Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Isabeau Birindelli

Louis Nirenberg, un problem-solver, e molto di più

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (2020), n.3, p. 193–199.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_3_193_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2020.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 6, N. 1, aprile 2021, 000-000

Louis Nirenberg, un problem-solver, e molto di più

Isabeau Birindelli
Università di Roma, La Sapienza
E-mail: isabeau@mat.uniroma1.it

1. – Introduction

Ho incontrato Louis Nirenberg poche settimane dopo la laurea in Matematica. Il mio relatore di Laurea, Umberto Mosco, mi aveva proposto di

fare domanda al Courant Institute of Mathematical Sciences di NYU per il mio dottorato di ricerca. Tuttavia il termine ultimo per fare domanda era quasi scaduto quindi, per rendere il processo più veloce, sono andata di persona a New York e ho incontrato Nirenberg .

Sebbene Louis fosse incredibilmente gentile e disponibile, mi intimidiva tantissimo. Comunque, la cosa andò in porto e due anni dopo era diventato il mio relatore di dottorato.

Louis aveva l'abitudine di fissare un appuntamento settimanale con i suoi studenti. Non proponeva un problema di tesi, piuttosto proponeva delle letture di vari articoli, recenti e non, considerando che la buona matematica produce a sua volta domande e questioni che sono alla base di altra buona matematica. Questo, per noi studenti, era una grande fonte di ansia, ci chiedevamo se saremmo mai riusciti a trovare il problema "giusto" per la nostra tesi di PhD. Quando si andava nel suo ufficio con quella che si pensava fosse una idea buona ma, magari complicata idea, succedeva spesso che la smontasse con un semplice controesempio, che oltre a indicare l'errore metteva sulla strada giusta.

L'esperienza di essere una studentessa di Louis Nirenberg è stata incredibilmente bella. Al Courant Institute l'atmosfera era contemporaneamente stimolante e gioviale. C'erano i "mostri sacri" Louis Nirenberg, Peter Lax, Cathleen Morawetz, Fritz John, S. R. Srinivasa Varadhan (vedi la figura 3). I "brillanti successori" Jallal Shatah, Fang Hua Lin, Robert Kohn (vedi la figura 1). Gli studenti di dottorato e post-doc da tutto il mondo Yanyan Li, Jeremy Quastel, Xavier Cabré.... Tutti prima o poi si ritrovavano nella lounge a parlare di politica, matematica, opera, gossip e tutto quello che rende lo scambio tra esseri umani una fonte di arricchimento e di stimolo. Louis era un elemento fondamentale di questo specialissimo mondo. Amava la vita e amava la bellezza, che poteva trovare nella matematica ma anche nell'amicizia. Amava una buona battuta e il cinema. Amava l'Italia perché ci trovava molto di ciò che lo rendeva felice e tanti matematici italiani erano per lui dei carissimi amici, non li elenco perché dimenticherei senz'altro qualcuno. Ma la sua famiglia italiana è andata ampliandosi fino agli ultimi anni della sua vita.

Aveva un modo di guardarti, da sopra i suoi occhiali, che era piuttosto intimidatorio. Avevo imparato che quando ti guardava in quel modo c'erano due possibili cause, o avevi detto qualcosa di matematicamente sbagliato o non avevi richiuso lo speciale pennarello della sua lavagna bianca. In entrambi i casi ti sentivi abbastanza a disagio ma lui era sicuramente più disponibile a perdonare l'errore matematico piuttosto che di aver lasciato il pennarello aperto.

Quando mi è stato chiesto di scrivere questo contributo ero entusiasta di farlo, ma molto perplessa, la bella matematica prodotta da Louis Nirenberg è così tanta che è praticamente impossibile fare una scelta. Louis diceva che ci sono due tipi di matematici, quelli che costruiscono teorie e quelli che risolvono problemi, e che lui apparteneva alla seconda categoria. È vero che Louis era un problem-

Accettato: il 26 novembre 2020.

