

---

# *Matematica, Cultura e Società*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

MARIA PIERA MANARA

## **Il progetto culturale di Federigo Enriques negli scritti di Carlo Felice Manara**

*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 5* (2020), n.3, p. 213–242.

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=RUMI\\_2020\\_1\\_5\\_3\\_213\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_3_213_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



# Il progetto culturale di Federigo Enriques negli scritti di Carlo Felice Manara

MARIA PIERA MANARA

E-mail: mariapiera.manara@gmail.com

**Sommario:** *L’articolo presenta le tracce del progetto di “humanitas scientifica” di Federigo Enriques negli scritti editi e inediti di Carlo Felice Manara, che fu professore di Geometria all’Università di Milano, allievo e successore di Oscar Chisini, a sua volta allievo e stretto collaboratore di Federigo Enriques.*

**Abstract:** *The paper presents the heritage of Federigo Enriques’ cultural project for the creation of a scientific humanitas in the work of Carlo Felice Manara, professor of Geometry at the University of Milano, student and then successor of Oscar Chisini, who was Enriques’ student and close collaborator.*

## Introduzione

*Nelle note seguenti si cercano le tracce del progetto culturale di Federigo Enriques negli scritti, editi e inediti, di Carlo Felice Manara (1916-2011), professore di Geometria e professore emerito presso l’Università Statale di Milano. C. F. Manara fu studente e allievo di Oscar Chisini (1889-1967), e nel 1959 suo successore sulla cattedra di Geometria. O. Chisini a sua volta era stato allievo di Federigo Enriques, e poi a lungo uno fra i suoi principali collaboratori.*

*Francesco Speranza (1932-1998), professore di Geometria e di Matematiche complementari all’Università di Parma e cultore di Epistemologia, nel suo contributo Il progetto culturale di Federigo Enriques, [S39], (1992), così descrive la Weltanschauung di F. Enriques: “... Il progetto culturale di Enriques consiste nella costruzione d’un sistema nel quale scienza (in particolare matematica), filosofia, storia, didattica specifica e scienze dell’educazione ... interagiscono organicamente nella forma-*

*zione del sapere in ogni individuo. Ecco alcune caratteristiche importanti: il valore formativo e non solo utilitaristico della scienza; l’esigenza che essa sia rispettosa delle convinzioni di ognuno; l’attenzione alla formazione di tutti...”.*

*La storica Livia Giacardi riassume la visione culturale di F. Enriques con la bella espressione “progetto di humanitas scientifica” (in Federigo Enriques and the training of mathematics teachers in Italy, [G45], (2011)). Vorrei dunque delineare le molte tracce di tale humanitas scientifica negli scritti di C. F. Manara, per quanto attiene agli aspetti del lavoro filosofico, storico, pedagogico e psicologico.*

*Riguardo al lavoro matematico di F. Enriques, C. F. Manara lo presenta in Il contributo di Enriques alla Matematica contemporanea, [M26], (1982), e anche in modo più sintetico in Protagonisti della cultura italiana del Novecento – Federigo Enriques, [M30], (1989).*

*In Pedagogia della Matematica, [M14], (1962), si legge: “... Enriques, Maestro che ammiro sconfinatamente anche per la dimensione umanistica della sua cultura e del suo pensiero. Tuttavia ritengo che le ricerche storiche di Enriques avessero l’intenzione di ricercare proprio l’emergere delle idee*

*Accettato: il 9 settembre 2020*

direttive della scienza...”. *E in* Federigo Enriques, [M16], (1966): “...Ci piace ricordare in modo particolare che F. Enriques fu un uomo di cultura e di scienza per il quale la ricerca matematica rappresentava soltanto una parte della complessa attività del suo pensiero. Egli infatti fu per vari anni (dal 1907 al 1913) presidente della società filosofica italiana; in questo ordine di idee la sua attenzione fu rivolta in modo particolare al significato che la scienza ha nella vita e nel pensiero di una nazione. Infatti nei suoi lavori di filosofia, in un’epoca che fu praticamente dominata dal positivismo scientifico, la sua preoccupazione fu essenzialmente umanistica, e diretta ad una apertura culturale che, senza fare della scienza la dominatrice totale del mondo del pensiero, le dà tuttavia nella civiltà umana il posto che le spetta...”.

*Le due citazioni riassumono in qualche modo le linee direttive tracciate dal maestro, seguite da C. F. Manara in tutto un percorso di impegno intellettuale. Già nel 1954, in La Geometria nell’ambito del pensiero matematico, [M12], si trova l’affermazione: “...Non è mia intenzione addentrarmi qui nell’analisi, sul piano strettamente psicologico, del sorgere del pensiero matematico; di questo problema interessante e complesso si sono occupati filosofi, psicologi, storici della Scienza e anche matematici di valore...”.*

*E del problema interessante e complesso C. F. Manara si occuperà nel lavoro di approfondimento culturale costantemente intrecciato col lavoro scientifico. I suoi primi interventi di tipo storico-epistemologico sono in Enciclopedia Filosofica, [M13], (1957): Geometria, Geometria non euclidea, Spazio, Matematica. In Metodi della scienza dal Rinascimento ad oggi, [M17], (1975), l’esposizione storica evidenzia che “...l’evoluzione del pensiero umano, nel corso della Storia, ha condotto ad una distinzione sempre più netta tra il pensiero filosofico ed il pensiero scientifico. Da un certo punto di vista, in modo molto rudimentale e sommario, si potrebbe dire che la cesura più importante ed evidente è avvenuta con il Rinascimento. ...” (citazione da Scienza, Filosofia, Etica, [M31], (1991)). In contributi e articoli degli anni successivi si intensifica la riflessione di tipo più epistemologico da una parte, e psicologico dall’altra.*

*Che cosa potrebbe suggerire la ricerca di tali “riposte armonie” in un «sistema di pensiero nel*

quale scienza (in particolare matematica), filosofia, storia, didattica specifica e scienze dell’educazione ...interagiscono organicamente nella formazione del sapere in ogni individuo» riguardo alla situazione in cui oggi ci troviamo, con una Società, un’Università e una Scuola completamente diverse da quelle del primo e del secondo Novecento? Alcune considerazioni: Il sapere personale va costruito attraverso una buona specializzazione tecnica, che sia nelle scienze della Natura o nelle scienze dell’Uomo, oggi più che mai; ma occorre a ognuno la capacità di vedere la propria specializzazione immersa in un contesto ampio, storico e sociale. Bisogna che il sapere tecnico-specialistico sia accompagnato da un atteggiamento filosofico che in qualche modo permetta di valutare moralmente fini e mezzi di ciò che si fa. Occorre un minimo sapere di base che permetta a ognuno di non restare prigioniero in una delle “due culture”; l’aspirazione enriquesiana all’“Unità della scienza” deve essere tradotta oggi in presa di coscienza dei valori e dei limiti di ciascun sapere.

## 1. – Il lavoro filosofico

Sui postulati della conoscenza – Scienza e verità. Limiti della scienza – Epistemologia della Matematica – Sul ruolo del pensiero geometrico – Sulla logica

Sui postulati della conoscenza. *In molti contributi, sia pubblicati che inediti, C. F. Manara manifesta la propria necessità intellettuale di accettare esplicitamente alcuni postulati sulla conoscenza, per poter fondare una filosofia della scienza, trovando su questo consonanza nel pensiero di F. Enriques, come testimoniano le note che seguono, in un ideale dialogo fra i due studiosi.*

MANARA. La Matematica, [M28], (Inedito, 1986): “... Parlando di Enriques, abbiamo già avuto occasione di mettere in evidenza la sua posizione nei riguardi dei principi di ogni conoscenza scientifica; atteggiamento che porta a riconoscere onestamente ed a prendere esplicita coscienza dei principi non dimostrabili a livello scientifico, ma pure necessari per ogni conoscenza che voglia essere fondata e rigorosa...”.

C. F. Manara ritrova tali principi espressi nel lavoro di Federigo Enriques, e li denomina in modo riassuntivo e suggestivo con le espressioni Postulato di conoscibilità e Postulato di coerenza.

MANARA. Asterischi sulla conoscenza, [M37], (Inedito, 1995 e successivi): "... Esiste in ogni caso un atto ineliminabile di deduzione logica, ridotta a calcolo nel caso delle teorie fisico-matematiche. Ovviamente si postula che le deduzioni della nostra mente riproducano la connessione causa-effetto della realtà osservata o sperimentata. A mia conoscenza, Enriques, nella "Storia della logica", [5], è il solo pensatore che ha avuto coscienza di questo fatto e che ha enunciato esplicitamente i postulati di conoscibilità e di coerenza del reale. Negando questi si giunge al caos intellettuale; ma ovviamente non è possibile difenderli sul piano argomentativo. E ciò convince qualcuno che non sono veri..." *E ancora*,

MANARA. La Matematica, [M28], (Inedito, 1986): "... Enriques medita sui fondamenti del pensiero scientifico; egli osserva che ogni indagine scientifica parte da certe convinzioni dello scienziato, convinzioni che .... non sempre sono presenti in forma esplicita alla coscienza del ricercatore; ma che costituiscono la condizione "sine qua non" perché la ricerca scientifica abbia inizio e svolgimento. Tali condizioni sono enunciate da Enriques in due proposizioni che egli chiama *postulati*. Il primo di essi potrebbe essere chiamato "*Postulato di conoscibilità del reale*". Possiamo osservare infatti che lo scienziato non inizierebbe nessuna delle sue indagini se non fosse di fatto convinto che, in qualche modo almeno, il reale è conoscibile all'uomo...<..>... Il secondo principio su cui si regge la possibilità della conoscenza viene da F. Enriques indicato come "*Postulato di coerenza*": esso potrebbe essere formulato dicendo che noi siamo convinti che il reale sia coerente, e precisamente che rispetti – nei suoi modi di essere – quelle regole di coerenza che noi rispettiamo nelle nostre deduzioni, ed in particolare con i nostri calcoli. È nostra convinzione che, anche in questo secondo caso, lo scienziato non inizierebbe neppure la sua fatica se non fosse internamente convinto (anche se non in modo esplicito e cosciente) del fatto che le deduzioni che egli fa rispecchiano in qualche modo la struttura intima del reale....<...>. Si potrebbe osservare che l'impostazione che Enriques ha dato dei fondamenti del pensiero scientifico

rivela abbastanza bene la mentalità e la formazione matematica dell'Autore; invero si potrebbe dire che, nella ricerca sistematica, l'attenzione del matematico è attratta in particolare dalla necessità di enunciazione esplicita dei punti di partenza che si assumono come validi....".

MANARA. Scienza, Filosofia, Etica, [M31], (Inedito, 1991): "... Mi limiterò quindi a riportare ciò che Federigo Enriques ha esposto nella sua opera *Per la storia della logica*, [5], (1922); opera che, a mio parere, ha un profondo significato filosofico, ma che non ha forse avuto tutta la rinomanza e l'autorità che merita...<....>... Precisamente Enriques osserva che non si inizierebbe neppure l'opera di ricerca scientifica senza una convinzione di conoscibilità della realtà; ....ma accanto a questa convinzione sulla conoscibilità del reale ci deve essere anche una convinzione sulla esistenza di una coerenza della realtà; coerenza che ci assicura che le nostre deduzioni, fatte a norma della nostra logica, riproducano l'itinerario interiore della realtà, cioè rendano la coerenza tra le cause e gli effetti che, nel nostro ragionamento, viene riprodotta con la coerenza tra premesse e conclusioni, quando sussista..."

*Nel capoverso successivo C. F. Manara manifesta apertamente la propria esigenza filosofica:* "Io penso che, senza questo postulato, o senza convinzioni equivalenti, non sia possibile la conoscenza della realtà attraverso una visione che ne cerchi le cause profonde del suo sussistere fuori dal nulla; io penso che, in mancanza di questi fondamenti, la realtà deve necessariamente essere vista come un succedersi incoerente di sensazioni senza fondamento. Si giungerebbe quindi ad una radicale frammentazione, che non consentirebbe alcuna vera conoscenza. E si badi che, proseguendo su questa via, si giungerebbe anche a negare fondamento e validità alla pratica, a quel dominio puramente materiale delle cose, che potrebbe mirare soltanto alla loro utilizzazione senza pretesa di conoscerle dal di dentro. Infatti io credo che anche la più brutale utilizzazione delle cose e delle persone non possa prescindere da un momento di conoscenza, anche superficiale, anche velleitaria, anche soltanto incoativa, ma che assicura la continuità delle nostre azioni e delle nostre conoscenze, anche soltanto miranti alla pura pratica."

*In realtà, sembrerebbe che i due "postulati" non siano così chiaramente enunciati in Per la storia*

della logica, [5]. *Potrebbero tuttavia essere enucleati da un paragrafo dell'Appendice (pg. 291):*

ENRIQUES. "... Ora, quando si è condannata l'antica veduta realistica per cui i rapporti razionali sono obiettivati come enti fuori di noi, non per ciò perde valore il postulato di comprensibilità, per cui cerchiamo di rispecchiare – quanto più è possibile – le circostanze della successione reale col rapporto dei concetti."

*Ma soprattutto i due "postulati" sembrerebbero riassumere elegantemente il pensiero di F. Enriques contenuto in Problemi della scienza, [E1], (1906); precisamente:*

ENRIQUES. Problemi della scienza, [E1], (1906): "... Cerchiamo ora di riassumere schematicamente il risultato della critica, enunciando il contenuto della nostra credenza, col seguente **postulato**: Vi sono degli aggruppamenti fissi e indipendenti da noi, fra le nostre volizioni effettive o supposte, e le sensazioni che ne conseguono, prese, le une e le altre, in un certo senso astratto; essi corrispondono a ciò che chiamiamo «reale». Una cosa reale implica sempre diversi rapporti associativi fra serie di sensazioni, producenti in condizioni determinate. E in forza di tale molteplicità di rapporti, illimitatamente estendibile, la supposizione della realtà si allarga, al di là del mondo che cade immediatamente sotto i nostri sensi; in ispecie, per mezzo della supposizione psicologica, la realtà acquista un significato sodale (conformemente alla veduta comtiana)." [Cap. II, §10, pg. 99].

*E ancora in [E1]: "... Rappresentazione logica e **postulato della conoscenza**.... Diciamo anzitutto del primo problema. La possibilità di rappresentare logicamente la realtà deve essere intesa in questo senso, che: agli invarianti dell'esperienza, che costituiscono le cose reali (oggetti e rapporti), possiamo far corrispondere gl'invarianti (oggetti) del pensiero, per modo che alle coesistenze e successioni invariabili di quelle corrispondano classi e serie di questi;... <...>. Il **postulato della conoscenza** enunciato nel cap. II afferma già in via approssimata codesta generica possibilità; ma è chiaro che se si assume la rappresentazione logica del reale come illimitatamente proseguibile, si viene a prendere il postulato suddetto in un senso rigoroso, che oltrepassa quanto è richiesto come fondamento delle*

conoscenze necessarie alla vita." [Cap II, §21, pg. 204 e segg.].

*Infine, ancora nell'Appendice di Per la storia della logica, [E5], si legge un paragrafo che potrebbe essere visto come una sintesi dei postulati chiariti precedentemente:*

ENRIQUES. "... Ripetiamo che il progresso della scienza consiste appunto in un migliore accordo del pensiero colla realtà, e quindi in un duplice adattamento: del pensiero al dato dell'esperienza, e dell'esperienza alle forme del pensiero." (pg. 292).

*Ai due postulati sulla conoscenza C. F. Manara sembrerebbe voler aggiungere un postulato di "datità" della realtà, ovvero un postulato di esistenza di una realtà esterna.*

MANARA. Osservazioni sulla filosofia del senso comune, [M35], (Inedito, 1994): "... A mio parere, l'atteggiamento del matematico e filosofo italiano mira a mettere in luce, in modo esplicito, proprio quei punti di partenza primitivi, che debbono essere accettati, ma che non possono essere ulteriormente giustificati in forma teorica, come già aveva rilevato B. Pascal...<...>. Ricordo che Carlo Mazzantini, negli anni '20, ritornò su questioni analoghe in un'opera di piccola mole ma di grande profondità, intitolata "Difesa dell'evidenza" (1927); ivi il filosofo torinese, contro le correnti filosofiche allora imperanti, difende quella che, con ardito neologismo, egli chiama la "datità" della realtà. E quindi difende la procedura che parte dalla evidenza di certi dati della nostra intuizione, per costruire un realismo che, a quei tempi, era considerato retrogrado e superato...<...>. L'accettazione di punti di partenza in certo senso primitivi, dati e non ulteriormente analizzabili (almeno fino a questo momento), mi pare una posizione abbastanza comune tra i filosofi. Le questioni incominciano a proposito della scelta dei punti di partenza, ed a proposito del loro significato. Mi pare infatti fuori dubbio il fatto che l'accettazione di una data realtà viene quasi sempre accompagnata da un tentativo o un inizio di spiegazione della realtà stessa; si potrebbe dire che una delle questioni fondamentali di certa filosofia è appunto quella di accertare in quale misura l'accettazione dei punti di partenza è accompagnata da un giudizio, che non è sempre pienamente cosciente ed esplicito, ma pro-

prio per questo costituisce una specie di ipoteca sullo sviluppo di tutto il discorso successivo. Infatti la discussione sulla validità, e su quella che si potrebbe chiamare “primitività” o anche “purezza” dei dati iniziali, prende buona parte del discorso filosofico di ogni tempo”.

