 589-608.
- [36] MURRAY J. D., *Mathematical biology. II. Spatial models and biomedical applications*. Third edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, 18. Springer-Verlag, New York, 2003. xxvi+811 pp.
- [37] NAKAGAKI, T., YAMADA, H., and TOTH, A. (2000). *Maze-solving by an amoeboid organism*. Nature, **407**(6803):470.
- [38] PETERSEN P., *Riemannian geometry. Third edition. Graduate Texts in Mathematics*, 171. Springer, Cham, 2016. xviii+499 pp.
- [39] RINALDO A. et al., *On Feasible Optimality*, Istituto Veneto Sci. Lett. Arti, Atti Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **155** (1996-1997), pp. 57-69.
- [40] RODRIGUEZ-ITURBE I., RINALDO A., *Fractal River Networks: Chance and Self-Organization*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [41] SANTAMBROGIO F., *Optimal channel networks, landscape function and branched transport*. Interfaces Free Bound. **9** (2007), no. 1, pp.149-169.
- [42] SANTAMBROGIO F., *Optimal transport for applied mathematicians. Calculus of variations, PDEs, and modeling*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 87. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015. xxvii+353 pp.
- [43] SPUFFORD F., *Red Plenty, inside the fties' soviet dream*, Faber & Faber (2010). Edizione italiana: *L'ultima favola russa*, Bollati-Boringhieri (2013), 484 pp.
- [44] SUDAKOV V. N., *Geometric problems of the theory of in nitedimensional probability distributions*. (Russian) Trudy Mat. Inst. Steklov. **141** (1976), 191 pp.
- [45] TERO A., KOBAYASHI R., NAKAGAKI T. (2007). *A mathematical model for adaptive transport network in path finding by true slime mold*. Journal of Theoretical Biology, **244**(4):553.
- [46] TERO A., TAKAGI S., SAIGUSA T., ITO K., BEBBER D. P., FRICKER M. D. YUMIKI K., KOBAYASHI R., and NAKAGAKI T. (2010). *Rules for biologically inspired adaptive network design*. Science, **327**(5964):439-442.
- [47] TRUDINGER N.S. and WANG X.J., *On the Monge mass transfer problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations **13** (2001), 19-31.
- [48] VERSHIK A. M., *The Kantorovich metric: the initial history and little-known applications*. J. Math. Sci. (N. Y.) **133** (2006), no. 4, 1410-1417.
- [49] VERSHIK, A. M., *Long history of the Monge-Kantorovich transportation problem*. Math. Intelligencer **35** (2013), no. 4, 1-9.
- [50] VILLANI C., *Optimal transport. Old and new*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 338. Springer-Verlag, Berlin, 2009. xxii+973 pp.
- [51] XIA Q., *Optimal paths related to transport problems*. Commun. Contemp. Math. **5** (2003), no. 2, pp. 251-279.



Franco Cardin

Franco Cardin si è laureato in fisica ed è docente di fisica matematica presso il Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita dell'Università di Padova. Ha insegnato Meccanica Razionale, Fisica Matematica, Modelli Fisco-Matematici, Topologia, Symplectic Mechanics nel Curriculum internazionale ALGANT. I suoi interessi scientifici coinvolgono la teoria geometrica dell'equazione di Hamilton-Jacobi e correlate teorie variazionali in topologia simplettica. Da alcuni anni partecipa a delle ricerche su problemi applicati di trasporto ottimo con un gruppo interdisciplinare internazionale. Collabora alla Scuola Galileiana di Studi Superiori dell'Università di Padova ed è socio dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.



Il mondo è pieno di equazioni matematiche.