FIGURE 2 – Peter Lax, Kathleen Morawetz, Louis Nirenberg, fotografia gentilmente concessa da Kevin Payne.

solver ma, così facendo, finiva spesso per costruire teorie che poi davano spunti di riflessione e lavori a intere comunità matematiche per decenni. Il problema che voglio descrivere rientra proprio in questa categoria, e forse è uno dei suoi ultimi contributi fondamentali.

Precisamente vorrei illustrare come, grazie al Principio del Massimo, Louis Nirenberg, insieme a Henri Berestycki e "Raghu" Varadhan, ha esteso il concetto di autovalore principale a una classe molto generale di operatori. Cambiando radicalmente il modo in cui l'autovalore principale possa essere percepito. Infatti un titolo alternativo a questa mia nota sarebbe potuto essere: *Teoria spettrale, prima e dopo il 1993*. Per la parte prettamente matematica, il lavoro è organizzato in questo modo: comincio con il ricordare delle nozioni spettrali per le matrici perché porteranno direttamente alla comprensione del risultato di Berestycki, Nirenberg e Varadhan. Nel capitolo successivo accenno alla teoria spettrale per il Laplaciano, infine descrivo il problema risolto in [4]. Questo ci porteràa parlare del Principio del Massimo e del suo legame con l'autovalore principale.

2. – Teoria spettrale per le matrici, due diverse caratterizzazioni

È ben noto che se X è una matrice simmetrica, reale allora è equivalente a una matrice diagonale cioè che, a meno di cambio di base, $X \approx \Lambda$ dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & & & \\ \dots & 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$$

e λ_i sono gli autovalori della matrice X. Ben noto è il fatto che gli autovalori sono gli zeri del polinomio caratteristico. Ad ogni autovalore λ_i è associato un autovettore v^i cioè un vettore non nullo, per esempio unitario, tale che

$$Xv^i = \lambda_i v^i$$

dato che l'operatore

$$X - \lambda_i Id$$

non è invertibile. Senza perdita di generalità gli autovalori possono essere ordinati $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$.

Bella e molto profonda la caratterizzazione variazionale di Courant. Che, per il primo autovalore λ_1, si riduce a minimizzare il quoziente di Rayleigh:

$$\lambda_1 = \min_{u \neq 0} \frac{\langle Xu, u \rangle}{|u|^2}. \tag{2.1}$$

In particolare, se la matrice è **definita positiva**, cioè se $\langle Xu, u \rangle > 0$ per ogni vettore u non nullo allora $\lambda_1 > 0$. È chiaro che gli autovalori determinano in modo completo l'azione della matrice X e non voglio dilungarmi su tutte le possibili applicazioni e l'interesse fondamentale della conoscenza dello spettro ossia l'insieme degli autovalori.

Piuttosto vorrei ricordare che se la matrice non è simmetrica non è detto che la matrice abbia spettro reale. Cioè il polinomio caratteristico potrebbe avere solo soluzioni complesse. Tuttavia, la teoria di Perron-Frobenius garantisce che le matrici positive (o ad entrate positive o a componenti positive) hanno almeno un autovalore reale. Il più piccolo di tali autovalori reali è detto autovalore principale e può essere caratterizzato attraverso una formula di min-max nota come la condizione di Collatz–Wielandt e che ora illustrerò.

Data la matrice X di componenti $x_{ij} \geq 0$. Considerato un generico vettore $v = (v_1, , v_N) > 0$, nel senso che le sue componenti v_i sono positive, la formula di Collatz-Wiedlandt dice che λ_1 l'autovalore principale di X è dato da:

$$\lambda_1 = \max_{v>0, |v|=1} \min_i \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} v_j}{v_i}. \tag{2.2}$$

La formula è un po' ostica ma può essere letta nel modo seguente:

Per ogni versore $v > 0$, si considera w il trasformato tramite X, cioè $w = Xv$, e si sceglie il più piccolo dei rapporti $\frac{w_i}{v_i}$. Infine si massimizza tra tutti i possibili versori $v > 0$.