*Tali postulazioni di conoscibilità del reale e di adeguatezza del pensiero alla conoscenza di una realtà esterna sembrerebbero formare la prima consonanza fra il pensiero di Enriques e il pensiero di C. F. Manara. Diverso è forse il senso che i due studiosi attribuiscono all'espressione “realtà esterna”.*

Lucio Lombardo-Radice scrive in *Natura*, ragione e storia. Antologia di scritti filosofici, Introduzione di Lucio Lombardo-Radice, [E9], [LR50]: «...Nei *Problemi della scienza* [E1] il reale viene definito da Enriques come un “invariante della corrispondenza fra volizioni e sensazioni”. “La nostra credenza a qualcosa di reale suppone un insieme di sensazioni che invariabilmente susseguono a certe condizioni volontariamente disposte”. Di questo criterio (e insieme “postulato”) della realtà, non è difficile dare formalmente un'interpretazione machista, fenomenistica; il reale si definisce nell'ambito soggettivo delle sensazioni, come aggruppamento costante di sensazioni susseguenti a certe condizioni disposte dal soggetto. L'Enriques stesso dà qualche appiglio a una interpretazione di questo tipo del suo “postulato della realtà”, quando nega senso a una “realtà di per se stessa”, e accenna soltanto alla “impotenza della volontà a modificare le sensazioni che riferiamo al reale” ...». (pg. 23).

*Per C. F. Manara invece, sembra di poter dire che il postulato della realtà è inteso in senso tomistico.*

Scienza e verità. Limiti della scienza. *La passione filosofica fu determinante per Enriques nella scelta di studi scientifici; a Giuseppe Scorza Dragoni egli parla di “...entrambi condotti allo studio delle scienze da una infezione filosofica liceale e dalla convinzione che soltanto nella filosofia naturale potevamo trovare una risposta parziale ai problemi che ci avevano affascinato...”* ([E9], [LR50], pg. 6).

*Naturalismo, positivismo, idealismo sono i movimenti filosofici dell'ambito della cultura di Enriques; invece neoscolastico è l'approfondimento filo-*

*sofico-culturale in cui si forma come universitario (negli anni Trenta del Novecento) C. F. Manara. Credo di poter dire che la motivazione della scelta di intraprendere studi matematici per Manara, proveniente da una famiglia profondamente religiosa e colta, con tradizione di studi ingegneristici, è stata inizialmente la “ricerca di certezza”.*

MANARA. La matematica chiave di lettura della realtà, [M34], (1994): “... Preferisco guardare all'aspetto positivo della ricerca della verità, e quindi parlare di pensiero che cerca la certezza attraverso la spiegazione. Il fatto che le ipotesi che noi formuliamo possano essere smentite, e che di conseguenza occorre spesso ricominciare la ricerca con nuove osservazioni, e con la formulazione di nuove ipotesi, e con nuove deduzioni è soltanto la conseguenza del fatto che non abbiamo altro modo per giungere ad una spiegazione di ciò che osserviamo. ...”

*I postulati di conoscibilità, coerenza e se vogliamo datità, per Manara ed Enriques fondano il valore di ricerca della verità e di senso della conoscenza scientifica. Nel pensiero di entrambi è presente anche la consapevolezza che la conoscenza scientifica è una delle possibili forme di conoscenza della realtà; vi sono moltissimi passi degli interventi di Enriques che lo testimoniano. Il pensiero di Enriques apre a una metafisica idealistica, quello di Manara a una metafisica neoscolastica, che intende distinguere nettamente l'ambito dell'indagine scientifica da quello dell'indagine filosofica, metafisica e religiosa.*

*Come scrive Giorgio Israel in Il ‘positivismo critico’ di Federigo Enriques nella filosofia scientifica del Novecento, [I48], (1998), nel breve intervento di Enriques al Congrès International de Philosophie Scientifique (Parigi, 1935) viene ribadita “... una tesi che è una costante di tutto il suo pensiero: la filosofia scientifica non deve ridursi a un sistema filosofico particolare che risolva in un senso definito le opposizioni tradizionali delle scuole...”.*

ENRIQUES. Philosophie scientifique et empirisme logique, [E7], (1935): “... La philosophie scientifique, en tant qu'elle aspire à établir une discipline supérieure de la pensée rationnelle, ne saurait se réduire à un système philosophique particulier, résolvant en un sens déterminé les oppositions traditionnelles des écoles...”. (pg. 24).

*E nel riassunto del saluto rivolto ai partecipanti al Congresso (1935) leggiamo: “...En effet, la science est une discipline de la raison qui ne saurait imposer un choix déterminé entre des perspectives et des fins différentes. Bref, il faut conserver la liberté philosophique au sein de la pensée scientifique: l’harmonie qu’on doit viser dans ce domain, c’est la mutuelle entente plutôt que l’accord des idées.”*

*Questa posizione aperta è condivisa da C. F. Manara, che all’iniziale ricerca di “certezza” sostituisce via via un atteggiamento coerente con la visione enriquesiana della scienza come “approssimazione” alla verità, separando definitivamente l’ambito della ricerca di una verità metafisica, che lo porta a conclusioni metafisico – religiose diverse da quelle di Enriques.*

MANARA. Note per il corso Problemi religiosi posti dalla filosofia della scienza, [M19], (Inedito, 1979): “... Ritorna come sempre il problema della certezza metafisica che non è fondata sulla certezza scientifica, ma supera questa di tanto di quanto la logica supera la geometria puramente immaginativa. Il fatto che il mondo moderno si accontenti della certezza scientifica (limitata, labile e superficiale) contro la certezza metafisica, non è certo a favore del mondo moderno. Le leggi dell’essere superano e integrano le leggi della scienza, ma uno dei compiti di chi analizza il sapere scientifico è proprio quello di analizzare e delimitare il concetto di certezza e di chiarezza che questo sapere pretende per sé...”. *E ancora:*

MANARA. Certezza e sicurezza, [M24], (Inedito, 1982): “...alla domanda: Nonostante l’incontestabile apertura del pensiero scientifico a degli orizzonti che già oltrepassano il positivismo ed il materialismo, si constata che gli approfondimenti sviluppati con l’aiuto della scienza, non arrivano tuttavia all’affermazione del trascendente? C. F. Manara risponde: La risposta dipende dal significato che si vuole dare al termine ‘trascendente’. Lo scienziato ha una convinzione radicata ma non espressa di una certa obbiettività del reale e di una sua conoscibilità: altrimenti non si metterebbe neppure a ricercare delle leggi, ad esprimerle, a dedurre delle conclusioni da certe ipotesi non direttamente verificabili. In questo senso lo scienziato testimonia col suo stesso agire della esistenza di una realtà obbiettiva che trascende l’immagine che egli ne dà, e della cui provvisorietà egli è ben convinto. Se per ‘trascendente’ si intende genericamente metafisico o

religioso non pare che la scienza possa, con i propri metodi e da sola, condurre a questo.”

ENRIQUES. Il problema della realtà, [E2], (1911): “... L’intuizione religiosa si manifesta pure nella coscienza scientifica. Domandiamoci infatti: è mai possibile che il criterio dell’indifferenza scientifica venga innalzato veramente a criterio massimo del pensiero? L’uomo che professi non dar peso al valore del risultato ma soltanto alla sua verità, si dimostra già, animato da un alto motivo morale che chiede ed impone – ove occorra – il sacrificio del sentimento; onde, nell’atto medesimo in cui egli respinge ogni fede nel progresso e nella conservazione dei valori, scopre in sé stesso un valore ideale che nella sua mente supera ogni altro bene e che è l’oggetto proprio della sua fede scientifica; appunto la fede nella verità, nella conquista della verità e nel progresso della ragione, tempera l’animo suo ad ogni visione dolorosa; ed egli non può abbandonare anche questa fede senza perdere insieme l’interesse della ricerca, proseguita con sforzo tenace. Dunque l’indifferenza radicale di fronte ai valori trarrebbe con sé anche l’indifferenza pel sapere, che significa la morte della scienza. ...” (pg. 266).

*E ancora* (ib., pg. 268): “... E la scienza stessa ha sognato sempre di cogliere l’immutabile sotto alla varietà fenomenica, o quanto meno si è sforzata e si sforza di superare illimitatamente l’approssimazione conseguita. Dal giorno in cui Pitagora scopriva l’incommensurabilità del lato del quadrato colla diagonale, la ricerca della verità scientifica ha superato i confini dell’empirismo e della vita pratica, per inseguire un ordine d’esattezza che soddisfi alle esigenze della ragione. Resta a mostrare che anche questo sviluppo della scienza pura, volta alla conquista della verità per sé stessa, obbedisce ad un’ispirazione affettiva; che vi agisce in qualche modo la fiducia di scoprire un valore nel disegno dell’universo, e perciò che l’attività scientifica può dirsi – in senso largo – un’attività d’ordine religioso.”

ENRIQUES. Per la storia della logica, [E5]: “... Lo schema del procedimento d’inferenza, offerti da una teoria, è stato da noi disegnato distinguendo in esso 4 fasi o momenti: 1) osservazioni ed esperienze preliminari, 2) concetto o sistema di concetti che ipoteticamente le rappresenta, 3) deduzione, 4) verifica.

Quando la verifica riesce in un certo ordine di esperienze, il procedimento scientifico messo in opera ci appare come chiuso, e le ipotesi espresse dalla teoria si ritengono nel loro insieme provate; salvo a riconoscere – mercé una critica opportuna – il loro reale contenuto positivo, a prescindere da ciò che nella rappresentazione può esservi di indifferente a tale riguardo. Ma la prova così raggiunta non può mai ritenersi che provvisoria ed approssimata! Almeno se la teoria viene interpretata in un senso concreto che implichi un certo determinismo fenomenico, così da fornire positivamente delle previsioni, e non soltanto limitazioni d'aspettative. Infatti, se da una teoria scientifica si potessero dedurre sempre nuove conseguenze che ammettessero una verifica positiva con un'approssimazione superiore a qualsiasi limite assegnabile, questa teoria dovrebbe possedere un valore estensivo infinito, che supera evidentemente le possibilità della scienza. L'ipotesi d'un accordo illimitato coll'esperienza può farsi soltanto per teorie interpretate in senso astratto, che si ritengano come sistemi di principi, da completare – in ogni applicazione – mediante ipotesi complementari; ma in tal caso non si può dire se la verifica, qualunque risultato sia per dare, porti sopra la teoria così concepita o sulle ipotesi che le diamo come complemento. All'infuori di questo senso, che richiamerà più oltre un'attenzione approfondita, l'impossibilità d'una teoria illimitatamente estendibile, risulta a priori dalla veduta che i concetti che la costituiscono sono formazioni astratte, cui non è dato chiudere tutta la realtà". (pg. 26).

Epistemologia della matematica. *Dal confronto delle idee sulla scienza in generale passiamo a cercare le corrispondenze di pensiero dei due studiosi per quanto riguarda in particolare l'epistemologia della matematica. Ancora la testimonianza nel dialogo dei loro testi.*

ENRIQUES. Per la storia della logica, [E5]: "... Ora è essenziale rilevare che il matematico, ponendosi il problema dell'ordinamento della propria disciplina, si ritrova in faccia alla logica nella posizione stessa dei pensatori che hanno lavorato a costruirne l'edificio, giacché lo sviluppo della scienza del ragionamento procede appunto dalla critica dei matematici o di filosofi che hanno riflettuto intorno alla natura e all'ordine delle verità matematiche." (pg. 2).

*Cito dal contributo di Mario Castellana: Federigo Enriques e il valore strategico del pensiero matematico, [CS43], (2019): "...L'opera più organica dove viene espressa l'idea della scienza come pensiero è il *Significato della storia del pensiero scientifico* del 1934, anno in cui compare la prima edizione della *Logica della scoperta scientifica* di Karl Popper e questo nella storia delle idee non è un fatto puramente casuale; ... <...> ... L'idea di fondo era che le singole scienze e le matematiche in particolar modo producono pensiero, sono pensiero per il fatto che hanno una specifica e intrinseca dimensione teoretica, cioè producono teorie sul mondo, sul reale secondo una logica storica. Nel produrre conoscenza, esse accrescono la conoscenza stessa, la cambiano in maniera strutturale producendo ulteriori cambiamenti, dove come diranno Popper e Gaston Bachelard in seguito, gli errori sono un momento necessario della crescita donde il primato teoretico dell'errore...".*

*Questa idea di centralità della matematica nella produzione di pensiero si ritrova in C.F. Manara.*

MANARA. La Matematica come promotrice di cultura, [M38], (Inedito, 1998): "... la matematica non soltanto è presente nella storia intellettuale di moltissimi popoli, fin da epoche storiche molto remote, ma la sua esistenza ci si presenta come una costante ricerca di chiarezza e di certezza nella conoscenza. Mi sentirei di dire che, con il passare dei secoli, la matematica si è rivelata sempre più come una chiave di lettura della realtà, o, per meglio dire, una delle chiavi di lettura più efficaci al servizio della scienza. E ciò nel senso che la scienza di oggi ricorre sempre più spesso alla matematica per mutuarne gli strumenti espressivi e deduttivi, e per impostare rigorosamente le questioni dei fondamenti... <...> Sono tentato di pensare che forse quegli aspetti di certezza e di chiarezza che la matematica possiede abbiano esercitato un forte ascendente su certi filosofi, intenti a ricercare le radici dell'esistente. In questo ordine di idee, mi accade spesso di immaginare la storia della matematica come un filo che scorre nel tempo dell'uomo, segnando la sua ricerca della certezza. A questo proposito mi piace qui ricordare quanto scritto da Freudenthal [...]; egli scrive infatti che il vocabolo che in lingua olandese indica la matematica è stato virtualmente coniato dal mate-

matico Stevino (Simon Stevin, 1548-1620) ed è “Wiskunde”, ovvero la scienza del certo.”

ENRIQUES. Il problema della realtà, [E2], (1911): “... Le Matematiche sono un immenso poema a cui hanno collaborato due millenni di storia, e dove la rigida disciplina della logica sta come freno dell’arte di fronte alla fantasia costruttrice. E il senso della bellezza che guida ognora il geometra nella sua edificazione, si lascia riattaccare alla religiosità che commoveva gli spiriti primitivi dei pitagorici; ancora il sentimento mistico si scopre nella parola di Platone che «Dio geometrizza». D’altronde l’idea del filosofo ateniese esprime un’intima esigenza dello spirito, che questo tende a far valere, proiettando fuori di sé le proprie aspirazioni nel concetto delle leggi naturali.”

*Ora, se per Epistemologia intendiamo: “parte della gnoseologia che studia i fondamenti, la condizione di validità e i limiti della conoscenza scientifica”, mi sembra di poter dire che riguardo all’epistemologia della matematica sia Enriques che Manara vedono la matematica come centrale nell’edificio del pensiero scientifico, ma forse Manara ne accentua fortemente l’aspetto di linguaggio per descrivere la realtà. Invero Enriques “...non accettava il nominalismo di Poincaré né le sue asserzioni riguardo al carattere puramente simbolico degli enti geometrici...”. [Dossier curato da Simonetta Di Sieno e pubblicato nel n. 19-20 di “Lettera matematica pristem”. Federico Enriques e i filosofi neoidealisti, di Paolo Casini ]. [C40]*

*Si legge in Per la storia della logica, [E5], Appendice:*

ENRIQUES. “...Per lui [Henri Poincaré] la questione della geometria euclidea non può avere un senso sperimentale perché nessuna esperienza porta sullo spazio, o sulle relazioni dei corpi collo spazio, ma soltanto sulle relazioni dei corpi fra loro; per conseguenza gli assiomi della geometria euclidea sono semplici convenzioni, o definizioni dissimulate, che servono di premessa alle ipotesi fisiche. «Dès lors – esclama egli (\*) – que doit-on penser de cette question: La géométrie euclidienne est-elle vraie? Elle n’a aucun sens. Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu’une autre; elle peut

seulement être plus commode. Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode...» (\* Science et hypothèse, pag. 67). ...Ora noi abbiamo lungamente discusso e criticato questa tesi, nel cap. IV dei «Problemi della Scienza». Non è lo spazio o i rapporti dei corpi collo spazio che costituiscono l’oggetto della geometria, ma appunto una certa classe di rapporti (spaziali) fra i corpi; pure questi rapporti sono una semplice astrazione di più complesse relazioni fisiche. La geometria, intesa in modo concreto, si prolunga nella cinematica, nella meccanica e nell’ottica, perché le cosiddette esperienze geometriche non sono, in realtà, che esperienze di misura, in cui entrano le proprietà della materia e della luce, e dove tuttavia si prescinde da alcuni elementi, che sembrano statisticamente trascurabili. Ammesso che la geometria sia in concreto soltanto una parte della fisica, i suoi assiomi vengono a figurare accanto alle altre ipotesi, nel sistema scientifico che costruiamo a rappresentare la realtà. Che cosa significa scegliere fra queste ipotesi alcune ed erigerle convenzionalmente a principi rigorosi? A mio avviso c’è qui soltanto un’espressione infelice per rappresentare il riconoscimento dell’arbitrario che è in ogni supposizione, atto di volontà – come abbiam detto – cui viene subordinata l’esperienza.” (pg. 276).

*Invece C. F. Manara, ad esempio nel testo seguente, ma anche in altri, si dichiara d’accordo con la posizione di Poincaré:*

MANARA. La Geometria. Problemi logici e didattici, [M27], (1984): “... Di conseguenza la domanda: La geometria euclidea è vera? per H. POINCARÉ è priva di senso. Al massimo ci si può domandare quale sia la geometria più adeguata per descrivere le esperienze che noi eseguiamo sulla materia o sulla energia e sui loro spostamenti. ...<...> Del resto questa posizione era già stata presa da G.W. LEIBNIZ; invero, secondo le idee di questo filosofo, non vi è spazio assoluto reale, vale a dire che lo spazio non è qualche cosa di definito in sé, ma ha un senso relativo ai corpi, come “ordine delle coesistenze”, così come il tempo è l’“ordine delle successioni”. ...<...> Il lettore si sarà accorto che noi condividiamo le tesi di H. POINCARÉ e di G.W. LEIBNIZ esposte fin qui: pensiamo infatti che solo così si ottenga il rispetto pieno dell’esperienza e del significato di una teoria

fisico-matematica della realtà. Invero, sempre secondo il pensiero di H. POINCARÉ, si può dire in generale di una teoria cosiffatta ciò che è stato detto della geometria: non ha senso domandarsi se sia vera o falsa, ma soltanto se sia adeguata per descrivere in modo soddisfacente le nostre esperienze in un determinato momento della storia ed entro determinati limiti di approssimazione. Pensiamo che da questo punto di vista, cioè nell'ambito di una sistemazione razionale e metodica delle nostre esperienze sui corpi rigidi, la geometria si presenti come il primo capitolo della fisica, cioè come il primo passo sul cammino della descrizione razionale e della deduzione rigorosa di quelle proprietà che ci interessano, sotto un certo punto di vista e per determinati fini...".

*Troviamo in Natura, ragione e storia. Antologia di scritti filosofici, Introduzione di Lucio Lombardo-Radice, [E9], [LR50]: «Enriques insomma, pur usando con maestria come strumento il metodo assiomatico, non accettava allora, né mai accettò nel seguito, la veduta formalista, secondo la quale la scelta di un sistema di postulati sarebbe indifferente per il ricercatore matematico, salva la condizione della compatibilità (non contraddittorietà) dei postulati del sistema arbitrariamente scelto. F. Enriques collegava invece allora, e sempre nel seguito collegò, la geometria alla fisica, concependo la geometria, si può ben dire, come un ramo della fisica; quanto alle diverse scelte di sistemi di postulati, non si limitò ad analizzarne soltanto la struttura logica, ma volle indagarne anche la rispondenza ai dati sensoriali, psicologici, all'attività umana sperimentatrice e alla realtà fisica.» (pg. 4)*

*F. Enriques considerava la geometria "Primo capitolo della fisica", ha scritto e detto molte volte C. F. Manara, che invece, di fronte anche agli sviluppi delle applicazioni della Matematica nel secondo Novecento, accetta una visione più formale del significato della matematica, la vede come linguaggio privilegiato della scienza, quello che ne assicura gli aspetti di certezza e chiarezza cui egli non rinuncia mai definitivamente.*

MANARA. La matematica chiave di lettura della realtà, [M34], (1994): "... Se le conseguenze sono confermate dalla realtà possiamo soltanto concludere che le ipotesi possono essere vere. Questa circo-

stanza ha condotto qualche filosofo della scienza a tentare di definire quest'ultima come "pensiero falsificabile"; io preferisco guardare all'aspetto positivo della ricerca della verità, e quindi parlare di pensiero che cerca la certezza attraverso la spiegazione. Il fatto che le ipotesi che noi formuliamo possano essere smentite, e che di conseguenza occorre spesso ricominciare la ricerca con nuove osservazioni, e con la formulazione di nuove ipotesi, e con nuove deduzioni è soltanto la conseguenza del fatto che non abbiamo altro modo per giungere ad una spiegazione di ciò che osserviamo...<...>. Potremo cercare le ragioni di questo straordinario progresso della scienza matematizzata riflettendo su quella che abbiamo individuata come procedura fondamentale di ogni scienza, quando voglia raggiungere una conoscenza certa, motivata e spiegata nei suoi principi. Abbiamo infatti osservato che la spiegazione, fine ultimo di ogni conoscenza scientifica, viene ricercata formulando delle ipotesi e verificandone le conseguenze; contenuti delle ipotesi non sono direttamente verificabili con l'osservazione e per giungere alle conseguenze occorre passare inevitabilmente per una procedura di deduzione. Ora ci pare chiaro che, quando si adotti il linguaggio della matematica, la formulazione delle ipotesi si riduce nella maggior parte dei casi alla formulazione di relazioni quantitative tra le grandezze che vengono prese in considerazione, e la procedura di deduzione si riconduce al calcolo, cioè alla trasformazione delle relazioni formulate secondo le leggi della sintassi propria dei simboli matematici, per dare loro una forma che permetta la verifica sperimentale. Ora abbiamo visto che l'adozione del linguaggio matematico per la rappresentazione della realtà permette quasi sempre una grande chiarezza e precisione; e la riduzione della deduzione al calcolo permette di rendere questa operazione ineccepibile, ripetibile e verificabile a volontà. A conferma della validità di ciò che diciamo, basti pensare al fatto che i moderni computer permettono di dare a questa operazione una sicurezza ed una velocità che erano impensabili soltanto qualche decennio fa. A nostro parere, in questa circostanza risiedono le principali ragioni che giustificano il successo della matematizzazione...".

MANARA. Note per il corso Problemi religiosi posti dalla filosofia della scienza, [M19], (Inedito, 1979): "...la matematica... <...>... dal Rinascimento

ad oggi è diventata, in modo via via più imponente, il linguaggio della scienza e il quadro ideale della metodologia scientifica. La cosa è tanto più interessante perché non soltanto la matematica, nella sua qualità di linguaggio e di quadro ideale della scienza, ha una funzione in certo senso direttiva su questa, ma anche perché i contenuti scientifici hanno operato una specie di reazione sulla matematica, ponendo dei problemi di linguaggio, dando origine anche a dei problemi metalinguistici e provocando la nascita di nuovi rami della matematica. Vorremmo chiamare linguaggio una simbolizzazione che è dotata di una "grammatica", di modo che i simboli possano essere maneggiati con loro leggi proprie, così da permettere non soltanto di dare informazioni ma anche di fare delle deduzioni."

*O forse, tale diversa accentuazione sta in quello che C. F. Manara individua come un fondamentale carattere distintivo della matematica rispetto alle altre scienze: la necessità di dominare l'infinito.*

MANARA. Epistemologia della matematica, [M33], (Inedito, 1992): "... Quindi, per le scienze della Natura, l'esperienza si presenta come il punto di partenza della conoscenza scientifica ed anche come il tribunale di ultima istanza che convalida (almeno provvisoriamente) o rigetta definitivamente la validità delle ipotesi che noi formuliamo per spiegare l'esperienza stessa.

Da questo punto di vista la matematica non presenta tutte queste caratteristiche: infatti, anche accettando che il punto di partenza sia l'esperienza, anzi un'esperienza molto elementare e chiara nei suoi contenuti (come abbiamo detto), le deduzioni che si sviluppano a partire dalla concettualizzazione delle nostre esperienze non sempre portano a conseguenze direttamente verificabili in concreto; e ci pare che questa circostanza sia essenziale per descrivere la differenza tra la matematica ed il resto del pensiero scientifico...<...>. Ci pare che questa esistenza di insiemi infiniti, con la necessità di dominare insiemi di questo tipo, sia uno dei caratteri che distinguono la matematica dalle altre scienze, in particolare dalle scienze della Natura. Abbiamo visto infatti che, partendo dalla formulazione delle ipotesi, la deduzione conduce a risultati che possono e debbono essere sottoposti al tribunale di ultima istanza dell'esperienza: la verifica sperimentale del-

le conseguenze, la critica degli esperimenti e la ricerca del loro significato, lo sforzo continuo per ideare nuovi esperimenti e nuovi controlli caratterizzano la scienza modernamente intesa. Il continuo travaglio, teorico e pratico, dello scienziato moderno si sviluppa quotidianamente su questi motivi, che ritornano costantemente: osservazione, formulazione di ipotesi, esperimento e controllo della validità delle ipotesi formulate.

Per la matematica queste procedure non sono sempre pensabili, soprattutto perché il controllo sperimentale delle eventuali ipotesi emesse non è possibile in linea di principio: abbiamo visto infatti che uno degli oggetti della matematica è l'insieme infinito dei numeri naturali; ed abbiamo osservato che sarebbe contraddittoria una qualunque enumerazione degli elementi di questo insieme. Questo carattere singolare delle verità matematiche si è manifestato molto presto, col nascere della matematica razionale rigorosa, cioè con la matematica greca. Infatti, incontriamo già negli "Elementi" di Euclide una proposizione tipica, che non è controllabile sperimentalmente: si tratta del celebre teorema in cui Euclide dimostra che l'insieme dei numeri primi è infinito...<...>... Fin qui è stato detto sostanzialmente che cosa non è la matematica: non è una conoscenza che possa raggiungere la certezza (anche specifica e limitata) con il ricorso al confronto con la realtà esteriore: infatti gli oggetti propri della matematica sono in qualche misura inaccessibili; o nel senso geometrico del termine, oppure perché le proposizioni riguardano insiemi infiniti, come quello dei numeri naturali. Ma allora ci si può domandare quale sia l'oggetto specifico della matematica, e con quali mezzi essa consegua la conoscenza del proprio oggetto specifico. Non si tratta soltanto dei sistemi di simboli con sintassi convenzionale, perché altrimenti anche gli scacchi sarebbero matematica. Si tratta quindi di sistemi formali che hanno un fondamento, anche lontano, nell'esperienza del mondo; in altre parole, partono da qualche cosa di dato, di non costruibile da noi in modo perfettamente arbitrario...<...>... Il carattere di cui abbiamo detto, che distingue la Matematica dalle altre dottrine, si incontra immediatamente nella costruzione del concetto di numero naturale; concetto che abbiamo presentato come elementare, nel senso che nasce da un'operazione comune e quotidiana: quella di

numerazione (o conteggio che dir si voglia) degli elementi di un insieme finito. Infatti, è convinzione comune ed invincibile che un insieme finito, per quanto grande sia il numero dei suoi elementi, può essere ampliato; e di qui discende la convinzione che non esista un massimo tra i numeri naturali. Come è noto, si suole esprimere questa convinzione dicendo che l'insieme dei numeri naturali è "infinito". (pg.4).

Sul ruolo del pensiero geometrico. *Nella visione di C. F. Manara è fondamentale l'influenza dello sviluppo del pensiero geometrico sull'intera critica epistemologica della Matematica; F. Enriques ha lo stesso giudizio.*

MANARA. Note per il corso Problemi religiosi posti dalla filosofia della scienza [M19], (Inedito, 1979): "... la geometria...<...>... ha in certo modo catalizzato la crisi evolutiva della matematica e presentato il modello esemplare delle scienze della natura modernamente intese. ...<...>... La dimostrazione della non contraddittorietà delle geometrie non euclidee costrinse i matematici a cambiare le loro idee sul significato della geometria e aprì una crisi sul significato della matematica che ancora nel presente porta le sue conseguenze. Si dovette abbandonare la concezione classica secondo la quale la geometria è una scienza che dice qualche cosa di qualche cosa e che quindi prende i suoi fondamenti dall'osservazione delle cose evidenti e dimostra le cose meno evidenti. ...<...>... Va detto inoltre che questa crisi non è stata limitata ai fondamenti della geometria, ma che essa costituisce soltanto una parte della crisi dei fondamenti della matematica in generale; tale crisi ha coinvolto da una parte i fondamenti della matematica e dall'altra anche i fondamenti della logica".

ENRIQUES. Per la Storia della Logica, [E5]: "... Ora, altre esigenze dello sviluppo delle Matematiche del secolo decimonono concorrono, colla geometria non-euclidea e colla interpretazione positivista delle teorie fisiche, nella critica dei principi evidenti. In prima linea l'esigenza di dare solido fondamento all'Analisi, superando le difficoltà ormai mature del Calcolo infinitesimale e sciogliendo i paradossi offerti dalle serie divergenti, le pseudo-dimostrazioni dei massimi e minimi, delle derivate ecc. Da Abel a Cauchy fino a Weierstrass, in cui culmina l'aritme-

tizzazione delle Matematiche, tutti i grandi analisti sono impegnati in questo lavoro, che riesce infine a sistemare la scienza anche nelle sue parti più delicate, edificandola – con stretto rigore – sulla base del concetto fondamentale del numero intero. In margine all'accennato movimento fiorisce la critica più filosofica (di Bolzano, Du Bois-Reymond, Cantor ...) che ci ha dato una nuova analisi dell'infinito, per mezzo della quale – superando il limite dell'evidenza – è apparso ora, nella sua vera luce, il significato degli assiomi della disuguaglianza...<...>... Ma, nonostante la grande importanza di questi diversi movimenti, che concorrono tutti nella riforma della logica contemporanea, noi riteniamo che questa riforma si affermi pienamente soltanto attraverso la critica più recente dei principi della geometria, per la quale i pensatori matematici acquistano coscienza matura del significato di una rivoluzione compiuta nei secoli." [cap. III, pg. 131]. ...<...>... "L'istrumento della geometria astratta si basa dunque sopra una costante ripetizione dell'*analisi logica dei principi delle teorie deduttive*, in ordine a diversi sistemi di concetti e a diverse forme d'intuizione. E pertanto attraverso questo esercizio i geometri hanno oggi affinato il *senso di ciò che è logico*, fino ad un grado che altri non saprebbe raggiungere". (pg. 141).

*I principii della geometria criticati cui Enriques allude sono indicati da C. F. Manara in Epistemologia della matematica, [33], come "...filoni di crisi: quella della intuizione del continuo, quella della estrapolazione dell'esperienza, quella della nozione di eguaglianza"...*

*Quanto al continuo C. F. Manara scrive:*

MANARA. Epistemologia della matematica, [M33], (Inedito, 1992): "...Per inquadrare in modo soddisfacente la problematica del continuo geometrico nel secolo XIX è forse necessario dare un breve cenno delle crisi evolutive che la geometria ha vissuto in tale periodo; crisi che sono state di grande importanza anche per le altre branche della matematica ed hanno stimolato il cammino di questa scienza verso il suo assetto attuale. Tuttavia, non tutti gli episodi di crisi evolutiva hanno interessato direttamente il problema del continuo: per esempio la costruzione delle geometrie non euclidee non ha avuto conseguenze dirette sulla problematica del continuo geometrico, anche se ha cambiato radical-

mente la concezione della geometria e del suo oggetto. Invece la costruzione della geometria proiettiva ha suscitato dei problemi riguardanti la continuità: è ben noto infatti che Karl G. von Staudt ha fondato “ex novo” la visione della geometria con la sua opera fondamentale “Geometrie der Lage” [Geometrie der Lage, (1847); Beiträge zur Geometrie der Lage, (1856-60)], opera in cui egli introduce sistematicamente la corrispondenza proiettiva tra gli enti della geometria; è pure noto che tuttavia nella dimostrazione del teorema fondamentale della proiettività lo Staudt svolge delle considerazioni che sostanzialmente fanno appello al concetto di continuità della retta, e che possono essere rese rigorose soltanto dopo che tale proprietà sia stata esplicitamente enunciata con appositi postulati.

Tuttavia, vale la pena di osservare che la questione del continuo geometrico nel secolo XIX è strettamente collegata con quella del concetto di continuità di una funzione. Non intendiamo approfondire qui queste questioni, che, ripetiamo, sono marginali rispetto a quelle del continuo geometrico; tuttavia non possiamo evitare di ricordare che la precisazione del concetto di limite e del concetto di funzione continua è stata realizzata con un continuo superamento del ricorso all’immaginazione per costruire invece degli enunciati linguistici, concettualmente ineccepibili, e logicamente rigorosi. Si potrebbe dire che questo superamento è una delle caratteristiche più importanti della matematica del secolo XIX, e viene raggiunto con la precisazione del concetto di limite, con la dimostrazione che l’ipotesi della continuità di una funzione non è sufficiente per l’esistenza della derivata, ed infine con la celebre costruzione, da parte di Giuseppe Peano, di una curva continua che riempie un intero quadrato.

Ma la questione forse più importante è quella che riguarda l’oggetto della Matematica. Quando si pronuncia una frase come “Parigi è la capitale della Francia”, può avvenire che essa non abbia alcun significato per un abitante della Papuasias, che non sa che cosa sia la Francia e, a maggior ragione, non ha l’idea di che cosa sia una città ed una capitale. Ma vi sono molti che capiscono la frase, e che sanno ricollegarla a loro esperienze effettive o possibili; e, al limite, è possibile anche pensare ad un’opera di informazione dell’abitante della Papuasias, in modo che, anche per lui, la frase possa avere un senso che

la ricollega ad un’esperienza, anche se solo possibile.

Quando io pronuncio una frase come “due più tre è uguale a tre più due” parlo soltanto di concetti astratti, che tuttavia possono avere un riscontro in certe esperienze passate o possibili. Ma la validità generale della frase, la sua legittimità “erga omnes”, in ogni caso, passato, presente e futuro, ha un altro fondamento, che occorre mettere in chiaro... <...>...”

*E sull’apporto delle idee di F. Klein:*

MANARA. Epistemologia della matematica, [M33]: “...Concluderemo le considerazioni sull’importanza del metodo in geometria ricordando l’apporto essenziale che, in questo ordine di idee, è stato dato da Felix Klein; l’opera in cui questo matematico ha esposto le sue idee in proposito è ormai diventata classica, ed è spesso citata con l’espressione “Programma di Erlangen”; essa infatti contiene la prolusione programmatica che il Klein fece ai suoi corsi presso l’università tedesca di Erlangen [1872 – Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen – Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti]. In questa dissertazione il geometra tedesco istituisce una classificazione metodologica dei vari tipi di “geometria”; e consegue questo scopo presentando ognuna di queste “geometrie” come la ricerca di proprietà invarianti delle figure di fronte a certi gruppi di trasformazioni. Pertanto, il Klein risolve metodicamente quel problema .... della ricerca dell’obiettività, delle proprietà delle figure indipendentemente da ciò che appare attraverso la loro rappresentazione convenzionale. Si potrebbe dire che il Klein chiarisce il fatto che un gruppo di trasformazioni immerge una figura in una certa classe di equivalenza; quindi il concetto di “uguaglianza” tra figure viene presentato come relativo alle trasformazioni alle quali intendiamo sottoporre le figure stesse, ed i vari capitoli della geometria vengono metodicamente classificati e messi in relazione tra loro in base ai gruppi di trasformazioni: più precisamente una data geometria viene qualificata non dai propri oggetti, come vorrebbe una visione elementare e superficiale, ma dalle proprietà invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni che fonda la geometria stessa. Vedremo in seguito come numerose ed importanti siano le conseguenze di questa impostazione teorica.