Riassumendo per una matrice simmetrica positiva si hanno due caratterizzazioni dell'autovalore principale:

$$\text{variazionale } \lambda_1 = \min_{u, |u|=1} < Xu, u >$$

$$\text{oppure max min} \lambda_1 = \max_{v>0, |v|=1} \min_i \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} v_j}{v_i}.$$

3. – Il caso del Laplaciano

Il concetto di autovalore può essere generalizzato a tutti gli operatori lineari in contesti di spazi di Hilbert infinito dimensionali. Qui ci vogliamo concentrare sul semplice Laplaciano. Sia Ω un dominio (aperto connesso) limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera $\partial\Omega$. Consideriamo il problema di Dirichlet seguente:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

È interessante ricordare le definizioni equivalenti di Laplaciano per le funzioni due volte derivabili,

$$\Delta u := \sum_{i=1}^N \partial_{ii} u \equiv \text{tr}(D^2 u) \equiv \sum_{i=1}^N \lambda_i(D^2 u) \equiv \text{div}(\nabla u).$$

dove tr indica la traccia.

In analogia con il caso delle matrici simmetriche, si può dire chen μ è un autovalore per il problema di Dirichlet in Ω se esiste una funzione $u \not\equiv 0$, detta autofunzione, tale che

$$\begin{cases} \Delta u + \mu u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Non mi posso permettere di entrare nella meravigliosa teoria spettrale che garantisce che gli autovalori sono infiniti, limitati dal basso, che l'insieme delle autofunzioni forma una base dello spazio di Hilbert $L^2(\Omega)$ e tramite questa base si può "ri-

FIGURE 3 – Xavier Cabré, David Kinderlehrer, Louis Nirenberg, Pisa, 2016.

solvere” l’equazione di Poisson.

Per lo scopo di questa nota ci basti dire che Courant ha dimostrato che la caratterizzazione variazionale tramite il quoziente di Rayleigh può essere estesa al più piccolo autovalore del Laplaciano, detto autovalore principale, tramite la formula

$$\mu_1 = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

L’analogia con (2.1) è evidente tenendo conto della formulazione divergenziale del Laplaciano in H_0^1:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega u\Delta u dx.$$

L’autovalore principale μ_1 appartiene allo spettro

FIGURE 4 – Varadhan, Nirenberg, Berestycki, Taiwan 1994, fotografia di Yanyan Li. Si ringrazia Berestycki per averla procurata.

puntuale e in particolare esiste $\phi_1 > 0$ in Ω tale che

$$\begin{cases} \Delta\phi_1 + \mu_1\phi_1 = 0 & \text{in } \Omega \\ \phi_1 = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

4. – Il problema di BNV, Berestycki, Nirenberg e Varadhan

La questione che avevano bisogno di risolvere Nirenberg e Berestycki, proprio mentre iniziavo la mia tesi al Courant, era se fosse possibile definire il concetto di autovalore principale quando l’operatore non era in forma “variazionale” e il dominio non era “regolare”. Sarò tra un attimo più precisa, ma ci tengo a dire che la questione non era “accademica” nel senso che, per completare i loro lavori sulle proprietà qualitative delle soluzioni con il così detto metodo degli “iperpiani mobili” o “piani scivolanti” avevano bisogno di utilizzare il primo autovalore non per il Laplaciano ma per operatori uniformi ellittici generici e in domini “irregolari”, più precisamente domini con “spigoli” [3]. Ovviamente non era chiaro se e in che modo potesse essere definito l’autovalore principale ed eventualmente in quale spazio di funzioni.