Qui ci limitiamo ad osservare come anche queste illuminanti idee kleiniane traducano, con i formalismi dell'algebra e della logica formale, la metodologia fondamentale che, come abbiamo visto, era stata analizzata da Aristotele.”

*E infine*

ENRIQUES. Per la Storia della Logica, [E5]: “... La forma logica dei postulati nella recente critica dei principi della geometria. Non basta riconoscere che l'evidenza dei principi nasconde dei presupposti di carattere sintetico ed obiettivo. La critica deve fare un nuovo passo, forse più difficile, apprendendo a dare forma logica ai postulati assunti a base di una teoria deduttiva; e il pieno valore di quest'esigenza, meglio che nell'Aritmetica, si manifesta nella Geometria. ... <...>...Pongasi che un geometra, tenendo conto delle investigazioni di Riemann e Helmholtz, o anche di quelle di Klein in rapporto colla geometria proiettiva, si appresti a porre con tutto rigore i fondamenti della propria scienza: ciò che esige un concetto preciso dell'ordinamento di una teoria deduttiva. Quali criteri sarà indotto ad assumere?” (pg. 160).

*Vorrei concludere questo ideale dialogo sul pensiero epistemologico, citando Federigo Enriques e la volontà del Vero, di M. Castellana, [CS42], (2014):* “Senza esagerare, si potrebbe dire che ogni singola tappa del pensiero epistemologico enriquesiano è caratterizzata da una particolare rivisitazione dell'impostazione kantiana per cogliere il valore della 'veduta sintetica' che mette in atto il sapere scientifico attraverso i suoi continui sforzi unificanti; questo 'Kant reinterpretato assai liberamente' ha permesso ad Enriques di farne un particolare uso euristico in base agli obiettivi che man mano si proponeva, ma è sempre il risultato di una presa di coscienza di una sua rimodulazione sul terreno che gli è più consono, quello della riflessione epistemologica scaturita dalla presa d'atto dello *status quaestionis* in ambito scientifico. Come risultato di tale approccio è stata la rilettura critica dell'Ottocento scientifico e del ruolo che hanno avuto rilevanti figure di scienziati protagonisti dei cambiamenti più significativi; e i *Problemi della scienza* [E1] procedono in tal senso in quanto mirano a cogliere le tracce per lo più non evidenti della presenza kantiana e del suo ruolo propulsore nell'ambito più

strettamente scientifico, fuori della filosofia stessa. Le istanze più innovative del criticismo kantiano per Enriques sono 'penetrate' nei luoghi di produzione della conoscenza scientifica, ne hanno 'agitato' le posizioni acquisite, ne hanno cambiato in maniera strutturale i percorsi...”

*E alla fine di questo dialogo, vedo una “armonia nascosta” nell'impegno intellettuale dei due studiosi: entrambi possono essere considerati “matematici – filosofi”; entrambi hanno sostenuto il valore del sapere scientifico, F. Enriques contro l'ambiente filosofico idealistico che ne negava la sostanza di vera conoscenza, C. F. Manara sostenendone tutta la dignità di sapere autonomo all'interno di una ben strutturata cultura cattolica neoscolastica.*

Sulla logica. *Il titolo completo del testo ripetutamente citato è “Per la storia della logica. I principi e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici” [E5]: come scrive M. Castellana riguardo a I problemi della scienza, [E1], e come richiama il titolo dell'opera, “la riflessione tende a cogliere lo sviluppo del senso critico del matematico che facendo matematica riflette sul metodo e sul significato.”*

*Credo sia questo il motivo per cui il testo è profondamente apprezzato da C. F. Manara. Ma per quanto riguarda la logica matematica e il lavoro della scuola di Peano, le posizioni dei due matematici differiscono nettamente. Scrive F. Speranza, in Il progetto culturale di Federigo Enriques, [S39]: «...Nello stesso articolo [Insegnamento dinamico, [E4]] Enriques insiste su un argomento che gli procurò non pochi contrasti con la scuola di Peano, e probabilmente una certa incomprendione nei decenni successivi: il significato della logica. Qui mette in rilievo la distinzione fra la “logica in piccolo” e la “logica in grande” (usiamo le sue espressioni). La prima è l'analisi raffinata del pensiero esatto, potremmo dire che è la logica formale; la seconda è lo studio delle connessioni organiche del sistema [della scienza], e dice .... temo che, nelle preoccupazioni dei nostri educatori matematici, la logica in piccolo tenga troppo poco posto in confronto alla logica in grande!*

Si sa che Enriques polemizzava con i logici a proposito di quelle che egli riteneva eccessive raffinatezze. Dal punto di vista dei decenni immediata-

mente successivi, la sua posizione appare decisamente ‘obsoleta’, e non c’è dubbio che sottostimasse la logica matematica. Le sue polemiche ci possono però far riflettere. Può essere corretto ritenere che la logica matematica faccia parte della logica formale; però sembra semplicistico identificare la logica (senza aggettivi) con la logica matematica, non importa quanto sia preponderante quest’ultima. Riprendendo il discorso di Enriques, possiamo dire che questo ci induce a trascurare i problemi della ‘logica in grande’. Oggi, alla luce di una epistemologia più problematica, la posizione di Enriques riacquista attualità: per lo meno, come avvertimento a coloro che avevano creduto di poter ridurre l’epistemologia della matematica alla logica.»

*E si legge in* La logica tra le due culture, di Gabriele Lolli, [L49]: «... Enriques è stato uno dei teorici più consapevoli e più lucidi del metodo assiomatico moderno, quello che egli chiamava “la riforma della logica contemporanea”. [Con questa dizione egli intendeva la nuova concezione dell’organizzazione delle scienze deduttive. Si veda G. Lolli, *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino 2004].

Ma per quel che riguarda la logica simbolica, nella tradizione che attraverso Boole arrivava a Russell e a Peano, non era particolarmente disposto a riconoscerle un ruolo decisivo. La vedeva come la costruzione di un linguaggio nuovo che sopperisse alle imprecisioni e insufficienze del linguaggio ordinario.

Rispetto a questo obiettivo, mentre apprezzava i contributi sia pur preliminari di Boole, era critico sia nei confronti di Russell che di Peano. In Peano “ci viene insegnato l’uso del linguaggio ideografico al modo stesso che si tiene nell’apprendimento d’una lingua vivente o d’una stenografia, ma non si trova un esame esplicito approfondito di ciò che i simboli sono presi a significare”. Per Russell i rapporti logici si riferiscono solo alle “più generali relazioni che possano intercedere fra gli enti di ogni modo possibile”, ma “il loro significato non si riferisce all’analisi del nostro pensiero”. Sono metafisica e non analisi del pensiero. Invece “Per lui [Enriques] .... la logica è l’insieme delle leggi che regolano un processo mentale, che solo per finzione può essere rappresentato nella forma statica d’un simbolismo: spiegare i rapporti logici significa dunque riconoscere le operazioni della mente che valgono a significare”.»

*E infine*

MANARA. F. Enriques. Didattica, [M25], (Inedito, 1981): “... In lui la Matematica era soltanto un aspetto del suo modo di pensare e della sua filosofia, intinta di un eclettismo razionalistico che però non gli faceva dimenticare i problemi della vita reale e della storia. Anzi lo metteva in contrasto con alcune correnti del suo tempo, tanto dal punto di vista del positivismo che dal punto di vista del formalismo logico (si veda la garbata polemica con Burali-Forti)”.

*In realtà la polemica con la scuola di Peano non sembra essere stata così “garbata”! Mentre C. F. Manara dimostra profondo apprezzamento per l’opera scientifica e la figura di G. Peano, di cui apprezzava anche le idee didattiche.*

MANARA. Giuseppe Peano e i fondamenti della Geometria, [M32], (1991): “... Volendo cercare di caratterizzare, anche in modo sommario e superficiale, le linee fondamentali del lavoro scientifico di Peano si potrebbe dire che la sua fu una ricerca costante della semplicità, della concretezza ed ovviamente del rigore.... Interessante, per dipingere il carattere di Peano, è la sua definizione di rigore: esso consiste nel dire soltanto delle cose vere. Ritengo di dover sottolineare quell’avverbio “soltanto”, che si ricollega da una parte all’altro carattere del suo pensiero, e cioè alla ricerca della semplicità; e da un’altra parte si ricollega anche alla sua opera didattica, che mira a presentare i concetti matematici secondo la linea più diretta e più semplice.” *E ancora*: “...[nel Calcolo Geometrico]...<...> mi pare di poter vedere il germe di vari problemi dei quali Peano si occupò nel seguito e quasi sino alla fine della sua vita. Tra questi problemi vorrei ricordare anzitutto quello... della creazione di un sistema di simboli atti a rappresentare in modo, per così dire, “diretto ed immediato”, gli enti della Geometria e le loro relazioni; ed un secondo, ovviamente collegato al primo, di creare una sintassi di questi simboli, un’Algebra della logica, sulla scorta dei lavori di George Boole, in modo tale che la risoluzione dei problemi geometrici prendesse gli stessi caratteri di quella dei problemi algebrici: cioè si riducesse alla applicazione rigorosa delle regole di sintassi dei simboli scelti.”

*E nella sua visione programmatica di educazione alla razionalità, C. F. Manara indica ripetutamente l'importanza e l'interesse dell'insegnamento di elementi di logica formale (ovviamente in modo adatto ai vari livelli di studio).*

## 2. – Sulla Storia della Matematica

*Sul ruolo della storia nella visione di F. Enriques riporto le sue parole nella famosa Prefazione alle Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche [E3, (1915)].*

ENRIQUES. “... Una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia. La rigida distinzione che si fa di consueto fra scienza e storia della scienza, è fondata sul concetto di questa come pura erudizione letteraria; così intesa la storia reca alla teoria un estrinseco complemento d'informazione cronologica e bibliografica. Ma assai diverso significato ha la comprensione storica del sapere che mira a scoprire nel possesso l'acquisto, e si vale di quello per chiarire il cammino dell'idea, e concepisce questo come prolungantesi oltre ogni termine provvisoriamente raggiunto. Una tale storia diviene parte integrante della scienza, ed ha posto nell'esposizione delle dottrine....<...>... Il richiamo al passato non si disgiunge qui dall'interesse del presente, che vi attinge solo la visione di una più larga realtà, e la vivifica ricreando la scoperta.”

*Si legge in Natura, ragione e storia. Antologia di scritti filosofici, Introduzione di L. Lombardo-Radicce, [E9], [LR50]: « La filosofia di Enriques ... è assai più che una enunciazione di principi e di vedute filosofiche un programma di lavoro culturale. Dall'orientamento filosofico del N. discende necessariamente il suo interesse per la storia della scienza, la sua esigenza di seguire il “cammino dell'idea scientifica.” Infatti, per Enriques, “l'uomo, trova la verità totale nella serie di tutti i sistemi possibili, e quindi nell'evoluzione storica, in cui le teorie si fanno e si disfanno con il risultato di procurarci una conoscenza sempre più vasta ed esatta”; per il N. cade perciò, pur senza pervenire alle indiscriminate identificazioni di tipo idealistico, “la rigida distinzione che si fa di consueto fra scienza e storia della scienza”; “una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia” ».* (pg. 59 e segg.)

*Certamente nei testi di F. Enriques vi è un sapore di storicismo idealistico – non per nulla sulla Storia della scienza vi fu una certa intesa fra Enriques e Giovanni Gentile – lontanissimo dalla visione neoscolastica di C. F. Manara, che tuttavia condivide a fondo l'idea di radicare la storia della matematica nella storia del pensiero stesso. Direi che C. F. Manara non accentua l'aspetto di pensiero storicistico, ma vede la storia della matematica come fondamentale per tale scienza per capire se stessa e i propri metodi. Un'altra “riposta armonia” sta appunto nel gusto che entrambi i matematici – filosofi possiedono per la riflessione storica sui metodi.*

MANARA. F. Enriques. Didattica, [M25]: “... Orbene proprio anche in questo campo la visione di Enriques si presenta come provvista di una grandissima modernità, perché la visione sua è quella della matematica come momento del pensiero e della storia, come manifestazione di una tendenza razionalizzante, che non è razionalismo perché non vuole invadere tutto, ma è senz'altro uno degli aspetti più importanti della condizione umana...” *E in La mathématique face à son histoire, [M29], (1987): “Si potrebbe quindi formulare a noi stessi la domanda se non sia possibile che la matematica possa trarre dalla conoscenza e dallo studio della propria storia una migliore conoscenza di se stessa, ed una maggiore consapevolezza della propria importanza culturale.” Nello stesso testo C. F. Manara cita un passo arguto di Enriques:*

ENRIQUES. Signification de l'histoire de la pensée scientifique, [E6]: “... La plupart des hommes qui ont voué leurs efforts au progrès de la science ne professent à l'égard des recherches historiques sur l'oeuvre des savants d'autrefois qu'un sentiment de considération très tiède. D'habitude ce sont les savants, parvenus au seuil de la vieillesse, qu'on voit, las d'étudier des choses nouvelles, se tourner vers le passé pour en exumer les titres de noblesse de leurs propres découvertes. C'est un hommage reconnaissant, rendu aux maîtres disparus, et peut-être aussi une recommandation discrète aux jeunes qui entrent dans la carrière de ne pas condamner à un trop prompt oubli ce qui, dans l'avancement impétueux de la science moderne, sera, déjà demain, une époque révolue”.

*Invero nessuno dei due matematici filosofi scrive i lavori storici iniziando in tarda età, anzi: ancora nella già citata Introduzione di L. Lombardo-Radice ([E9], [LR50]) leggiamo: “... Per quanto l’interesse di E. alla storia della scienza sia precoce...le sue opere di maggior respiro nel campo della storia della scienza appartengono all’età più matura...<...>... Un filone per così dire intermedio di ricerca, che dà i suoi frutti molti anni prima, è la storia della logica: com’è del resto naturale, perché E., per la sua stessa impostazione antiformalistica, per il legame che poneva fra principi logici e sviluppo della ricerca matematica e naturalistica, era portato, nel corso stesso della sua indagine filosofica, a esaminare da un punto di vista nuovo, originale e storico, molti problemi di logica. ...<...>... Vi era...una singolare congenialità tra la *forma mentis* di E. e lo spirito della scienza greca. Il gusto per le idee semplici e profonde, per la critica dei principi, per la deduzione di teorie elevate a partire dagli “elementi”, e insieme lo scarso interesse per gli sviluppi analitici ... facevano della scienza greca il terreno prediletto della sua indagine storico-scientifica...”. (pg. 59 e segg.).*

*C. F. Manara scrive due agili libri di storia della matematica, leggibili da studenti non specialisti, nel 1975 e nel 1976: [M17] Metodi della scienza dal Rinascimento a oggi, e [M20] Momenti del pensiero matematico (con Gabriele Lucchini); il primo è centrato sulla nascita della scienza moderna, che C. F. Manara colloca nel Rinascimento; il secondo è un’antologia commentata di scritti di matematici, a partire da Euclide.*

*Lo scritto che chiude l’antologia è L’errore nelle matematiche, di F. Enriques [E8]. Molti altri interventi di Manara negli anni riguardano figure di matematici per lui particolarmente significative dal punto di vista del metodo: Boscovich e il problema del continuo, Galilei e il metodo scientifico, Leonardo e la scienza del Rinascimento, Pascal e il rapporto fra il pensiero scientifico e il pensiero filosofico – religioso, Hilbert e l’assiomatizzazione moderna, Saccheri e l’inizio del lavoro critico sui fondamenti della geometria, Peano e i fondamenti della logica, Enriques stesso e il significato della storia.... I testi, di vario livello di scrittura corrispondente a diverse occasioni, sono tutti disponibili nel sito dedicato.*

*Sulla profonda ammirazione per la matematica greca e sulla considerazione della scienza rinascimentale Enriques e Manara hanno lo stesso atteggiamento.*

ENRIQUES. Signification de l’histoire de la pensée scientifique, [6]: “... Toute l’histoire de la pensée grecque présente une unité merveilleuse si on sait l’interpréter du point de vue de l’esprit profond qui l’anime et si l’on creuse la signification scientifique des idées : la même question qui a hanté les premiers penseurs, la question de la « nature des choses » c’est-à-dire le problème de la matière, domine toute l’évolution ultérieure...<...>... Tout naturellement on passe ainsi à l’idée que les croyances du passé et les formes historiques qui en sont l’expression doivent être considérées comme des expériences inconscientes et qu’en tant que telles, elles gardent une valeur de « vérité provisoire » même lorsque la raison ne réussit pas à les expliquer.”

MANARA. F. Enriques. Didattica, [M25]: “... La visione dei classici in Enriques, insieme con l’appassionata difesa dello studio della lingua greca che la accompagna, ha soprattutto un ufficio di continuità e di chiarezza. Abbiamo detto, è la ricerca dei problemi perenni dell’uomo e della scienza, è il fastidio della nascita di problemi falsi dovuto alla presunzione o

*Federigo Enriques<sup>1</sup>, uno dei più grandi matematici italiani degli ultimi cento anni,<sup>2</sup> è autore delle pagine (tratte da Le matematiche nella storia e nella cultura) che abbiamo riportato come appendice alla « prefazione ». Presentiamo qui un passo<sup>3</sup> che appare in certo modo esemplare per capire molte cose che della matematica difficilmente vengono comprese da chi conosce questa scienza soltanto dall’esterno ed attraverso i trattati.*

*Il titolo di questo passo, L’errore nelle matematiche, potrebbe essere considerato come parzialmente paradossale, da chi concepisca la matematica come la scienza esatta per antonomasia e quindi priva di errori, nel senso banale del termine.*

*Infatti la deduzione rigorosa, a volte addirittura pedante, viene considerata come una delle caratteristiche fondamentali della matematica, caratteristica che distingue questa scienza da altre che invece lasciano il posto alla ignoranza ed all’errore.*

*Sta di fatto invece che nel suo divenire, nel suo formarsi, nel momento della invenzione e della ricerca la matematica non può fare a meno della intuizione e della fantasia e che molto spesso i matematici cadono in errore.*

*Come si vedrà, Enriques presenta vari casi in cui i matematici sono caduti in errori per varie ragioni; ma paradossalmente egli osserva che l’errore costituisce, oltre che un tributo necessario alla natura umana ed alle sue debolezze, anche uno stimolo per la ricerca, per la critica; si potrebbe dire che spesso l’errore è stato addirittura « felice » perché si è ridotto semplicemente a trascurare certe precauzioni logiche che avrebbero imbrigliato la fantasia del ricercatore e del creatore di una nuova teoria.*

Figura 1 – F. Enriques. L’errore nelle matematiche.

all'ignoranza storica, è il fastidio per i "parvenus" culturali, che pretendono di presentare sul tappeto come assolutamente nuovi dei problemi che sono vecchi quanto la stessa umanità pensante, e presentano poi delle soluzioni che sono ancora meno vive ed originali delle antiche, per non dire più formaliste e più superficiali. In questo senso anche il suo costante attaccamento alla filosofia ed alla storia, in quanto garanzie culturali della vivezza dei problemi della matematica, ha una significazione molto moderna.

Di fronte a chi presentava certe cose del nostro tempo come delle scoperte dell'ultima ora, egli ricordava quasi con una punta di ironico richiamo il fatto che tali problemi erano già stati investigati, e forse con ben altra acutezza se pure con minore apparato formale, dalla Matematica greca. Ed in questo stava la sua appassionata ricerca dei classici, e di colui che cerca i problemi perenni dello spirito e non quelli caduchi, i problemi vogliamo dire che sono di ieri, di oggi e di domani perché sono problemi dell'uomo in quanto tale. Tuttavia d'altra parte il suo rispetto per la storia e per l'intelligenza dell'uomo lo portava ad una sorta di antipatia per le formulazioni fisse, per le presentazioni "di scuola", e lo portava quasi naturalmente a non accettare le rivendicazioni nazionalistiche proprio quando sospettava in esse una chiusura artificiale alla suprema libertà dello spirito..."

*E ancora: entrambi pensano che l'insegnamento della Matematica, ad ogni livello in modo appropriato, possa essere illuminato da una prospettiva storica. Come non ricordare le belle note storiche dei testi di Geometria di Enriques?*

ENRIQUES. Signification de l'histoire de la pensée scientifique [E6]: "...La science est un développement d'idées qui naissent d'idées précédentes et s'enchaînent à celles-ci. Sur le terrain de la psychologie individuelle cela implique la nécessité de procéder dans l'enseignement, en allant du degré inférieur au supérieur, du connu vers l'inconnu. D'un point de vue général et social on peut donc dire que la compréhension de la science suppose toujours un milieu historique possédant une certaine culture et la plus haute vision qu'on puisse avoir de la science est, en somme, la vision historique de son devenir." (§15).

MANARA. Dimensione storica nell'insegnamento delle scienze, [M22], (1979): "... Purtroppo questa

impostazione storica non è sempre facile, e spesso neppure possibile, perché il tempo manca per una trattazione specifica e questa non viene spesso recepita dal discente nella sua importanza e nella sua portata. Pensiamo tuttavia che si debba fare uno sforzo in questa direzione, perché crediamo che questo atteggiamento aiuti anche a vedere i problemi matematici come nati da certe esigenze scientifiche e culturali quasi ineluttabili dell'evoluzione del pensiero umano...<...>... Si potrebbe pensare per esempio all'importanza della svolta che è stata fatta dalla matematica e addirittura dalla scienza dell'Occidente, quando in questa parte del mondo sono state introdotte le convenzioni arabo-indiane, per la rappresentazione dei numeri....pensiamo anche soltanto a due fatti: la possibilità di rappresentare un numero intero di grandezza qualsivoglia, e la possibilità di dare delle leggi comode e chiare per operare su numeri qualunque. Ancora, ...<...>... [il progresso avvenuto con] l'invenzione della geometria analitica. Si potrebbe arrestarsi a lungo per commentarlo; ed oso dire che sarebbe bene che i giovani discenti ne fossero consci, perché altrimenti essi si abitueranno a utilizzare degli strumenti teorici che a loro appaiono come del tutto naturali e che invece hanno richiesto secoli di travaglio e di lavoro per essere costruiti..."

*Termino questo paragrafo con le considerazioni nel contributo di M. Castellana: Federigo Enriques e il metodo storico in filosofia della scienza, [CS41], (2004): "...Il significato della storia del pensiero scientifico porta a termine un progetto di ampio respiro critico-problematico iniziato con i Problemi della scienza, [1], teso a recuperare nella sua globalità il valore teoretico della conoscenza scientifica e di quella matematica in particolare, attraverso un costante impegno rivolto a chiarirne i metodi, i processi e i risultati per comprenderne gli orientamenti e i cambiamenti di rotta. È un percorso sin dall'inizio essenzialmente storico-epistemologico, basato su una unitarietà di fondo teso a dare un contributo alla questione dei fondamenti delle scienze durante un periodo attraversato in questa problematica da alterne vicende..."*

*Ebbene, in un ambito filosofico-metafisico diverso entrambi i matematici – filosofi sono impegnati a testimoniare il valore teoretico della conoscenza matematica e il contributo fondamentale della storia...*

### 3. – Pedagogia e didattica

Insegnamento dinamico – Ruolo dell'errore – Intuizione e rigore – Genesi psicologica del pensiero matematico – Valore sociale della scienza

Insegnamento dinamico – Ruolo dell'errore – Intuizione e rigore. *Molti sono i passi dei suoi scritti in cui C. F. Manara ricorda e descrive il metodo didattico di F. Enriques coi suoi studenti e allievi. Sul progetto pedagogico di Enriques così si esprime C. F. Manara.*

MANARA. F. Enriques. Didattica, [M25]: "... La preoccupazione di Enriques nell'opera didattica manifesta la sua modernità e anzi la sua perenne vitalità nella visione di ciò che egli chiama "Insegnamento dinamico" [E4], nella famosa prefazione programmatica della serie IV del "Periodico di Matematiche" (1921). In questo senso si potrebbe dire che l'opera di Enriques è di tale statura che la moderna tendenza all'insegnamento attivo, e tutte le prediche dei pedagogisti che sono venute in seguito, ci appaiono come delle stanche ripetizioni di ignari epigoni. Si trovano nella prefazione citata delle frasi che dimostrano chiaramente come la sua opera fosse sempre diretta a stimolare nel suo uditorio la costruzione in proprio dei concetti e il rispetto della acquisizione autonoma di una sistemazione della scienza. In questo la visione di Enriques prendeva le mosse dalla sua conoscenza della storia e dalla sua filosofia." *E ancora:*

"... Il ruolo dell'errore viene visto in una dialettica che ne fa una componente essenziale del progresso della scienza; beninteso tuttavia si deve trattare di un errore, per così dire, "intelligente" o meglio, commesso da una persona intelligente. In pratica si direbbe che qui Enriques ha fatto il proprio autoritratto, nel senso che non pretendeva affatto di non errare mai, anche se qualche sua affermazione sulla "evidenza" di certe proposizioni possono fare pensare ad una certa affrettatezza od ad una certa presuntuosità nel credere alla propria intuizione, indipendentemente dal ragionamento. Tuttavia la sua immediata adesione alle verità o il suo pronto ricredersi dalla apparenza, il suo continuo scavare, in se stesso e negli altri, il suo continuo sottomettere a critica il proprio pensiero per ricercare l'essenziale, fa delle sue considerazioni sull'errore una lezione di

didattica fondamentale; perché il grande maestro – si potrebbe dire in modo paradossale – non è soltanto quello che insegna la ricerca della verità, ma soprattutto l'emendamento dall'errore. ...<...>...

In questo senso tuttavia c'è un'ulteriore lezione didattica da trarre dalle sue parole, perché l'errore non deve essere presentato come uno scandalo, così come non deve essere tale da bloccare lo sviluppo del pensiero, tanto del singolo che della storia della scienza. Al di là della lezione di "morale" che può essere tratta dal fatto che ciascuno di noi si accorge di cadere nell'errore oppure viene avvertito di questa caduta, vi è anche l'aspetto di stimolo dinamico che la caduta nell'errore può dare ad una precisazione dei concetti, ad una distinzione ulteriore all'uso appropriato di dati simboli, alla acquisizione di rette tecniche di ragionamento e soprattutto di induzione. Perché se è primariamente la cosiddetta intuizione che ci fa cadere in errore e se questa intuizione non è altro che un procedimento incosciente e brevissimo di induzione, allora la disciplina di questo procedimento è quella che soprattutto va imposta a se stessi per meditare bene sugli errori del passato (tanto nostri che della storia) per non cadere più in errori nel futuro.

In questo ordine di idee la scoperta di un errore è stimolante così come la scoperta dei paradossi e delle antinomie della logica matematica e non matematica lo è stata per la storia di questa scienza. Lungi dal fermare il progresso, la scoperta delle antinomie ha costituito lo stimolo per chiarire delle regole di sintassi, per indagare il significato di certe dimensioni semantiche e per giungere sostanzialmente a visioni più feconde e più vaste. Quindi si potrebbe anche pensare all'errore in termini semplicemente di non completa enunciazione delle ipotesi, così come nel secolo XIX molte dimostrazioni vennero classificate come "erronee" semplicemente perché certe ipotesi sulle quali esse si fondavano non venivano esplicitamente enunciate e quindi i teoremi stessi si trovavano in "contraddizione" quando venivano trovati dei controesempi.

Di questi "errori" Enriques non ha mai tenuto conto, perché era del parere che senza una certa dose di "buona fede" non vi fosse alcun teorema matematico rigorosamente enunciato, essendo impossibile enunciare ogni volta tutta la portata delle ipotesi, molte delle quali risultano evidenti dal con-

testo. Va rilevato tuttavia che anche questi cosiddetti errori sono utili nel senso che la necessaria precisazione delle ipotesi conduce a un chiarimento degli enunciati non soltanto, ma anche delle procedure di dimostrazione e di induzione...” (pg. 5).

*Il ruolo centrale dell'errore nella filosofia di F. Enriques è stato ad oggi molto chiarito e studiato. Enrico Castelli Gattinara, in [CG44], illustra l'influenza del pensiero epistemologico di Enriques sul pensiero di Gaston Bachelard, "...mostrando il profondo accordo fra i due studiosi...<...>... Proprio grazie alla loro riflessione sull'errore, i due autori contribuiscono a formare una teoria della conoscenza approssimata e una concezione dinamica, pluralista e storicamente aperta della realtà scientifica...". Molti anni dopo aver scritto "Insegnamento dinamico", F. Enriques riprende il tema dell'errore nell'insegnamento, passando da considerazioni filosofiche a considerazioni didattiche:*

ENRIQUES. Signification de l'histoire de la pensée scientifique, [E6]: "... Platon a dit admirablement dans le « Thèète » combien le troublait « cette passion de par laquelle il nous arrive parfois de juger à faux ». Car le fait que nous nous trompons et que nous voyons les autres se tromper met en cause la confiance que d'instinct nous avons en notre raison. D'où le besoin d'« expliquer l'erreur » c'est-à-dire de pouvoir rendre compte des causes pour lesquelles la pensée en quête de vérité a pu se tromper. ...<...>... Réduire l'erreur à une distraction de l'esprit fatigué, c'est ne considérer que le cas du comptable qui aligne des chiffres. Le champ à explorer est bien plus vaste, lorsqu'il s'agit d'un véritable travail intellectuel. Le professeur sait que dans l'art de l'enseignement rien n'est plus important que de comprendre pourquoi tel élève a fait telle faute. Et bientôt le professeur apprendra à distinguer les fautes auxquelles il convient de chercher une raison de celles qui à proprement parler ne sont pas des erreurs, mais des affirmations gratuites, faites, sans aucun effort de pensée, par des « bluffeurs » qui comptent sur la chance de « deviner du coup » ; dans ce dernier cas l'entendement n'y est pour rien. Quant aux erreurs proprement dites qui parfois se rapportent à l'insuffisance intellectuelle d'un individu, mais qui dans les cas les plus caractéristiques se présentent comme des étapes naturelles

de la pensée dans son effort vers la vérité, le maître saura en évaluer l'importance éducative. Ce sont des expériences didactiques qu'il parachèvera, en encourageant l'élève à découvrir de lui-même la difficulté qui s'oppose au jugement juste et par conséquent à profiter de l'erreur même pour apprendre et se corriger. Nombre d'erreurs d'espèces différentes sont autant d'occasions d'acquérir des lumières nouvelles. Par exemple: celui qui recourt à l'extrapolation pour étendre les résultats d'observations faites dans un champ limité, s'expose à ce que les faits ultérieurement observés lui donnent un démenti, mais sans ce risque aucune exploration scientifique ne serait possible. Et encore, l'expérimentateur qui réfléchit sur les circonstances grâce auxquelles un certain ordre de phénomènes parvient à tel aspect prévisible, apprendra, à ses dépens, qu'il ne suffit pas d'avoir reconnu les différentes causes en jeu, mais qu'il faut encore évaluer l'ordre de grandeur que pourront atteindre les effets produits par chacune de ses causes: sinon le résultat pourrait décevoir les prévisions apparemment les mieux fondées. Bref on ne saurait marcher sans apprendre qu'à chaque pas on court le risque de tomber. Mais mieux vaut avancer en faisant des chutes que de se sauvegarder en renonçant à tout mouvement...” (pg. 16).

*E così continua C. F. Manara:*

MANARA. F. Enriques. Didattica, [M25]: "...La considerazione della genesi dell'errore e del suo ufficio nel progresso della scienza ha anche dei riflessi didattici non trascurabili. Infatti la valutazione della personalità del giovane è anche troppo spesso fatta sui suoi errori. Dovrebbe l'insegnante tener conto del fatto che la correzione dell'errore è una delle fasi più importanti della educazione e della formazione scientifica, o meglio addirittura della formazione globale dell'uomo.

Tutto quanto si fa nella scuola dovrebbe essere diretto alla correzione dell'errore ed alla convinzione del fatto che l'errore è ineliminabile dal pensiero, ma che deve essere non condannato in blocco come tale, ma assunto dialetticamente come punto di partenza per una ulteriore ricerca verso l'avvicinamento alla verità, che del resto integralmente non verrà mai raggiunta, pur nella convinzione beninteso che ci siano delle costanti della conquista del pensiero umano che non possono essere ripudiate.”

*Un tema su cui i due matematici filosofi si interrogano in tutto il corso delle loro riflessioni è quello del rapporto intuizione-logica nell'insegnamento.*

Così scrive F. Speranza in [S39]: «... Un'altra contrapposizione che Enriques combatte (che si ripresenta in varie forme anche oggi) è quella fra matematica pura e matematica applicata. "Quando [...] si discute dei fini dell'insegnamento, contrapponendo uno scopo utilitaristico a uno scopo formativo, [...] [si] perde di vista che, finalmente, la cosiddetta applicazione di una verità scientifica implica pure una capacità applicativa, che la vita domanda appunto di formare. E la polemica antiutilitaria di coloro che esaltano il valore artistico della scienza come valore in sé disconosce a sua volta che l'interesse pratico (nella vita degli individui come nella storia della società) può ben creare gli oggetti cui si volgerà la contemplazione artistica [...]. Voglio dire che se in un certo senso ogni scuola professionale è anche – in qualche grado e modo – formativa, per contro la scuola più eminentemente formativa deve sapersi valere delle applicazioni pratiche [...]" [Insegnamento Dinamico]. Enriques rifiuta anche la contrapposizione fra educazione all'intuizione e alla logica nell'insegnamento matematico: "Anche la domanda consueta, se le Matematiche debbano educare piuttosto l'intuizione o la logica, è viziata da una imperfetta visione del valore dell'insegnamento. Infatti il presupposto di codesta domanda è che logica e intuizione si lascino separare come facoltà distinte dell'intelligenza, laddove esse sono piuttosto due aspetti inscindibili del medesimo processo attivo [...] [...] un'educazione logica (anzi la più appropriata per le menti poco disposte ad astrarre) è pur contenuta nell'esercizio dell'intuizione [...]" [Insegnamento Dinamico]».

*Ecco come Leonardo Sinisgalli, matematico, ingegnere, poeta, scrittore, umanista descrive poeticamente un fenomeno fisico – geometrico (in Mosche in bottiglia, [SI51], 1975):*

OTTICA. Penetra un raggio ramingo, – fruga tra i cocci, si flette, – si sfrangia in tre soli tricorni – che guizzano pochi attimi – sul soffitto. – Cambia – rapido il gioco delle incidenze – e delle rifrazioni.