Quando questo problema fu risolto, e tra poco dirò come, Nirenberg presentò il risultato al Courant, al famoso seminario del giovedì, il seminario di PDE. Per darvi un idea della persona, dopo aver esposto il problema Nirenberg si girò verso la sala e, con la sua aria un po’ sorniona, guardandoci ad uno ad uno disse: “e poi mi venne un idea geniale, ma veramente geniale”. Eravamo tutti allibiti, certo non perché gli mancassero le idee geniali, ma perché non era proprio nel suo genere definirle tali o darsi del “genio”. Dopo qualche secondo di silenzio, con un effetto scenico degno di un grande attore, continuò. “Ho avuto un’idea geniale...sono andato nell’ufficio di Varadhan”.

Dato un operatore lineare uniformemente ellittico della forma

$$Lu = \mathrm{tr}(A(x)D^2u)$$

con $A(x)$ matrice simmetrica continua tale che esistano due costanti $\Lambda \geq \lambda > 0$ per le quali

$$\Lambda|\xi|^2 \geq \langle A\xi, \xi\rangle \geq \lambda|\xi|^2, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

e dato un dominio Ω senza nessuna condizione di regolarità sul bordo, il problema in questione era il seguente: stabilire l'esistenza di un autovalore $\overline{\mu}$ al quale corrisponde una autofunzione $\phi > 0$ in Ω tale che, in qualche senso "debole",

$$\begin{cases} L\phi + \overline{\mu}\phi = 0 & \text{in}\,\Omega \\ \text{“}\phi = 0\text{”} & \text{su}\,\partial\Omega. \end{cases}$$

Per evitare troppi tecnicismi, non entrerò nella questione di come si deve intendere che la soluzione assume il dato al bordo data la totale mancanza di regolarità del bordo. Quello che interessa è risolvere il problema **senza** usare la regolarità del bordo e quindi le stime a priori tra cui quelle di Nirenberg che avevano permesso ad Agmon di risolvere il problema tanti decenni prima nel caso di domini regolari.

L'idea che hanno avuto Berestycki, Nirenberg e Varadhan è che l'autovalore principale possa essere definito come l'estremo superiore dei μ per i quali l'operatore $L\cdot + \mu\cdot$ soddisfa il **Principio del Massimo** in Ω. Scopo della prossima sezione è di illustrare come ci sono riusciti.

5. – "I made a living out of the Maximum Principle"

Il titolo di questa sezione è una citazione di Nirenberg, una frase che amava dire e che riassumeva certo una parte importante della sua ricerca. Illustrerò ora un po' di fatti sul *Principio del Massimo*.

Il Principio del Massimo e le sue generalizzazioni progressive:

Step 0.
Ricordo innanzitutto che le *funzioni convesse* non hanno massimi interni a meno che siano costanti, cioè se la matrice Hessiana delle derivate seconde è semidefinita positiva allora non ci sono massimi interni sempre a meno che la funzione non sia costante.

Step 1.0
Non è **necessario** che la matrice Hessiana sia semidefinita positiva per dire che non ci sono massimi interni a meno che la funzione sia costante, basta che lo sia la **traccia** cioè

$$\text{Se } \Delta u \geq 0 \text{ in } \Omega \text{ allora } \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Step 1.1
Se consideriamo solo funzioni non positive sul bordo $\partial\Omega$ allora diventa

$$\text{Se } \Delta u \geq 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega,\ \text{allora } u \leq 0 \text{ in } \Omega$$

cioè le funzioni "subarmoniche" nulle sul bordo sono negative all'interno o identicamente nulle.

Step 2
Gli Step 1 valgono anche per operatori uniformemente ellittici $Lu = \mathrm{tr}A(x)D^2u + b(x)\cdot\nabla u$:

$$\text{Se } Lu \geq 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega,\ \text{allora } u \leq 0 \text{ in } \Omega.$$

Step 3
Se $c \leq 0$

$$\text{Se } Lu + cu \geq 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega,\ \text{allora } u \leq 0 \text{ in } \Omega.$$

La dimostrazione è facile se $c < 0$. Infatti se u fosse positiva da qualche parte all'interno allora avrebbe un punto di massimo interno positivo, chiamiamolo $\bar{x}$, dove $D^2u(\bar{x}) \leq 0$. Poiché $A > 0$, usando la proprietàche la traccia del prodotto di matrici semidefinite positive è positiva o nulla, si ottiene la seguente contraddizione

$$0 \leq -\mathrm{tr}(A(\bar{x})D^2u(\bar{x})) = -Lu(\bar{x}) \leq cu(\bar{x}) < 0.$$

Step 4
Se esiste una funzione $v > 0$ in Ω tale che $Lv + cv \leq 0$ allora $Lu + cu$ soddisfa il Principio del Massimo in Ω cioè

$$\text{Se } Lu + cu \geq 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega,\ \text{allora } u \leq 0 \text{ in } \Omega.$$

Attenzione: qui non sono richieste condizione di segno su c.

Anche qui, nell'ipotesi in cui $v > 0$ nella chiusura di $\overline{\Omega}$, la dimostrazione è più semplice ed è una conseguenza immediata dello Step 3. Infatti è facile vedere usando derivazione del prodotto che posto $w = \frac{u}{v}$ esiste una funzione $b(x)$ tale che $Lu = vLw + wLv + b(x) \cdot \nabla w$ e dunque

$$0 \le Lu + cu = v\left(Lw + \frac{b(x)}{v} \cdot \nabla w + \frac{(Lv + cv)}{v} w\right).$$

Dallo Step 3 si ottiene $w \le 0$ e dunque $u \le 0$.

In ogni caso, è proprio lo Step 4 che permette a BNV di definire l'estremo superiore dei valori per cui vale il Principio del Massimo, precisamente

$$\bar{\mu} = \sup\{\mu \text{ tale che esista } v > 0, \quad Lv + \mu v \le 0 \text{ in } \Omega\}. \tag{5.1}$$

Ovviamente lo Step 4 garantisce che per $\mu < \bar{\mu}$ vale il Principio del Massimo per $L \cdot + \mu \cdot$ in Ω. Ma ancora più interessante è che effettivamente $\bar{\mu}$ è l'autovalore principale per Lu nel senso che Berestycki, Nirenberg e Varadhan dimostrano che esiste $\phi > 0$ in Ω tale che:

$$\begin{cases} L\phi + \bar{\mu}\phi = 0 & \text{in } \Omega \\ \text{“}\phi = 0\text{”} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

In analogia con il caso finito dimensionale, sembra naturale concludere questa sezione osservando che un modo equivalente ma alternativo per definire $\bar{\mu}$ è:

FIGURE 5 – On the shoulders of giants, in prima fila Louis Nirenberg e Shmuel Agmon, dietro Yanyan Li e I.B., Haifa 2016.

FIGURE 6 – Nanette e Louis, Villa Panza, Varese, 2017, fotografia gentilmente concessa da Daniele Cassani.

$$\bar{\mu} = \sup_{v>0} \inf_{x\in\Omega} \frac{-Lv(x)}{v(x)},$$

che rappresenta esattamente l'equivalente della formula di (2.2) per operatori uniformemente ellittici.

6. – Conclusione

Riassumendo, Berestycki e Nirenberg al fine di risolvere un problema legato allo sliding method dovevano trovare se esiste un autovalore principale per operatori non divergenziali e in domini irregolari e dovevano stabilire, se al di sotto di tale autovalore, valesse il Principio del Massimo. Questo era uno "strumento" da usare in una dimostrazione, per un operatore piuttosto semplice e in un dominio con spigoli. Invece hanno affrontato un problema generale, dando vita a una "teoria spettrale" per operatori non simmetrici che completa dopo 50 anni la teoria spettrale di Courant.

La potenza di questa "nuova" definizione deriva dalla sua semplicità che ovviamente genera duttilità. Ci basti dire che attualmente, il lavoro di Berestycki, Nirenberg e Varadhan risulta citato 329 volte su

FIGURE 7 – Nanette e Louis, Convegno in occasione del premio Abel, Minneapolis 2015.

Math.Sci.Net, il data base dell'American Mathematical Society, e di queste citazioni più di 30 sono del 2020 cioè 27 anni dopo la sua pubblicazione. Chiaramente non è immaginabile raccontare tutte le estenzioni o tutte le applicazioni.

Mi piace però sottolineare che è immediato capire che la definizione (5.1) non richiede neanche la linearitàdell'operatore, quindi può essere estesa ad operatori non lineari o anche completamente non lineari, si vedano per esempio i lavori di Ishii e Yoshimura [7], di Quaas e Sirakov [8] e Birindelli e Demengel [5]. Quindi il concetto di autovalore, che è così profondamente connesso a operatori lineari, trova in questa nuova caratterizzazione una nuovissima interpretazione che non usa la linearità.

Non mancano legami con contesti più applicativi, ad esempio la biologia, con i lavori sulla dinamica delle popolazioni attraverso l'equazione di Fisher e KPP (Kolmogorov, Petrovski, Piskunov) dove lo studio della diffusione è direttamente legato al primo autovalore e.g. [2] o ad operatore ellittici degeneri vedi [1] e [6].

Caro Louis, grazie per avermi insegnato a guardare al particolare per capire il generale, a guardare il semplice per capire il complesso. Hai saputo apprezzare la vita per quel che ha di meglio: la bellezza, l'intelligenza, l'umorismo, etc... Credo di poter dire che mancherai a tutta la tua famiglia matematica ma ognuno di noi ha in memoria dei momenti speciali condivisi con te. Piccole gemme che non perdono di lucentezza. RIP

References

[1] H. BERESTYCKI, I. CAPUZZO DOLCETTA, A. PORRETTA, L. ROSSI, *Maximum principle and generalized principal eigenvalue for degenerate elliptic operators.* J. Math. Pures Appl. (9) 103 (2015), no. 5, 1276-1293.

[2] H. BERESTYCKI, R. DUCASSE, L. ROSSI, *Influence of a road on a population in an ecological niche facing climate change.* J. Math. Biol. 81 (2020), no. 4-5, 1059-1097.

[3] H. BERESTYCKI, L. NIRENBERG, *On the method of moving planes and the sliding method.* Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 22 (1991), no. 1, 1-37.

[4] H. BERESTYCKI, L. NIRENBERG, S.R.S. VARADHAN, *The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains.* Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), no. 1, 47-92.

[5] I. BIRINDELLI, F. DEMENGEL, *Eigenvalue and Maximum principle for fully nonlinear singular operators.* Advances in Partial Diff. Equations **11** n.1 (2006), 91-119.

[6] I. BIRINDELLI, G. GALISE, H. ISHII, *A family of degenerate elliptic operators: maximum principle and its consequences.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin'eaire 35 (2018), no. 2, 417-441.

[7] H. ISHII, Y. YOSHIMURA, *Demi-eigen values for uniformly elliptic Isaacs operators.* preprint.

[8] A. QUAAS, B. SIRAKOV, *On the principal eigenvalues and the Dirichlet problem for fully nonlinear operators. C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **342** (2006), no. 2, 115-118.

Isabeau Birindelli

Isabeau Birindelli è professore ordinario di Analisi Matematica alla Sapienza e attualmente direttrice del Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo. Ha conseguito il PhD con Louis Nirenberg al Courant Institute (NYU) e lavora nel campo delle equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche, in particolare quelle completamente non lineari, concentrandosi sui casi in cui l'ellitticità è degenere. Ha più di 60 pubblicazioni su riviste internazionali. È sposata e ha un figlio. Oltre la Matematica, ama lo sci alpinismo e suona per diletto l'arpa.