*Sempre Leonardo Sinisgalli, nel suo racconto autobiografico Via Baccina, [SI51], si esprime così a*

*proposito di "...decifrare le prime pagine delle dispense di analisi. Perché non si trattava di ricordare o di descrivere o di confrontare; bisognava capire e un poco forse indovinare...". Direi che "capire e un poco forse indovinare" renda bene l'idea di intuizione e rigore nello studio personale.*

MANARA. F. Enriques. Didattica, [M25]: "...Il discorso di Enriques sull'errore e sulle sue conseguenze didattiche conduce necessariamente alla considerazione del vero e del falso rigore negli enunciati e nelle dimostrazioni e quindi anche alle conseguenze didattiche di queste concezioni. Qui il nodo tra la teoria e la pratica è ben difficile da risolvere e richiede quell'"esprit de finesse" di cui Enriques era un rappresentante così acuto e valido. Infatti è ben vero che la Matematica dovrebbe essere una scienza che conduce alla chiarezza ed al rigore. Tutta la sua funzione formatrice è diretta a questi scopi e la stessa adozione dei simboli, lo studio delle regole sintattiche del simbolismo e l'apprendimento esatto di esse, l'educazione che questo uso rigoroso del simbolismo conferisce al discente è estremamente valida; così come la Geometria da parte sua costituisce un'educazione al chiarimento dei concetti, alla precisa enunciazione dei rapporti.

Ma esiste anche un rigore puramente formale che non impedisce l'errore intellettuale, sotto la comoda copertura della deduzione impeccabile. In questo senso va interpretata l'antipatia che Enriques aveva per la logica simbolica, che forse egli riteneva incapace di dare tutto il contenuto dei concetti, mentre la sua acutissima intelligenza gli permetteva di non farsi prendere negli equivoci del linguaggio comune, che gli serviva come strumento validissimo... <...>... Enriques osserva giustamente che il rigore della trattazione non deve far dimenticare la presa sulla realtà che la Geometria deve avere, né il fondamento intuitivo concreto che tutta la matematica non può ripudiare. Si rileggano a questo proposito le considerazioni che egli fa a proposito degli enunciati dei postulati geometrici, e l'avvertenza che egli fa ai docenti quando le trattazioni che siano anche "troppo rigorose" nel senso formale conducono a dimostrare ai ragazzi anche quelle proposizioni che appaiano evidenti. Il risultato sarebbe, egli dice giustamente, quello di far perdere interesse ai discenti o di far perdere loro la vera concezione dell'ufficio della dimostrazione; in sostanza si avrebbe qui una

“perdita” di educazione invece che un guadagno, perché la matematica, e in particolare la Geometria, verrebbe presentata come una scienza vana, che si preoccupa di cose inutili.

È superfluo far notare quanto sia ancora valido questo punto di vista ....<...>...

In questo campo sarebbe da dire che è ben vero che la completezza delle ipotesi e il rigore degli enunciati sono necessari; ma che, come questa completezza e questo rigore sono stati conquistati attraverso successivi progressi storici, e quindi sono la manifestazione di necessità che si sono storicamente manifestate, sarebbe buona regola didattica (non sempre rispettata) che queste necessità fossero in qualche modo rese evidenti con controesempi, in modo che il discente le veda e ne capisca i motivi. Senza di che la Matematica dovrebbe ridursi in ogni caso ad una vuota ripetizione di formule”.

Genesi psicologica del pensiero matematico. *I due matematici – filosofi, pur appartenenti ad ambiti filosofici diversi, in tanti loro scritti testimoniano di credere negli stessi valori educativi: la formazione della persona, libera e razionale, in grado di fare scelte; il raggiungimento di una formazione equilibrata attraverso lo studio scientifico e umanistico; il sapere, sia umanistico che scientifico, da trasmettere attraverso un atteggiamento critico, socratico.*

*Un altro aspetto che li accomuna è l'attenzione alla genesi psicologica del pensiero matematico. C. F. Manara conosceva il lavoro di Henriques sulla genesi psicologica dei postulati della geometria e dei concetti matematici: quando incontra il lavoro di J. Piaget (i tre volumi Introduction à l'épistémologie génétique sono del 1950) egli vi ritrova le linee di ricerca di Henriques. Negli ultimi anni di impegno intellettuale e personale C. F. Manara decide di dedicare il frutto degli approfondimenti su questi temi in un lavoro di formazione per gli insegnanti di sostegno.*

MANARA. Problemi psicologici dell'invenzione matematica, [M15], (Inedito, 1965): “... La matematica moderna sta diventando da un certo punto di vista una scienza base per tutte le altre scienze, e mi interessa quindi sapere quali siano i processi mentali che determinano questo tipo caratteristico di pensiero che è il pensiero matematico. È noto a

tutti i presenti che il Piaget ha costruito tutta una teoria psicologica ricalcandola – si può dire – sul pensiero matematico: quando molti anni fa un mio amico studioso di psicologia mi accennò a certe idee di Piaget, riconobbi subito che queste erano state mutuare dalla matematica. Mi sono poi messo a leggere le opere dell'autore e della sua scuola ed ho potuto convincermi della vastità dell'influenza che il pensiero matematico moderno ha avuto su di lui...”

MANARA. Succès et limites de la mathématisation, [M21], (1978): “... Je voudrais rappeler l'œuvre fondamentale de D. Hilbert sur les fondements de la géométrie. Je voudrais donner une place privilégiée à cette œuvre parce qu'il me semble que le but de Hilbert a été non seulement de rétablir sur des bases logiquement inébranlables les idées de la géométrie classique, mais aussi de respecter un certain échelonnement dans les différents groupes d'axiomes qu'il présente. En effet on pourrait reconnaître dans l'œuvre de Hilbert une hiérarchie dans les groupes des axiomes qui respecte les différents niveaux d'expérience physique et psychologie auxquels se situent les différentes géométries (projective, affine etc.). A ce propos je pense qu'on pourrait rappeler aussi le nom du géomètre italien F. Henriques qui, dans des différents ouvrages, avait rattaché ces géométries aux sources psychologiques desquelles elles prennent leur naissance. Mais l'apport le plus intéressant de la mathématique à la psychologie on le trouve dans l'analyse des fondements des idées sur la base des structures de la mathématique. Ici le nom de J. Piaget doit être nécessairement rappelé, parce que on doit à ce savant et à son école des progrès fondamentaux dans l'analyse de la genèse des idées”.

MANARA. Proposte per un itinerario didattico, [M36], (Inedito, 1994): “... I concetti della matematica, ed in particolare quelli della geometria, nascono dall'esperienza, la quale causa delle percezioni attinenti a diverse aree sensoriali. Nel caso della geometria si potrebbero individuare due ambiti sensoriali dai quali la nostra fantasia trae le immagini, e la nostra mente i concetti della geometria.

a) *Area delle sensazioni visive.*

A quest'area appartengono le sensazioni che nascono dalla osservazione di oggetti aventi particolari configurazioni (per esempio fili tesi, pezzi di

superfici piane, ecc.), oppure dalla osservazione di particolari fenomeni fisici (per esempio pennelli sottili di luce in stanze oscure e polverose). Inoltre appartengono a quest'area le sensazioni che conducono alla consapevolezza delle relazioni di similitudine tra figure: per esempio si riconoscono le persone dai loro ritratti, si fanno disegni "in scala", e così via.

b) *Area delle sensazioni tattilo-muscolari.*

A quest'area appartengono le sensazioni che derivano dalla manipolazione degli oggetti (che noi giudichiamo duri o molli, oppure lisci o scabri oppure pieghevoli o indeformabili ecc.); in particolare le sensazioni che nascono dalla manipolazione degli oggetti rigidi, e le sensazioni che vengono indotte in noi dalle forze che noi esercitiamo (per spostare o in genere manipolare gli oggetti) oppure che l'ambiente esercita su di noi (per esempio le forze derivanti dal campo gravitazionale, che forniscono il riferimento spaziale, iniziale ed elementare per ogni soggetto). Da queste osservazioni elementari, spesso mescolate tra loro, indistinte e confuse, nasce la geometria, considerata come un atteggiamento attivo mirante, come si è detto, a descrivere in modo preciso e coerente gli oggetti e l'ambiente ed a spiegare certe relazioni degli oggetti tra loro e con il soggetto. Il porsi razionale e coerente del soggetto nei riguardi dell'ambiente passa per varie fasi, che cercheremo di descrivere ed analizzare, senza peraltro pretendere che le osservazioni che faremo riproducano esattamente l'evoluzione psicologica e mentale di ogni soggetto ...<...>...

Soggettivo, intersoggettivo ed oggettivo: un primo momento della descrizione della situazione del singolo nei riguardi dell'ambiente e degli oggetti è tipicamente soggettivo: l'ambiente viene percepito e quindi descritto in relazione al singolo osservatore.

Appartengono a quest'ambito concettuale anzitutto la procedura che viene chiamata di "lateralizzazione", ed inoltre quell'insieme di concetti e di espressioni verbali appartenenti a quella che (un poco impropriamente rispetto all'uso matematico) viene chiamata "topologia"; in questo ambito le idee di "alto" e "basso" hanno le loro radici nel complesso di sensazioni fornite dal campo gravitazionale in cui siamo immersi; la "destra" e "sinistra", l' "avanti" e il "dietro" hanno il loro fonda-

mento nella struttura del nostro corpo. ...<...>... Per giungere ad una descrizione razionale dell'ambiente, occorre che il soggetto passi da una descrizione soggettiva ad una che potremmo dire intersoggettiva: occorre cioè che il soggetto si sforzi di porsi nella situazione di altri osservatori, oppure immagini di guardare o manipolare un oggetto in vari modi. Ci si avvia così ad una descrizione tale che un oggetto o un ambiente possa essere riconosciuto da molti osservatori; l'ideale sarebbe che la descrizione potesse far riconoscere un oggetto da ogni osservatore; e ciò si ottiene quando si giunga a formulare la definizione logica dell'oggetto in parola...<...>...

*L'astrazione e la costruzione di immagini:* Dal punto di vista della geometria, gli oggetti dell'ambiente non sono mai considerati in tutta la complessità e la ricchezza delle loro proprietà materiali; essi sono sottoposti ad una operazione di astrazione, che avviene a vari livelli e con varie modalità. Un primo livello di astrazione conduce a prescindere da certe proprietà fisiche degli oggetti: colore, peso, temperatura, ecc. . In secondo luogo la fantasia elabora le sensazioni prodotte dagli oggetti, eliminando certe componenti delle sensazioni e spingendone altre al limite. ...<...>... si può osservare che raramente le sensazioni, che conducono alla costruzione della immagine di un oggetto ai fini della geometria, provengono da un unico ambito sensoriale. Per esempio la qualità di indeformabilità (che sta alla base della costruzione del concetto di corpo rigido e quindi anche di trasformazione per movimento rigido) nasce dalle sensazioni provocate dagli sforzi che potremmo fare per cercare di deformare un oggetto, dalle constatazioni del fatto che l'oggetto resiste ai nostri sforzi, ma anche dalla verifica (pertinente all'ambito della vista) del fatto che l'oggetto non cambia sensibilmente di forma. In particolare le espressioni comunemente usate di "solido geometrico" e di "geometria solida" (per indicare la geometria degli oggetti tridimensionali) tradisce forse la genesi in ambito tattilo-muscolare di certi concetti della geometria spaziale.

Abbiamo detto che la nostra fantasia, a partire dalle sensazioni materiali elementari, costruisce delle immagini con una operazione che abbiamo chiamato "astrazione". ...<...>... In particolare la nostra fantasia opera costruendo un'immagine, per così

dire, scarnificata, perfettamente trasparente: per esempio passando dal dado materiale al cubo, solido geometrico. Infine la fantasia mette in atto delle operazioni che si potrebbero chiamare di “estrapolazione”, operando un “passaggio al limite”. Per esempio dalla sensazione di un corpicciolo molto piccolo (e già questa espressione esprime un giudizio molto soggettivo), la fantasia elabora l’immagine del “punto geometrico”. A questo proposito vale la pena di ricordare che negli “Elementi” di Euclide, e poi nella successiva letteratura geometrica greca, il termine che oggi viene tradotto con “punto” aveva il significato letterale di “segno”; cioè indicava un “posto” elementare ed indivisibile. ...<...>... si usa dire che la geometria tratta di oggetti della nostra esperienza “idealizzati”...<...>... noi immaginiamo anche di poter eseguire indefinitamente certe operazioni, per esempio la scelta di un punto in un segmento o in un pezzo di piano, la suddivisione di un segmento, ed anche il prolungamento indefinito di un segmento o l’ampliamento indefinito di un pezzo di piano. ...”

*Ecco sull’astrazione un’immagine poetica di Leonardo Sinisgalli (in Dimenticatoio, [SI52], 1975):*

LA DIVINA PERCEZIONE. Riduce a una linea – il raggio di luce, – la stella a un punto.

*Sinisgalli nella stessa raccolta poetica riesce a darci anche un esempio di come si possa ricordare in quattro semplici sintetiche righe i risultati di un capitolo di Geometria:*

L’OMBRA. L’ombra di una retta – è sempre una retta; – non è quasi mai un cerchio – l’ombra di un cerchio.

*Sia F. Enriques sia C. F. Manara si occupano dei problemi della scuola e dell’università nel contesto sociale. Ed entrambi riflettono sul valore sociale della scienza.*

SPERANZA. Il progetto culturale di Federigo Enriques, [S39]: «...Enriques si occupò dei problemi dell’organizzazione scolastica, soprattutto nei primi vent’anni del secolo. Era favorevole all’equilibrio fra discipline ‘umanistiche’ e ‘scientifiche’ in tutte le scuole secondarie, e a un’apertura degli accessi all’università da tutte le scuole, anche perché il liceo classico rischiava di diventare, a causa del monopolio

quasi assoluto degli accessi, un contenitore di sapere enciclopedico, nel quale tuttavia la scienza era sacrificata. Oggi, la liberalizzazione degli accessi non ha provocato quei disastri che si temevano; per il resto, la situazione presenta le stesse carenze di fondo di allora. ...<...>...

All’inizio del secolo era vivace anche il dibattito sull’università, e anche su questi problemi le idee di Enriques sono attuali. Egli osservava che la struttura per facoltà, voluta dalla legge Casati, ha in vista le esigenze di professioni tradizionali, ma è dannosa per quegli studi il cui scopo principale è il conseguimento del sapere. In particolare, l’aver legato gli studi filosofici a quelli letterari è funzionale alle opinioni dei neoidealisti, ma è di danno sia per la filosofia che per la scienza. Egli era favorevole a una ‘facoltà filosofica’ che comprendesse tutte le discipline teoriche, e auspicava che gli studi filosofici non fossero un corso particolare, ma il completamento, dopo la laurea, di tutti gli altri studi teorici (allora c’era comunque la possibilità di essere ammessi, con un’altra laurea, all’ultimo o al penultimo anno di filosofia). Enriques stigmatizzava anche la tendenza dei docenti universitari a impostare i propri corsi senza tener conto di quelli dei colleghi, il che aumentava la mole delle nozioni che gli studenti erano tenuti a imparare. Deplorava anche che i concorsi universitari spingessero i giovani a occuparsi di campi molto ristretti. ...».

*Livia Giacardi esamina a fondo il lavoro di F. Enriques per la preparazione degli insegnanti, inserendolo nel suo progetto di humanitas scientifica, in Federigo Enriques and the training of mathematics teachers in Italy, [G45], 2011.*

*Traggo inoltre dal sito dell’Accademia delle Scienze di Torino uno stralcio della presentazione della conferenza di L. Giacardi “Il progetto di humanitas scientifica di Federigo Enriques e le sue ricadute sull’insegnamento (22-2-2017)”, [G46]: «Federigo Enriques (1871-1946) è sicuramente una delle figure più significative nel panorama scientifico italiano, e non solo, della prima metà del Novecento. Matematico con profondi interessi culturali, filosofici ed educativi, sentì fortemente i problemi connessi con la formazione degli insegnanti, e più in generale con la scuola, ed elaborò fin dai primi anni di insegnamento un ambizioso e vasto progetto di humanitas scientifica per cui lottò con tenacia fino*

alla fine. ...<...>... Nella seconda parte cercherò di offrire un quadro il più possibile articolato dell'impegno di Enriques nella formazione degli insegnanti e delle differenti strategie – istituzionali, didattiche, culturali, editoriali – da lui messe in opera per la sua realizzazione, mostrando il ruolo crescente della storia della scienza, l'attenzione a pubblici diversi – professori universitari, insegnanti, filosofi, scienziati, politici – e l'apertura a un dialogo internazionale in opposizione ad ogni forma di isolamento nazionalistico durante il Fascismo. ...»

*Al Convegno di Siena: Matematica e dintorni: storie di contaminazioni negli ultimi due secoli (5-7 aprile 2019), nella relazione “Un insegnamento dinamico – Federico Enriques e la formazione degli insegnanti”, [G47], L. Giacardi illustra ancora approfonditamente la storia di tali ricadute culturali.*

*Anche il lavoro di C. F. Manara riguardo all'organizzazione della scuola e dell'Università si esplica in molti interventi rivolti a pubblici diversi, in convegni, incontri di studio, dibattiti, conferenze per associazioni culturali. Vediamo la condirezione, con Modesto Dedò, del Periodico di Matematiche dal 1963 al 1970; la partecipazione al Comitato Ordinatore della Facoltà di Scienze M.F.N. dell'Università della Calabria – un'utopia di università all'avanguardia in parte realizzata secondo le aspettative – dal 1971 al 1974; la presidenza del Comitato Ordinatore della Facoltà di Scienze M.F.N. dell'Università Cattolica nella sede di Brescia, dal 1971 al 1977. Vediamo C. F. Manara al Convegno di Frascati nel 1964, preoccupato insieme a Luigi Campedelli che non venga completamente stravolto l'insegnamento della geometria nella futura riforma della scuola.*

*Ma i cambiamenti avvenuti nell'università e nella società degli anni '70 e seguenti sono per lui una profonda delusione: gli interventi per la scuola diventano soprattutto articoli, conferenze e corsi nell'ambito di riviste e centri culturali cattolici; numerosi sono per il progetto dell'Università Cattolica, molto diretto alla formazione degli insegnanti, e per il Centro Ugo Morin, quindi con una risonanza pubblica-nazionale forse più ristretta di quella che egli avrebbe potuto avere.*

*Tutti gli articoli di didattica sono volti a riflettere sul ruolo formativo dell'insegnamento scientifico nella formazione umana alla razionalità. Anche*

*nell'insegnamento in situazioni di difficoltà, che lui stesso così descrive:*

MANARA. “... I contributi di M. alla didattica della matematica sono stati costantemente diretti a contrastare l'opinione che considera questa dottrina prevalentemente come un complesso di strumenti teorici utili alla scienza ed alla tecnica; è questa infatti una immagine puramente strumentale, e si potrebbe dire “servile” della matematica; immagine che, oltre ad essere parziale e fuorviante, ha degli influssi negativi anche sulla sua didattica. Una giusta impostazione didattica dovrebbe invece tener conto del fatto che la matematica possiede un profondo significato culturale: infatti il metodo matematico è alla base degli imponenti progressi di tutta la scienza moderna, e non soltanto di quelle dottrine o di quelle tecnologie che esplicitamente si servono dei suoi strumenti. Pertanto nell'insegnamento occorrerebbe evitare gli aspetti di puro addestramento alle manovre degli strumenti formali, per cercare invece gli agganci all'intuizione, ed in particolare per avvalersi dell'apporto della geometria razionale.... Nell'ultimo quindicennio l'attività didattica di M. si è esplicitata, con frequenza sempre maggiore, nell'aiuto agli studenti con difficoltà di apprendimento ed ai loro insegnanti di sostegno....<...>... Il compito di un insegnante di sostegno, destinato ad aiutare ed assistere un alunno handicappato inserito in una classe, si presenta quanto mai arduo. Infatti, a partire dal livello delle scuole elementari (ed anche medie), il soggetto handicappato inciampa quasi subito nella difficoltà di apprendere il simbolismo aritmetico elementare, di decodificare i significati dei simboli convenzionali, e di ubbidire alle regole sintattiche che reggono i calcoli...<...>... Gli sforzi costanti di M. sono sempre stati diretti nella direzione che porta a convincere gli insegnanti, soprattutto quelli di sostegno, a sviluppare nei soggetti quella che egli chiama “progettualità”, cioè il comportamento coscientemente razionale, ed il concomitante impiego dei mezzi espressivi linguistici; uno dei quali (e neppure sempre il più importante in ogni caso) è il linguaggio matematico, con le sue convenzioni. E ciò senza pretendere perentoriamente che la conoscenza ed il dominio degli algoritmi sia la condizione assolutamente indispensabile per la comprensione, anche elementare, della dottrina...”.

Valore sociale della scienza. *Fra l'ambiente sociale e culturale della prima metà del Novecento, in cui opera F. Enriques, e quello della seconda metà, in cui lavora C. F. Manara, vi sono enormi differenze. Tuttavia entrambi sono impegnati a difendere il ruolo della scienza nella società, Enriques in un ambiente idealistico che ne negava il significato di vera conoscenza, Manara all'interno di una cultura cattolica nella quale ha sempre sostenuto l'indipendenza del pensiero scientifico dal pensiero metafisico e religioso; tuttavia Manara deplora l'affermarsi di un nuovo, moderno scientismo. Autonomia della ricerca per entrambi non è rifiuto di criteri morali e di significati filosofici da raggiungere al di fuori del pensiero scientifico. In Enriques c'è la consapevolezza dell'influenza determinata dalla società sullo sviluppo della ricerca scientifica.*

ENRIQUES. Signification de l'histoire de la pensée scientifique, [E6]: *La civilisation et les motifs de la science.* [pg. 34 e segg.]... <...>... La science n'est pas l'œuvre de chercheurs esseulés dans quelque île de Lapouta. Nous avons vu comment la vérité côtoie l'erreur et s'explique par l'erreur qu'on corrige. De même l'effort vers la vérité ne saurait se concevoir hors de toute liaison avec les sentiments et les désirs qui agitent l'homme dans le grand drame de la vie. L'œuvre scientifique est liée indissolublement à toutes les circonstances qui déterminent la civilisation et la vie intellectuelle du milieu où se forme et s'exprime la pensée des savants. Le développement de cette pensée est favorisé, dirigé ou retardé par des contingences d'ordre économique, social ou politique, et, toujours en quelque rapport avec ces conditions matérielles, par des motifs artistiques et religieux. La prospérité du commerce, la diffusion de l'aisance, les rapports fréquents avec des nations diverses offrent souvent des occasions propices pour enrichir aussi la vie de l'esprit. Dans l'introduction à son dialogue sur « deux sciences nouvelles », Galilée explique aux seigneurs qui gouvernent Venise comment le progrès des industries incite les esprits curieux à étudier la théorie des mécanismes. De son côté la science donne une impulsion à la technique et nous pouvons en constater les succès extraordinaires dans notre civilisation moderne placée sous le signe du machinisme. Mais nous ne saurions

pas dire encore si ce même développement n'engendre pas des exigences qui s'opposent au progrès des recherches scientifiques.

(Pg. 35)...<...>... C'est ainsi qu'il n'est pas loisible de prévoir dans quel sens pourra s'exercer sur le prochain mouvement scientifique l'influence des nouvelles conditions de la vie économique ou des nouveaux milieux politiques et sociaux qui se forment autour de nous. Bien plus que les encouragements ou les obstacles provenant du monde de la politique, les courants artistiques et religieux peuvent agir sur la pensée scientifique, car ce sont là des forces qui déterminent l'orientation générale des esprits dans un milieu civilisé. L'art, expression de l'âme, est plus largement représenté dans toutes les étapes de la civilisation que la science. On a souvent voulu concevoir son efflorescence comme une antithèse à l'épanouissement des sciences. Mais en réalité l'esprit scientifique, dans sa forme la plus pure, telle qu'on l'a vue se révéler dans l'antiquité grecque ou pendant la Renaissance, n'est qu'un aspect particulier de l'esprit artistique...<...>... Les rapports de la science avec la religion sont plus profonds et plus complexes qu'il ne semble d'habitude à ceux qui mettent en regard la science constituée et la religion positive en se demandant comment et pourquoi elles se contredisent. La possibilité même d'une contradiction indique que ces deux activités, science et religion, doivent posséder une racine commune. En effet l'effort pour construire la réalité, en cherchant partout dans le flux des données sensibles quelque chose qui ne varie point, se révèle comme une activité de nature religieuse. ...<...>... Dès qu'on examine avec quelque ampleur les rapports entre la pensée religieuse et la pensée scientifique, au cours de l'histoire, on remarque, d'une part, les résistances que la foi engainée dans des dogmes et son interprétation, imbue naturellement d'esprit conservateur, opposent aux idées nouvelles; et ce phénomène a pour pendant l'action corrosive de la critique, fondée sur la science, à l'égard des fois révélées. Mais d'autre part on notera l'impulsion que les recherches scientifiques ont reçue de l'esprit religieux, tout épris d'un ordre supérieur de vérité, et aussi l'impulsion que la science elle-même apporte à l'idéal religieux ou, du moins à son interprétation morale. C'est bien dans l'esprit de l'universalisme scientifique que les philosophes mo-

dernes ont traduit l'universalité des principes chrétiens en un respect plus effectif de la justice et de la liberté de conscience. Lorsqu'on a réussi à en saisir les motifs variés, l'histoire de la science – de son origine et de sa croissance, de ses déchéances et de ses renaissances jusqu'aux triomphes inouïs de l'époque la plus proche, – constitue un drame, dont l'intérêt humain n'a pas d'égal. Il se pourrait que ce soit la perspective la plus grandiose qu'on puisse offrir à l'histoire générale de la civilisation. Et tandis que cette vision historique des connaissances acquises nous rend capables de comprendre la solidarité intime des rapports qui forment la trame de l'universelle réalité, elle nous montre en même temps la connexion de ces rapports avec notre vie et avec notre intelligence.

*In un altro pregnante capitolo di Signification de l'histoire de la pensée scientifique, [E6], dal titolo "Le postulat de la raison", Enriques illustra la propria visione aperta, democratica, illuministica dell'insegnamento. E la descrizione di un progetto d'insegnamento matematico non tradizionale, svolto in ambiente di istruzione professionale, si trova in un modernissimo intervento di C. F. Manara che describe lo scopo e la filosofia del progetto.*

ENRIQUES. "...Si on va à la racine, on verra qu'il ne s'agit de rien de moins que d'expliquer tout le mécanisme de notre pensée: les origines du langage et le miracle sans cesse renouvelé de sa transmission d'un homme à l'autre ou, mieux encore d'un homme adulte à un enfant. C'est un problème où se trouve englobée la possibilité de l'enseignement de tous

degrés... <...>... Si, en prenant pour point de départ les données sensibles appartenant à un certain milieu, on réussit à faire naître ou renaître dans la pensée d'un autre les idées générales que nous avons en nous, cela signifie que la construction des concepts s'opère selon des lois en quelque sorte universelles ou, qu'en définitive, toutes les intelligences sont susceptibles de comprendre les choses de la même façon. Autrement dit: la possibilité de l'entendement réciproque implique l'identité de la raison humaine. C'est sur cette supposition que se fonde toute science communicable... <...>... Lorsque nous entreprenons de transmettre ce que nous savons à quelqu'un qui ne le sait pas, il nous faut toujours commencer ou recommencer à partir du point où en est l'autre. La science est un développement d'idées qui naissent d'idées précédentes et s'enchaînent à celles-ci. Sur le terrain de la psychologie individuelle cela implique la nécessité de procéder dans l'enseignement, en allant du degré inférieur au supérieur, du connu vers l'inconnu. D'un point de vue général et social on peut donc dire que la compréhension de la science suppose toujours un milieu historique possédant une certaine culture et la plus haute vision qu'on puisse avoir de la science est, en somme, la vision historique de son devenir. Supposons que nous soyons chargés d'instruire des jeunes gens, en commençant par les notions les plus élémentaires pour arriver aux doctrines les plus élevées. Pendant tout le temps nous surveillerons le développement de leur intelligence et de leur culture, en nous appliquant à comprendre les étapes successives de cette croissance spirituelle et à reconstituer les phases différentes de la formation en eux des idées nouvelles. Nous recueillerons, sans doute, des observations fort intéressantes qui permettront de jeter quelque lumière sur la nature et la signification de nos facultés intellectuelles. Cependant ces observations gagneront en richesse et en fécondité s'il nous est donné de comparer notre expérience didactique à celle d'autres maîtres qui ont formé d'autres élèves en leur présentant des notions différentes, et probablement dans un ordre quelque peu différent. Mais quel champ d'observation infiniment plus vaste nous est offert par ce qu'on peut appeler l'école du monde, où tous sont en même temps élèves et maîtres et qui est le cadre dans lequel se fait l'évolution de la science. ... <...>... La



Figura 2 – Guido Clericetti (1986). Acquerello. Dono per il settantesimo compleanno di C. F. Manara. *L'insegnamento non è l'imbutto di Norimberga...*

même disposition de l'esprit qui a rendu possible au maître de communiquer avec l'élève, doit aussi nous guider lorsque nous pénétrons dans l'école plus vaste où s'est formée l'humanité: ce sera le sentiment que le savoir n'est pas un don dispensé par l'un et passivement reçu par l'autre, mais une conquête que chacun doit faire ou refaire de son propre effort et que nous pouvons tout au plus inciter quelqu'un à refaire en notre compagnie. Cela reçoit sa signification propre par la foi en l'unité de la raison humaine. Que cette foi nous anime et nous en retrouverons les preuves partout: dans la découverte des vérités et aussi dans l'erreur. Car nous cesserons de considérer l'erreur comme une monstruosité, comme la négation du vrai. Nous reconnaitrons qu'elle est inséparable des efforts et des élans de l'intelligence et que souvent elle joue un rôle nécessaire dans l'acheminement vers la vérité."

MANARA. Un esperimento didattico: l'insegnamento della Matematica nei centri ANCIFAP, [M18], (1975): "... I soggetti ai quali era destinato il nostro lavoro sono i giovani dei centri dell'ANCIFAP (Associazione Nazionale Centri IRI Formazione Addestramento Professionale). In linea di massima la fascia di età è quella dai 13 ai 16 anni, cioè dall'uscita della scuola dell'obbligo all'entrata nel mondo del lavoro. ...<...>... Sostanzialmente il programma dei Centri ANCIFAP è quello di formare le maestranze del mondo del lavoro con un'istruzione professionale che tenga conto anche delle richieste dell'ambiente nel quale i discenti dovranno inserirsi nel futuro...<...>... Vari problemi si pongono a proposito della scelta degli esercizi; infatti gli scopi che si vorrebbero ottenere sono diversi. Un primo scopo potrebbe essere descritto dicendo che con l'esercizio si vorrebbe addestrare il discente all'impiego corretto e spedito del linguaggio matematico. Abbiamo volutamente impiegato il termine "addestrare" perché l'uso dei vari segni del linguaggio (parentesi, segni di frazione ecc.) dovrebbe diventare quasi automatico, così come lo è l'applicazione delle varie regole grammaticali di una lingua vivente...<...>... L'esercizio dovrebbe tuttavia raggiungere anche lo scopo di dare al discente la convinzione sempre più radicata che il linguaggio matematico giunge a dare informazioni sulla realtà e quindi è un mezzo di conoscenza, uno strumento per inserire le nostre esperienze concrete

in un quadro razionale, per dirigere le nostre azioni sulla materia, in una parola per acquisire una libertà sempre maggiore nei riguardi del mondo che ci circonda...<...>... abbiamo quindi diretto la scelta degli esercizi in due direzioni, secondo due criteri: il primo criterio è stato quello di scegliere gli esercizi dalla realtà con la quale il discente è quotidianamente a contatto; in particolare dal corso di fisica .... e dalle esercitazioni di officina. Ripetiamo ancora che la nostra intenzione non è quella di rinchiudere gli allievi in questa realtà, ma soprattutto di dare ai discenti i mezzi teorici per poterla conoscere il più a fondo possibile e quindi per potere emergere intellettualmente. In secondo luogo è stato dato un posto abbastanza importante a quelli che si potrebbero chiamare esercizi fuori routine; con questa scelta si è voluto instillare nei discenti l'idea che la risoluzione di un problema matematico non sta nella supina applicazione di certe formule; sostanzialmente la risoluzione consiste nell'escogitare un procedimento razionale, rigoroso e programmato ...<...>... Per concludere potremo dire che il nostro scopo, considerati i discenti ai quali ci rivolgiamo, è stato quello di dare un insegnamento non formalistico e puramente verbale della matematica, ma invece di cercare di insegnare questa materia in quanto linguaggio della scienza e della tecnica, come mezzo per razionalizzare le nostre esperienze sulla realtà e quindi per conoscerla meglio. ...<...>... Ci siamo sforzati il più possibile di presentare la matematica come uno strumento di chiarezza, di dominio della materia e quindi un mezzo di sostanziale libertà dell'uomo e del cittadino".

*Sembra oggi particolarmente importante la visione della scienza – compresa la Matematica – come approssimazione alla realtà, come impegno alla discussione e al confronto, come capacità di valutazione dell'errore.*

*Vedo infine un'ultima traccia delle "riposte armonie" nella malinconia dei versi di due poeti che Enriques cita in [E2]: Dante (Paradiso XXIV, 64):... Fede è sustanza di cose sperate – e argomento de le non parventi..., e Sully Prudhomme, dimenticato poeta francese, primo premio Nobel per la letteratura nel 1901. Così scrive Enriques: « La fantasia oltrepassa il durevole per inseguire l'eterno: Ici-bas tous les lilas meurent. – Tous les chants des oiseaux sont courts... – Je rêve aux étés qui demeurent – toujours ».*

## BIBLIOGRAFIA

Nota: in questo lavoro, di forma eminentemente antologica, vengono presentati materiali in gran parte reperibili online. I testi di Federigo Enriques si trovano nel Sito

[www.federigoenriques.org/it/](http://www.federigoenriques.org/it/)

che mette in rete una versione digitale dell'opera completa (Edizione Nazionale) di F. Enriques.

I testi di F. Enriques citati nel presente lavoro sono contrassegnati da [E1] a [E11]; per ognuno è riportata la collocazione, con descrizione, che appare nel Sito dell'Edizione Nazionale:

<http://www.federigoenriques.org/it/indice-cronologico-delle-opere/>

I testi di Carlo Felice Manara e il testo di Francesco Speranza sono tutti leggibili nel sito

[www.carlofelicianara.it](http://www.carlofelicianara.it)

I testi di C. F. Manara richiamati nel lavoro sono contrassegnati da [M12] a [M38]. I testi editi sono leggibili nella sezione **Bibliografia Generale** del Sito, e i numeri in grassetto indicano la collocazione nella Bibliografia. Gli inediti si trovano nella sezione **Inediti**.

Seguono analogamente i testi degli altri Autori antologizzati. Infine sono elencati, senza pretesa di completezza, alcuni testi pertinenti ma non richiamati in questo lavoro.

- [1] [E1] [1906\_5] Enriques, Federigo, *Problemi della Scienza*, Zanichelli, Bologna, 196. Ripubblicato in [1909\_5] (II ediz.). Ripubblicato in [1926\_5] (rist.). Ripubblicato in [1985\_1] (anast.). Ripubblicato in [1958\_1] (parz rist.). Ripubblicato in [1975\_1] (parz rist.). Tradotto in [1910\_3] (trad. ted.). Tradotto in [1914\_8] (trad. ingl.). Tradotto in [1943\_4] (trad. ingl., rist.). Tradotto in [1909\_7] (trad. fr., parte I). Tradotto in [1913\_4] (trad. fr., parte II). Tradotto in [1919\_5] (trad. fr., ried.). Tradotto in [1911\_5] (trad. russa., parte I). Tradotto in [1947\_2] (trad. sp., parte I). Tradotto in [1947\_3] (trad. sp., parte II). | zbl [VISUALIZZA PDF]
- [2] [E2] [1911\_7] Enriques, Federigo, *Il problema della realtà*, Scientia IX (1911), pp. 257-274. Ripubblicato in [1911\_15]. | zbl [VISUALIZZA PDF]
- [1911\_15] Enriques, Federigo, *Il problema della realtà*. Discorso inaugurale del IV Congresso internazionale di Filosofia, in Atti del IV Congresso internazionale di Filosofia, Bologna, 1911, I Formiggini, Genova, 1911, pp. 5-20. Ristampa di [1911\_7]. Ripubblicato in [1912\_7] (con il titolo Scienza e religione: il problema della realtà).
- [3] [E3] [1915\_2] Enriques, Federigo, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Chisini, O. ed., I Zanichelli, Bologna, 1915. Seguito da [1918\_1] (vol. II). Seguito da [1924\_7] (vol. III). Tradotto in [1926\_6] (ediz. fr.). Ripubblicato in [1929\_7]. Seguito da [1934\_8] (vol. IV). Ripubblicato in [1946\_3] (II ediz.). Ripubblicato in [1985\_2] (rist. anast.). | zbl [VISUALIZZA PDF]
- [4] [E4] [1921\_5] Enriques, Federigo, *Insegnamento dinamico*, Period. di Matem. (s IV) I (1921), pp. 6-16. Ripubblicato in [1956\_1] (rist. parziale). | zbl
- Ripubblicato in [2003\_1] Enriques, Federigo, *Insegnamento dinamico*, Agorà, La Spezia, 2003. con scritti di F. Ghione e di M. Moretti. Ristampa di [1921\_5]. | zbl
- [5] [E5] [1922\_7] Enriques, Federigo, *Per la storia della logica. I principi e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici*, Zanichelli, Bologna, 1922. Ripubblicato in [1987\_1] (rist. anast.). Tradotto in [1926\_7] (trad. fr.). Tradotto in [1927\_9] (trad. tedes.). Tradotto in [1929\_8] (trad. ingl.). Ripubblicato in [1968\_1]. Tradotto in [1949\_2] (trad. sp.). | zbl [VISUALIZZA PDF]
- [6] [E6] [1934\_12] Enriques, Federigo, *Signification de l'histoire de la pensée scientifique*, Hermann, Paris, 1934. Tradotto in [1936\_7] (trad. it.). Tradotto in [1940\_3] (trad. portoghese). | zbl [VISUALIZZA PDF]
- Ristampato in [2004\_1] Enriques, Federigo, *Il significato della storia del pensiero scientifico*, Castellana, M., Rossi, A. ed., Barbieri, Manduria, 2004. Ristampa di [1936\_7].
- [7] [E7] [1936\_13] Enriques, Federigo, *Philosophie scientifique*, in Actes du Congrès International de Philosophie scientifique (Paris, 1935), I Hermann, Paris, 1936, pp. 23-27. Ripubblicato in [2000\_1]. Tradotto in [1983\_2] (trad. it.). Ripubblicato in [1993\_1].
- [8] [E8] [1942\_1] Enriques, Federigo, *L'errore nelle matematiche*, Period. di Matem. (s IV) XXII (1942), pp. 57-65. [con lo pseudonimo di A. Giovannini]. | MathSciNet
- Ristampato in [2000\_1] Per la scienza, Simili, R. ed., Bibliopolis, Napoli, 2000. Contiene inoltre alcuni scambi di corrispondenze con Mach, Vailati, Volterra, Rignano, Bruni, Neurath. Contiene [1900\_6]. Contiene [1907\_9]. Contiene [1907\_13]. Contiene [1908\_7]. Contiene [1908\_10]. Contiene [1908\_11]. Contiene [1911\_8]. Contiene [1911\_16]. Contiene [1911\_18]. Contiene [1912\_13]. Contiene [1913\_6]. Contiene [1921\_2]. Contiene [1921\_4]. Contiene [1921\_8]. Contiene [1927\_1]. Contiene [1927\_2]. Contiene [1927\_10]. Contiene [1930\_11]. Contiene [1930\_14]. Contiene [1930\_19]. Contiene [1935\_11]. Contiene [1935\_14]. Contiene [1936\_13]. Contiene [1936\_22]. Contiene [1936\_24]. Contiene [1937\_7]. Contiene [1937\_8]. Contiene [1942\_1]. Contiene [1942\_2].
- [9] [E9] [1958\_1] Enriques, Federigo, *Natura, ragione e storia*. Antologia di scritti filosofici, Lombardo-Radice, L. ed., Boringhieri, Torino, 1958, con un'introduzione di L. Lombardo-Radice. Contiene [1901\_4]. Contiene [1906\_5] (cap. V, par 3-8). Contiene [1907\_6]. Contiene [1907\_11]. Contiene [1909\_9]. Contiene [1909\_10]. Contiene [1910\_5]. Contiene [1910\_6]. Contiene [1938\_1] (parte I). Contiene [1945\_1] (par. 41-42). | zbl [VISUALIZZA PDF]
- [10] [E10] [1993\_1] Enriques, Federigo, *Filosofia scientifica*, in Filosofia scientifica ed empirismo logico (Parigi 1935), Polizzi, G. ed., Unicopli, Milano, 1993, pp. 55-58. Ristampa di [1983\_3].
- [11] [E11] [1996\_1] *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo, Bottazzini, U., Conte, A., Gario, P. ed.*, Bollati Boringhieri, Torino, 1996. [670 lettere del periodo 1982-1914]. | MathSciNet [VISUALIZZA PDF]
- [12] [M12] C. F. MANARA. 36. *La Geometria nell'ambito del pensiero matematico*. Discorso di inaugurazione dell'anno accademico 1954-55. Annuario dell'Università di Modena, (1954-55).

- [13] [M13] 41. In *Enciclopedia Filosofica*, Bompiani 1957. Voce *Geometria*, 656-658. Voce *Geometria non euclidea*, 658-663. Voce *Spazio*, 838-843. Voce *Matematica*, 362-374. *Ristampa 1979*.
- [14] [M14] C. F. MANARA. 54. *Pedagogia della Matematica*. L'educazione scientifica. Atti del VI Convegno di Schol . La Scuola, Brescia, 1962.
- [15] [M15] 6502. *Problemi psicologici dell'invenzione matematica*. (Conferenza tenuta il 9 dicembre 1965 presso la Sede dell'Istituto di Psicologia Sperimentale).
- [16] [M16] M. DED , C. F. MANARA. 94. *Federigo Enriques*. *Period. Mat.* (4), 44 (1966), 360-366.
- [17] [M17] C. F. MANARA. 132. *Metodi della scienza dal Rinascimento ad oggi*. Vita e Pensiero, Milano, 1975.
- [18] [M18] C. F. MANARA. 133. *Un esperimento didattico: l'insegnamento della Matematica nei centri ANCIFAP*. *Pedagogia e vita*, (1975), 513-541.
- [19] [M19] 7602 *Note per il corso Problemi religiosi posti dalla filosofia della scienza*. (Corso tenuto per il ciclo di specializzazione della Facolt  Teologica dell'Italia Settentrionale, Milano, negli anni accademici 1976-77, 1977-78, 1978-79).
- [20] [M20] G. LUCCHINI, C. F. MANARA. 141. *Momenti del pensiero matematico*. Mursia, Milano, 1976. Prefazione; Capitolo 1 – *La Nascita del Matematico*; Capitolo 2 – *Nuovi strumenti per la matematica*; Capitolo 3 – *La Nascita della matematica moderna*; Capitolo 4 – *Momenti della matematica moderna*.
- [21] [M21] C. F. MANARA. 155. *Succès et limites de la math matisation*. 16th World Congress of Philosophy, Düsseldorf, 1978. (Manoscritto).
- [22] [M22] C. F. MANARA. 157. *Dimensione storica nell'insegnamento delle scienze*. *Didattica delle scienze*, 82 (1979), 18-21.
- [23] [M23] C. F. MANARA. 165. *Federigo Enriques et David Hilbert*. *Epistemologia*, (IV/1, 1981), 189-204. Pubblicato anche in *Un Si cle dans la philosophie des mathématiques*. Office International de Librairie. Bruxelles, 1981. 189-204. Riassunto in italiano dell'Autore.
- [24] [M24] 8202 *Certezza e sicurezza*. (Appunti per gli incontri del Gruppo di S. Cerbone).
- [25] [M25] 81(?01) F. ENRIQUES. *Didattica*. (Gli appunti senza data qui reimpaginati sono stati presumibilmente redatti nel 1981 in relazione all'intervento al Convegno di studi del 1981 a Livorno, pubblicato col titolo *Il contributo di Enriques alla Matematica contemporanea*, nel volume *Federigo Enriques: approssimazione e verit *, a cura di Ornella Pompeo Faracovi. Belforte, Livorno, 1982, pp. 25-42).
- [26] [M26] C. F. MANARA. 174. *Il contributo di Enriques alla Matematica contemporanea*. *Federigo Enriques: approssimazione e verit *, a cura di Ornella Pompeo Faracovi. Belforte, Livorno, 1982, pp. 25-42.
- [27] [M27] C. F. MANARA. 186. *La Geometria. Problemi logici e didattici*. Quaderno P 12/1984, Dipartimento di matematica "F. Enriques", Universit  di Milano. Pubblicato in: *Scuola e didattica*, (1984), 49-64.
- [28] [M28] 8601 *La Matematica*. (Conferenza per I.P.E. – Istituto per ricerche e attivit  educative. Napoli. Incontro su "Causalit  nella Scienza". 9-10 maggio 1986).
- [29] [M29] C. F. MANARA. 205. *La mathématique face   son histoire*. Relazione al Congresso annuale di Friburgo della Académie des Sciences di Bruxelles: Les relations mutuelles entre la philosophie des Sciences et l'histoire des Sciences. *Epistemologia*, (1987), 125-138.
- [30] [M30] C. F. MANARA. 226. *Protagonisti della cultura italiana del Novecento – Federigo Enriques*. *Nuova Secondaria*, (VI), 5 (1989), 84-85.
- [31] [M31] 9106 *Scienza, Filosofia, Etica*. (Lezione tenuta al Liceo Scientifico Statale Carlo Donegani, Sondrio, il 7 novembre 1991, per l'iniziativa di aggiornamento "Fondamenti epistemologici delle discipline scientifiche, filosofiche, linguistiche, letterarie").
- [32] [M32] C. F. MANARA. 238. *Giuseppe Peano e i fondamenti della Geometria*. Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, Modena. Atti del Convegno "Peano e i fondamenti della matematica", Modena 22-24 ottobre 1991. 171-184. *Ripubblicato in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 17 (1994), 283-295.
- [33] [M33] 9104 *Epistemologia della matematica*. Dispense per il ciclo di seminari per il Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica. Universit  Cattolica. Dipartimento di Matematica. Brescia. Anno Accademico 1991/92.
- [34] [M34] C. F. MANARA. 257. *La matematica chiave di lettura della realt *. *Libert  di educazione*, 1-2 (1993-1994), 53-56.
- [35] [M35] 9402 *Osservazioni sulla filosofia del senso comune*. (Osservazioni in margine a un convegno di Docenti).
- [36] [M36] 9404 *Proposte per un itinerario didattico*. (Appunti di lavoro, pubblicati in *Che cosa   "Geometria"*, *Emmecciquadro*, n. 31, dicembre 2007, pp. 7-18).
- [37] [M37] 9502 *Asterischi sulla conoscenza*. (1995 e successivi).
- [38] [M38] 9803 *La Matematica come promotrice di cultura*. (Conferenza tenuta al settimo convegno storico-scientifico dal titolo: "Il pensiero scientifico nelle culture del mondo", Universit  di Ancona, 1-3 ottobre 1998).
- [39] [S39] FRANCESCO SPERANZA. *Il progetto culturale di Federigo Enriques*. In *Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza*. Dipartimento di Matematica Universit  di Bologna, 1992.
- [40] [C40] PAOLO CASINI. *Federigo Enriques e i filosofi neoidealisti*. [Dossier curato da Simonetta Di Sieno e pubblicato nel n. 19-20 di "Lettera matematica pristem"].
- [41] [CS41] MARIO CASTELLANA. *Federigo Enriques e Il metodo storico in filosofia della scienza*, in *Enriques, Federigo, Il significato della storia del pensiero scientifico*, Castellana, M., Rossi, A. ed., Barbieri, Manduria, 2004.
- [42] [CS42] MARIO CASTELLANA. *Federigo Enriques e la volont  del vero*, in M. Castellana e O. Pompeo Faracovi, a cura di, *Filosofie scientifiche vecchie e nuove*, Lecce, Pensa Multimedia- Laboratoire 'Pensée des sciences' ENS, 2014, pp. 42-70.
- [43] [CS43] MARIO CASTELLANA. *Federigo Enriques e il valore strategico del pensiero matematico*. <http://www.mathsintheair.org/wp/2019/11/federigo-enriques-e-il-valore-strategico-del-pensiero-matematico>
- [44] [CG44] ENRICO CASTELLI GATTINARA. *Epistemologia dell'errore in Federigo Enriques e Gaston Bachelard*. *Matematica, Cultura e Societ *. Rivista dell'Unione Matematica Italiana. Serie I, Vol. 2 (2017), n. 2, p. 195- 207.
- [45] [G45] LIVIA GIACARDI. *Federigo Enriques (1871-1946) and the Training of Mathematics Teachers in Italy*, in *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, S. Coen Editor, Birkh user, Basel, 2012. p. 209-275.
- [46] [G46] LIVIA GIACARDI. <http://www.accademiadellescienze.it/attivita/iniziativa-culturali/i-mercoled-dell-accademia-2017-22-01>

- [47] [G47] LIVIA GIACARDI. *Un insegnamento dinamico – Federigo Enriques e la formazione degli insegnanti*. Siena, 6 aprile 2019.  
<http://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/Giacardi-Aprile%202019.pdf>
- [48] [I48] GIORGIO ISRAEL. *Il ‘positivismo critico’ di Federigo Enriques nella filosofia scientifica del Novecento*, in *Federigo Enriques, Filosofia e storia del pensiero scientifico* (a cura di O. Pompeo Faracovi e F. Speranza, Livorno, Belforte Editore Libraio, 1998, pp. 19-44.
- [49] [L49] GABRIELE LOLLI. *La logica fra le due culture*.  
<http://homepage.sns.it/lolli/articoli/duetoculture.pdf>
- [50] [LR50] LUCIO LOMBARDO RADICE. *Introduzione a Natura, ragione e storia*. Antologia di scritti filosofici [vedi [9]]
- [51] [SI51] LEONARDO SINISGALLI. *Racconti*. Mondadori, Oscar Moderni 2020.
- [52] [SI52] LEONARDO SINISGALLI. *Tutte le poesie*. Mondadori, Oscar Moderni 2020.
- Testi non antologizzati nel presente lavoro
- [53] ANTONIO LANTERI, MARIO MARCHI. *Commemorazione di Carlo Felice Manara*. La Matematica nella società e nella cultura. Rivista dell’Unione Matematica Italiana. Serie I, vol. 5 (2012), n. 1, p. 31-56.
- [54] *Federigo Enriques o le armonie nascoste della cultura europea*. Atti del Convegno Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti, 14-17 maggio 2012. A cura di Charles Alunni e Yves André. Edizioni della Normale.
- [55] Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, presentate in <http://www.centrostudienriques.it/>.
- In particolare:  
*Il caso Enriques. Tradizione nazionale e cultura scientifica*, di Ornella Pompeo Faracovi. Livorno, Belforte Editore Libraio, 1984.  
*Federigo Enriques e la cultura europea*. A cura di Paolo Bussotti. Agorà publishing, 2008.  
*Federigo Enriques. Matematiche e filosofia. Lettere inedite e bibliografia degli scritti*. M. Mazziotti, O. Pompeo Faracovi, L. M. Scarantino, I. Toth. A cura di O. Faracovi e L. M. Scarantino. Livorno, Belforte & C. Editori, 2001.
- [56] PAOLO BUSSOTTI. *La concezione dell’infinito in Federigo Enriques*. Matematica, Cultura e Società. Rivista dell’Unione Matematica Italiana. Serie I, vol. 1 (2016), n. 1, p. 65-86.
- [57] MARIO CASTELLANA. *Federigo Enriques e la “Nuova epistemologia”*. Pensa Multimedia, 2019.
- [58] GABRIELE LOLLI. *Federigo Enriques as a Philosopher of Science*, in *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, S. Coen Editor, Birkhäuser, Basel, 2012, p. 333-342
- [59] ERIKA LUCIANO, ALICE TEALDI. *Federigo Enriques e l’impegno nella scuola*. Conferenze e Seminari dell’Associazione Subalpina Mathesis 2011-2012. A cura di F. Ferrara, L. Giacardi, M. Mosca.
- [60] Bibliografia secondaria in  
<http://www.federigoenriques.org/it/documenti/necrologi-e-bibliografia-secondaria/>
- [61] Bibliografia secondaria nella sezione **Bibliografia Secondaria** del Sito  
[www.carlofelicemanara.it](http://www.carlofelicemanara.it)



Maria Piera Manara

Maria Piera Manara ha avuto vari incarichi di insegnamento presso l’Università di Milano, in *Geometria ed Esercitazioni per Chimici*, fino al 1988; poi tecnico laureato fino al 1994, periodo in cui si è occupata di didattica con il calcolatore. Ha collaborato poi nella didattica e nell’organizzazione del Diploma universitario in Metodologie fisiche dell’Università di Parma, fino al 2002. Ha collaborato in vari modi e in vari corsi alla didattica del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano.