Tesi di Dottorato

Dario Salvitti

Formulazione algebrica della teoria dei campi e statistiche descritte dai gruppi delle trecce

Dottorato in Matematica, Roma «La Sapienza» (2002).

<http://www.bdim.eu/item?id=tesi_2002_SalvittiDario_1>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Indice

Introduzione

La definizione intrinseca delle statistiche di particelle fornita dai settori di superselezione nell'ambito della Teoria Algebrica dei Campi Quantistici permette di associare in modo naturale ad ogni settore una classe di equivalenza unitaria di rappresentazioni del gruppo delle permutazioni, che descrive le statistiche degli stati multiparticellari. Ma, mentre in uno spazio-tempo (3+1)-dimensionale campi e particelle rispettano l'alternativa Bose-Fermi, esibendo parastatistiche fermioniche o bosoniche di ordine dato, in uno spazio di Minkowski di dimensione inferiore le statistiche di particelle risultano descritte, in generale, da una rappresentazione del gruppo delle trecce. La discussione dei primi modelli per particelle con una rappresentazione 1-dimensionale del gruppo delle trecce si trovano già in [Wi] dove, tra l'altro, venne coniato il termine *anione* per indicare una particella che esibisce questo nuovo genere di statistica, mentre il termine *plektone* è riservato al caso generale, in cui la rappresentazione irriducibile finito-dimensionale del gruppo delle trecce ha dimensione superiore.

In uno spazio-tempo (2+1)-dimensionale i campi quantistici strettamente locali (ovvero localizzati in regioni limitate) sono ancora soggetti all'alternativa Bose-Fermi, ma particelle "estese", accoppiate al vuoto da campi localizzati in coni di ampiezze angolari arbitrariamente piccole, possono esibire statistiche intermedie. I settori di superselezione nelle teorie quadridimensionali dei campi quantistici sono classificati da classi di equivalenza di rappresentazioni irriducibili del gruppo compatto delle simmetrie interne [DR90], ma alcuni modelli, elaborati prevalentemente nella teoria (1+1)-dimensionale dei campi conformi, esibiscono una ricca struttura di settori di superselezione che non sembra adattarsi alla teoria delle rappresentazioni di alcun gruppo.

La statistica di un settore descrive gli effetti dello scambio di cariche identiche. Nel caso (1+1)-dimensionale, la teoria DHR ammette la possibilità di due operatori statistici distinti, l'uno l'inverso dell'altro, come conseguenza del fatto che il complemento causale di regioni limitate dello spazio-tempo è costituito da due componenti connesse. L'operatore statistico è un invariante topologico rispetto alla scelta di una coppia di regioni ausiliarie causalmente disgiunte, purché tali coppie possano essere deformate l'una nell'altra con continuità mantenendo una separazione relativa di tipo spazio. Quindi, il gruppo delle trecce entra in gioco nella descrizione della statistica per cariche di superselezione DHR localizzate in doppi coni (1+1)-dimensionali (diamanti), nonché in intervalli della retta reale (cono luce), ma anche per teorie (2+1)-dimensionali con cariche localizzate in coni infiniti di tipo spazio contenuti nel complemento dell'ombra causale di una direzione spacelike di riferimento, che rappresenta il caso generale per particelle massive in almeno (2+1)-dimensioni.

Una conseguenza della non banalità delle statistiche di particelle in una teoria dei campi in bassa dimensione è il problema della costruzione di uno spazio di Fock plektonico. Nelle teorie locali quadridimensionali, lo spazio di Hilbert dei vettori di stato di un sistema di n particelle distinguibili è il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert di singola particella. L'$n-$esima potenza tensoriale simmetrizzata (anti-simmetrizzata) dello spazio di Hilbert di singola particella è lo spazio di una rappresentazione per un sistema di n bosoni (fermioni) indistinguibili, sul quale le rappresentazioni irriducibili di singola particella determinano, in assenza di interazioni, la rappresentazione del gruppo di rivestimento universale del gruppo di Poincaré. Lo spazio di Fock può dunque essere definito coma la somma diretta su tutte le potenze tensoriali simmetrizzate (antisimmetrizzate) non negative (con le opportune identificazioni). La stessa tecnica, applicata allo spazio di Hilbert di una rappresentazione finito-dimensionale del gruppo delle trecce, non è sufficiente per costruire un analogo delle spazio di Fock per teorie di campo in bassa dimensione, in quanto non si dispone di campi liberi non relativistici covarianti rispetto al gruppo di Galilei e di campi liberi relativistici covarianti per il gruppo di Poincaré e compatibili con una teoria locale ([MS]). Nel caso di statistiche delle permutazioni, lo spazio multiparticellare è ottenuto dalla scelta di una metrica invariante per Poincaré (determinata dalla statistica) sul prodotto tensoriale di rappresentazioni del gruppo di Poincaré su spazi di singola particella, ma questo non è più vero nel caso plektonico in quanto le regole di somma per gli spin coinvolgono le statistiche [Fred89]. Dunque, lo spazio degli stati multiplektonici non è in generale isomorfo ad un prodotto tensoriale di spazi di singola particella in virtù della non banalità delle statistiche decritte dal gruppo delle trecce, ed una descrizione soddisfacente dello spazio dei vettori di scattering in termini di campi asintotici non è disponibile. Tuttavia, strutture plektoniche sono state discusse ed analizzate nel contesto della teoria algebrica dei campi quantistici e si può disporre di una soddisfacente teoria dello scattering alla Haag-Ruelle ad esse associate. La struttura topologico-algebrica ed analitico-differenziale dello spazio di Hilbert plektonico è stata compiutamente caratterizzata nel formalismo dei fibrati vettoriali su varietà regolari nell'ambito di un opportuno processo di quantizzazione. Inoltre, sembra che un modo conveniente di affrontare il problema consista nel considerare il più generale gruppo delle trecce a nastri, che descrive un plektone dotato di un ulteriore grado di libertà interno.

Nel contesto della teoria dell'algebra CAR sullo spazio di Fock fermionico esiste una nozione naturale di seconda quantizzazione adattata alla trattazione di particelle relativistiche, più appropriata ad una teoria in cui sorge il problema delle energie negative (non fisiche). I risultati ottenuti nel campo dell'implementabilità di certi gruppi di gauge fermionici possono essere utilizzati per costruire un modello che esibisce statistiche anioniche nell'ambito dell'approccio algebrico ai campi liberi massivi di Dirac in (1+1)-dimensioni. Una classe di automorfismi di Bogoliubov unitariamente implementabili nella rappresentazione di Fock inducono in modo naturale una famiglia di automorfismi localizzati e trasportabili dell'algebra delle osservabili, indotti da portatori di carica non locali e non appartenenti nemmeno all'algebra dei campi $\mathscr{F}$. La statistica dei settori, il cui studio è inizialmente condotto secondo i canoni della teoria DHR, risulta dipendente non solo dalla carica (dal settore), ma anche da un parametro continuo che indicizza una collezione di automorfismi unitariamente implementabili che non portano carica ma che hanno l'effetto anomalo, riscontrabile solo in uno spazio-tempo (1+1)-dimensionale, di alterare la statistica (Cf. [Sch]). In assenza di tali automorfismi, infatti, la statistica ritorna ad essere quella ordinaria.

Un altro comportamento anomalo che ha origine in un contesto così particolare (spazio-tempo bidimensionale + violazione della dualità di Haag) è rappresentato dal fatto che la statistica del prodotto non coincide necessariamente con il prodotto delle statistiche. Precisamente, la composizione di due automorfismi con statistiche ordinarie può dare luogo ad un automorfismo con statistica delle trecce, fenomeno imputabile al fatto che l'operatore di monodromia, che fornisce una misura di quanto la statistica si discosti da quella delle permutazioni, non è banale. Come è noto [DHR69b], tale possibilità è preclusa in una teoria dei campi (3+1)-dimensionale che soddisfi alla dualità di Haag, dove la corrispondenza che associa ad ogni settore di superselezione il suo operatore statistico è un autentico omomorfismo fra la famiglia delle classi di equivalenza unitaria di automorfismi localizzati e covarianti ed il gruppo $\mathbb{Z}_2$ (il cui nucleo si identifica con il sottogruppo dei settori di Bose; il complementare di questo nucleo, costituito dagli elementi mappati in -1, è l'insieme dei settori di Fermi). Purtroppo, la rete delle osservabili non soddisfa alla dualità di Haag e pertanto una gran parte delle dimostrazioni abitualmente presentate in AQFT non sono adeguate alla presente trattazione, ed in taluni casi non è possibile fornire una dimostrazione alternativa che aggiri tale ostacolo ma, anzi, si possono trovare semplici controesempi. L'operatore statistico, tuttavia, continua ad avere le proprietà formali tipiche delle teorie a dimensione superiore in quanto gli intertwiners unitari continuano ad essere elementi locali di $\mathscr{A}$, non risentendo apparentemente della violazione della dualità di Haag. Procedendo formalmente sulla falsa riga della teoria DHR si costruisce un operatore statistico, ma in realtà l'assenza della dualità ed il fatto che gli implementatori unitari (portatori di carica) non sono nell'algebra dei campi lascia insospesa la questione se la statistica di questi settori sia un braiding autentico. Non è sufficiente, infatti, procedere formalmente applicando passo dopo passo la teoria DHR, in cui si trattano oggetti locali in un teoria, tra l'altro, in cui la dualità di Haag è imprescindibile. In altri termini, nell'ambito della teoria del campo libero massivo di Dirac in (1+1) dimensioni non è possibile limitarsi alla tecniche esposte in [DHR71] e [DHR74], in cui si passa dalle rappresentazioni selezionate e loro intertwiners agli endomorfismi e loro intertwiners. In quel contesto, una volta stabilito che gli endomorfismi di un'algebra C^* ed i loro operatori di allacciamento formano una categoria tensoriale, la simmetria poteva essere dedotta analizzando le proprietà di commutazione degli intertwiners. Nel caso di localizzazione in coni di tipo spazio, sebbene gli operatori di allacciamento non appartengano all'algebra delle osservabili, si può costruire comunque una categoria tensoriale simmetrica C^* [DR90]. Si ricorre, pertanto, ad un diversa nozione di braiding [BDMRSb], con un metodo d'indagine che si estende anche al caso in cui gli interwiners non appartengano all'algebra dove agiscono gli endomorfismi, ed a questi ultimi non si richiede di essere localmente interni, ma solo asintoticamente interni. Grazie alla condizione di abelianità asintotica degli intertwiners è possibile costruire una *braidologia*, e quindi un intrecciamento per una opportuna sottocategoria piena di End($\mathscr{A}$). A differenza dei modelli (2+1)-dimensionali, le cui regioni di localizzazione "asintotiche" sono costituite da coni di tipo spazio, nel caso in questione una scelta analoga è rappresentata dai wedges, ma adesso non è più possibile costruire una coppia di braidologie mutuamente cofinali, ovvero appartenenti alla stessa componente connessa per cammini, e questo proprio a causa della geometria dello spazio-tempo (1+1)-dimensionale.

Per capire meglio da dove hanno origine le difficoltà che si incontrano lavorando in tale contesto, conviene delineare il punto di vista abitualmente adottato in una teoria quantistica locale. Considereremo una teoria dei campi quantistici specificata da una rete di algebre di von Neumann, ovvero una mappa

$$\mathcal{O} \to \mathscr{F}(\mathcal{O}) \tag{1}$$

che ad ogni regione limitata nello spazio di Minkowski (1+1)-dimensionale associa un'algebra di von Neumann su uno stesso spazio di Hilbert $\mathscr{H}$, in modo tale che sia soddisfatta la proprietà di isotonia

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathscr{F}(\mathcal{O}_1) \subset \mathscr{F}(\mathcal{O}_2). \tag{2}$$

Si assume che l'algebra quasi-locale $\mathscr{F}$ definita da

$$\mathscr{F} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}} \mathscr{F}(\mathcal{O})}^{||\cdot||} \tag{3}$$

sull'insieme $\mathcal{K}$ dei doppi coni sia irriducibile, $\mathscr{F}' = \mathbb{C}\mathbb{1}$ e, inoltre, che la rete soddisfi alle relazioni di commutazione di Bose-Fermi: ogni operatore locale si decompone in una parte bosonica ed in una parte fermionica $F = F_+ + F_-$ in modo tale che, per ogni coppia di elementi F, G spazialmente separati, si ha:

$$[F_+, G_+] = [F_+, F_-] = [F_-, G_+] = \{F_-, G_-\} = 0. \tag{4}$$

Precisamente,

$$F_\pm = \frac{1}{2}(F \pm Ad_V(F)), \tag{5}$$

dove $V = V^* = V^{-1}$ è l'operatore unitario che agisce in modo banale sui vettori bosonici e come $-\mathbb{1}$ sui vettori fermionici. Per formulare in modo più conveniente questa nozione di località si introduce l'operazione di "twisting" $F^\tau = ZFZ^*$, dove

$$Z = \frac{\mathbb{1} + iV}{1+i}. \tag{6}$$

Applicato separatamente alle parti bosoniche e fermioniche, fornisce $ZF_+Z^* = F_+$, $ZF_-Z^* = iVF_-$, da cui $[F, G^\tau] = 0$. Pertanto, la località twisted assume la forma

$$\mathscr{F}(\mathcal{O})^\tau \subset \mathscr{F}(\mathcal{O}')'. \tag{7}$$

La covarianza rispetto al gruppo di Poincaré $\mathscr{P}$ è implementata assumendo l'esistenza di una rappresentazione unitaria fortemente continua su $\mathscr{H}$ di $\mathscr{P}$ tale che

$$\alpha_{(\Lambda,a)}(\mathscr{F}(\mathcal{O})) = AdU(\Lambda, a)(\mathscr{F}(\mathcal{O})) = \mathscr{F}(\Lambda\mathcal{O} + a). \tag{8}$$

Lo spettro dei generatori delle traslazioni (momenti) deve essere contenuto nella chiusura del cono luce positivo e si assume l'esistenza di un unico vettore di vuoto Ω invariante per $\mathscr{P}$.

Un ulteriore assioma, relativo alle simmetrie interne della teoria, stabilisce l'esistenza di un gruppo compatto G, anch'esso rappresentato in modo fortemente continuo da operatori unitari su $\mathscr{H}$, che lascia invariante il vuoto e tale che gli automorfismi $\alpha_g(F) = Ad_{U(g)}(F)$ di $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ rispettano la struttura locale:

$$\alpha_g(\mathscr{F}(\mathcal{O})) = \mathscr{F}(\mathcal{O}). \tag{9}$$

Per comodità si può supporre che tale azione sia fedele ($\alpha_g \neq \mathrm{id}\ \forall g \in G^*$), senza che ciò costituisca una reale restrizione, in quanto è sempre possibile quozientare rispetto al nucleo dell'omomorfismo $G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{F})$. Inoltre, non è sempre necessario postulare la compattezza di G in quanto ciò è conseguenza della proprietà split (laddove questa sia verificata). In particolare, esiste un elemento k di ordine 2 nel centro del gruppo G tale che $V = U(k)$. Questo implica che l'algebra delle osservabili locali in $\mathcal{O}$, definita come la parte invariante rispetto all'azione di G

$$\mathscr{A}(\mathcal{O}) = \mathscr{F}(\mathcal{O})^G = \mathscr{F}(\mathcal{O}) \cap U(G)', \tag{10}$$

soddisfa alla località di Haag. In (1+1) dimensioni le rappresentazioni del gruppo di Poincaré non commutano necessariamente con le rappresentazioni del gruppo delle simmetrie interne. Tuttavia, per una larga classe di teorie le traslazioni commutano con le simmetrie interne mentre i boosts agiscono come automorfismi sul gruppo $G_{\max}$ di tutte le simmetrie interne.

Di cruciale importanza è la nozione di località, che esprime una proprietà di massimalità, nel senso che non si può disporre di algebre locali più grandi, sullo stesso spazio di Hilbert, senza violare la località. Analogamente, l'assioma della dualità twisted per i campi rafforza la proprietà di località twisted, asserendo che

$$\mathscr{F}(\mathcal{O})^{\tau} = \mathscr{F}(\mathcal{O}')', \tag{11}$$

ovvero: $\mathscr{F}(\mathcal{O}')$, l'algebra di von Neumann generata da tutte le algebre $\mathscr{F}(\mathcal{O}_1)$, $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}_1 \in \mathcal{K}$, contiene tutti gli operatori che commutano con l'algebra ottenuta applicando il twisting a $\mathscr{F}(\mathcal{O})$. Tale proprietà risulta essere valida per i campi liberi massivi scalari e di Dirac e per i campi di Dirac a massa nulla, in almeno (1+1) dimensioni, nonchè per i campi scalari liberi in dimensione superiore, oltre che per una vasta classe di teorie con interazione. Una conseguenza della (11) è la dualità dell'algebra delle osservabili nel settore del vuoto

$$\left(\mathscr{A}(\mathcal{O})\big|_{\mathscr{H}_1}\right)' = \mathscr{A}(\mathcal{O}')\big|_{\mathscr{H}_1}. \tag{12}$$

Un settore $\mathscr{H}_1$ è semplice se il gruppo G agisce su di esso come la moltiplicazione per un carattere

$$U(g)\big|_{\mathscr{H}_1} = \chi(g) \cdot \mathbb{1}\big|_{\mathscr{H}_1}. \tag{13}$$

Chiaramente, il settore del vuoto è semplice. Inoltre, le rappresentazioni irriducibili degli osservabili sui settori carichi in $\mathscr{H}$ sono fortemente localmente equivalenti, nel senso che per ogni rappresentazione $\pi(A) = A|_{\mathscr{H}_\pi}$ e per ogni $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ esiste un operatore unitario $V_{\mathcal{O}} : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_\pi$ tale che

$$V_{\mathcal{O}}\pi_0(A) = \pi(A)V_{\mathcal{O}} \qquad \forall A \in \mathscr{A}(\mathcal{O}'). \tag{14}$$

Tale condizione (criterio di selezione DHR), unitamente alla dualità di Haag, costituisce il punto di partenza dell'approccio algebrico alla teoria dei settori di superselezione, la cui idea di base è che tutte le informazioni fisicamente rilevanti di una qualunque teoria dei campi quantistici sono deducibili delle osservabili e dalle loro rappresentazioni. Tutte le rappresentazioni fisicamente significative, così come i campi carichi non osservabili che connettono queste rappresentazioni al settore del vuoto, dovrebbero poter essere costruite dalle osservabili. Un ulteriore postulato stabilisce che la rappresentazione del vuoto e le altre rappresentazioni di interesse per la fisica sono tali che

$$\begin{aligned} \pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{O})) &= \pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{O}'))' && \qquad (15)\\ \pi\big|_{\mathscr{A}(\mathcal{O}')} &\simeq \pi_0\big|_{\mathscr{A}(\mathcal{O}')} \qquad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}, && \qquad (16) \end{aligned}$$

rispettivamente. Nell'ambito dell'approccio algebrico è stato possibile dimostrare l'esistenza di una rete (essenzialmente unica) di algebre di campi, con un unico gruppo compatto di simmetrie interne G, per i quali esiste un morfismo tra la categoria monoidale stretta simmetrica dei settori di superselezione soddisfacenti la (16), dotata della struttura di prodotto stabilita in [DHR71], e la categoria delle rappresentazioni finito-dimensionali di G.

Esiste, inoltre, un legame stretto tra la dualità di Haag ed il fenomeno della rottura spontanea di simmetria. Se si assume che solo un sottogruppo proprio G_0 di G sia unitariamente implementato su $\mathscr{H}$, allora la rete $\mathscr{B}(\mathcal{O}) = \mathscr{F}(\mathcal{O})^{G_0}$ soddisfa alla dualità di Haag allorchè ristretta a $\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}^{G_0}$, laddove $\mathscr{A}(\mathcal{O}) = \mathscr{F}(\mathcal{O})^G$, essendo una sottorete propria di $\mathscr{B}$, viola questa proprietà. Definendo, allora, la rete duale (su $\mathscr{H}_0$)

$$\mathscr{A}^d(\mathcal{O}) = \mathscr{A}(\mathcal{O}')', \tag{17}$$

la rete dei punti fissi $\mathscr{A}$ soddisfa alla dualità essenziale

$$\mathscr{A}^d(\mathcal{O}) = \mathscr{A}^{dd}(\mathcal{O}), \tag{18}$$

(la dualità alla Haag si riduce alla condizione $\mathscr{A}(\mathcal{O}) = \mathscr{A}^d(\mathcal{O})$) e coincide con la rete $\mathscr{B}$, ovvero $\mathscr{A}^d(\mathcal{O}) = \mathscr{B}(\mathcal{O})$.

In uno spazio-tempo (1+1)-dimensionale gran parte dell'analisi appena accennata non è più valida, a causa di alcune peculiarità topologiche tipiche delle spazio di Minkowski bidimensionale. Innanzitutto, in tale contesto esiste una distinzione, invariante per Poincaré, tra destra e sinistra, in quanto per un vettore di tipo spazio x il segno di x_1 è invariante rispetto alla componente connessa dell'identità di $\mathscr{P}$. Tale caratteristica è alla base dell'esistenza dei settori solitonici, studiati nel contesto della teoria generale e costruttiva dei campi quantistici. Un'altra particolarità della topologia di uno spazio di Minkowski (1+1)-dimensionale consiste nel fatto che il complemento di tipo spazio di una regione limitata e connessa (in particolare, un doppio cono), consiste di due componenti connesse. Le implicazioni di questo fatto sono duplici. In primo luogo, nell'adattamento dell'analisi DHR al caso (1+1)-dimensionale, il gruppo delle permutazioni $\mathcal{S}_\infty$, che regola la statistica, è sostituito dal gruppo delle trecce $\mathcal{B}_\infty$. La non connessione di $\mathcal{O}'$ si manifesta anche quando si assume come punto di partenza la rete dei campi $\mathscr{F}$ con gruppo di simmetria G unitariamente implementato. È noto come, in dimensione $\geq (2+1)$, la restrizione della rete dei punti fissi $\mathscr{A}$ ai settori semplici in $\mathscr{H}$ soddisfa la dualità di Haag non appena la rete dei campi $\mathscr{F}$ soddisfi la dualità twisted. Ma il passaggio dalla (11) alla (16) non è sempre possibile in (1+1) dimensioni e pertanto non si può dedurre, dalla dualità twisted dei campi, la dualità di Haag per le osservabili nei settori semplici (operazione possibile nelle teorie conformi). Per comprendere le origini di questo fenomeno, si fissi un $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$. È possibile costruire operatori gauge-invarianti in $\mathscr{F}(\mathcal{O}')$ che sono ovviamente contenuti in $\mathscr{A}(\mathcal{O})'$ ma non in $\mathscr{A}(\mathcal{O}')$, in quanto quest'ultima algebra, essendo associata ad una regione non connessa, è generata, per definizione, dalle algebre degli osservabili associate alla componente di destra e di sinistra del complemento causale di $\mathcal{O}$, rispettivamente. Quest'algebra non contiene operatori gauge-invarianti costruiti usando campi localizzati in entrambe le componenti.

Altre evidenze suggeriscono che in (1+1) dimensioni la dualità di Haag non può essere soddisfatta dalla rete dei punti fissi (di una rete di campi) rispetto all'azione di un gruppo di gauge globale, nemmeno nei settori semplici (cosa non più vera in dimensione $\geq (2+1)$). Tale fenomeno è stato analizzato specialmente sotto l'ipotesi aggiuntiva che i campi soddisfino la proprità split per i wedge, che nella teoria massiva di Dirac (e non solo) è stata verificata. La dualità di Haag, unitamente a tale proprietà split, preclude l'esistenza di settori di superselezione generati localmente. Più precisamente, se la rappresentazione del vuoto soddisfa la dualità di Haag e la proprietà split per i wedge, ogni rappresentazione DHR irriducibile è unitariamente equivalente alla rappresentazione del vuoto (Cf. [Mue98]). Tale limitazione non è imputabile al fatto che $\mathcal{O}'$ non è connesso, in quanto il precedente risultato si può estendere anche alle rappresentazioni di tipo wedge (rappresentazioni che sono localizzate solo in regioni wedge).

Tutte queste limitazioni, se da un lato precludono un utilizzo completo della teoria DHR, dall'altro giustificano il comportamento anomalo delle statistiche di particelle. In effetti, ad ulteriore conferma delle peculiarità citate in precedenza, occorre osservare (Cf. [Sch]) che, in uno spazio-tempo bidimensionale, contesto naturale della fisica dei solitoni, non si può affermare a priori che le statistiche del gruppo delle trecce costituiscano una proprietà intrinseca della composizione dei settori di superselezione (regole di fusione) [Fred90]. In effetti, per gli anioni è possibile esibire esempi espliciti di operatori massivi (gli operatori di disordine) che modificano la statistica pur non trasportando carica, dimostrando che la composizione di cariche, a differenza del caso massivo tridimensionale o del caso 1-dimensionale delle teorie conformi chirali, non induce una statistica ben definita in teorie massive in (1+1) dimensioni.

La tesi è così organizzata. Nel primo capitolo viene delineata la teoria algebrica dei campi quantistici, specializzando la trattazione in funzione dell'analisi DHR in (1+1) dimensioni, e presentando una breve panoramica del caso (2+1)-dimensionale al fine di sottolineare la particolarità del contesto nel quale lavoreremo anche rispetto al caso tridimensionale. Poiché lo spazio di Minkovski (1+1)-dimensionale è il contesto più naturale per la fisica dei solitoni, viene presentata una breve trattazione della teoria dei settori solitonici. Nel secondo capitolo vengono forniti i lineamenti della più specifica teoria matematica qui utilizzata, ovvero un'analisi funzionale sullo spazio di Fock fermionico. Viene introdotta l'algebra delle relazioni di anticommutazione e, accanto alla tradizionale seconda quantizzazione ampiamente utilizzata nel caso non relativistico, un concetto di seconda quantizzazione adeguato al caso di particelle relativistiche e conveniente per trattare il fenomeno delle energie negative. Accanto agli operatori di seconda quantizzazione ed ai loro generatori autoaggiunti, vengono studiate le proprietà dell'operatore "numero di particelle" e dell'operatore "carica", rispetto al quale lo spazio di Fock fermionico viene decomposto come somma diretta di autospazi. Il formalismo viene adattato in funzione degli operatori di Bogoliubov, la cui implementabilità viene studiata sotto condizioni generali, in vista delle applicazioni. Vengono altresì fissate le proprietà di certi implementatori unitari perché avranno il ruolo di portatori di carica nel nostro modello. Risulta necessario, quindi, saper determinare la carica trasportata da questi unitari e poter disporre delle relazioni di commutazione fra gli stessi ed i loro generatori, in quanto la loro conoscienza permetterà di determinare la statistica dei settori. Vengono delineati i fondamenti della teoria matematica del campo libero di Dirac in (1+1) dimensioni e vengono presentati i criteri per stabilire l'implementabilità di certi gruppi di gauge, anche attraverso l'esempio di alcuni casi concreti. Accanto a questi, seguendo la linea di Ruijsenaars, viene trattata anche una classe di operatori di campo "classici" (*kink*), per i quali verrà stabilita l'implementabilità. Frequentemente, l'esistenza di operatori kink è alla base della violazione della dualità di Haag in teorie di campo (1+1)-dimensionali quando non si rileva alcuna rottura spontanea di simmetria.

Nel terzo capitolo vengono esposti i risultati della nostra analisi. La teoria dei gruppi di gauge fermionici viene applicata per costruire un modello che esibisce statistiche non ordinarie. Partendo da un processo di polarizzazione dello spazio di Hilbert di singola particella, in accordo alla parte positiva e negativa dello spettro dell'operatore di Dirac libero, viene introdotta la rappresentazione di Fock-Cook dell'algebra CAR sullo spazio di Fock fermionico e le algebre dei campi locali, la cui parte $U(1)-$invariante è l'algebra delle osservabili locali. Definita la classe di unitari che inducono automorfismi dell'algebra CAR implementabili sullo spazio di Fock fermionico, si dimostra che tali automorfismi inducono, per restrizione, una classe di automorfismi dell'algebra delle osservabili, che risultano localizzati in doppi coni e trasportabili. Gli intertwiners unitari di questa teoria, pur in assenza di dualità alla Haag, risultano essere elementi locali dell'algebra degli osservabili. Applicando l'analisi DHR, per ogni settore viene calcolato l'operatore statistico, sia direttamente (in base alla sua definizione), sia tramite le formule di decomposizione per il prodotto di morfismi [FRS92]. Analogamente, viene calcolato l'operatore di monodromia con metodi diversi e verificato che diagonalizzano gli intertwiners di base. La statistica del prodotto risulta non coincidere con il prodotto delle statistiche, e di questo fenomeno (tipicamente (1+1)-dimensionale) viene fornita la spiegazione teorica, legata alla non banalità dell'operatore di monodromia (segnale della presenza di statistiche non ordinarie, delle quali si ha manifestazione in questo modello). Le motivazioni geometriche di questo fenomeno vengono studiate analizzando la struttura delle dimostrazioni abitualmente fornite in uno spazio-tempo di dimensione ≥ 3, evidenziando gli ostacoli non aggirabili in dimensione inferiore. Le condizioni "iniziali" che definiscono univocamente il braiding (Cf. [FRS92]) sono tutte verificate, ancora grazie alla località degli intertwiners e pertanto, almeno formalmente, quello costruito è l'operatore statistico previsto per questo modello dalla teoria DHR. I portatori di carica, ovvero gli implementatori unitari che inducono gli automorfismi in oggetto, non sono locali, né appartengono all'algebra dei campi $\mathscr{F}$. Se non portano carica, invece, sono elementi della rete duale (Cf. [Mue98]). Ma l'estensione di un automorfismo a tale rete non è più localizzata e pertanto si ripresenta il problema di come definire la statistica. Si fa quindi ricorso all'interpretazione alternativa fornita nell'ambito della teoria dell'abelianità asintotica degli intertwiner [BDMRSb], elaborata per trattare anche quei casi patologici in cui gli endomorfismi non sono interni (ma solo in senso asintotico), in cui la dualità di Haag non è verificata ed in cui gli intertwiners non appartengono all'algebra dove agiscono gli endomorfismi. Si dimostra che il modello qui analizzato esibisce questa nuova versione di braiding per un'opportuna sottocategoria di End$(\mathscr{A})$, costruendo una coppia di braidologie che, per la geometria dello spazio-tempo (1+1)-dimensionale, non possono essere mutuamente cofinali e che, quindi, non possono indurre una simmetria.

Le appendici sono state inserite al fine di non appesantire ulteriormente la lettura con dettagli matematici già ampiamente noti ed utilizzati in letteratura, quali: le proprietà elementari degli operatori di creazione e di distruzione; la dimostrazione che le algebre locali dei campi fermionici soddisfano alla dualità twisted (solo accennata); il gruppo delle trecce come gruppo fondamentale dello spazio delle configurazioni di un sistema di n particelle identiche; le definizioni base nella teoria delle categorie monoidali simmetriche.

Capitolo 1

Teoria algebrica dei campi quantistici in bassa dimensione

La struttura generale dei settori di superselezione trova la sua descrizione più naturale nel contesto della teoria algebrica dei campi quantistici. Il punto di partenza è costituito da una famiglia di algebre di von Neumann $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$, dove $\mathcal{K}$ denota l'insieme dei doppi coni nello spazio di Minkowski. $\mathscr{A}(\mathcal{O})$ viene interpretata come l'algebra generata da tutte le osservabili che possono essere misurate nella regione $\mathcal{O}$ dello spazio-tempo. Nella costruzione dei modelli, spesso quest'algebra viene costruita in termini dei campi di Wightman osservabili $\phi(x)$, con $x \in \mathcal{O}$. Si assume che la rete $\mathscr{A}$ soddisfi agli assiomi di Haag-Kastler:

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathscr{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathscr{A}(\mathcal{O}_2) \qquad \text{(isotonia)}, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2{}' \Rightarrow \mathscr{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathscr{A}(\mathcal{O}_2)' \quad \text{(località)}, \tag{1.2}$$

dove $\mathcal{O}_2{}'$ denota il complemento causale (ovvero, di tipo spazio) del doppio cono $\mathcal{O}_2$ e $\mathscr{A}(\mathcal{O}_2)'$ il commutante dell'algebra $\mathscr{A}(\mathcal{O}_2)$. Le traslazioni x sono rappresentate da automorfismi α_x di $\mathscr{A}$ tali che

$$\alpha_x(\mathscr{A}(\mathcal{O})) = \mathscr{A}(\mathcal{O} + x) \quad \text{(covarianza)} \tag{1.3}$$

In effetti, poiché si potrebbe avere rottura dell'invarianza rispetto al gruppo di Lorentz, per una rappresentazione fisicamente significativa si richiede che almeno le traslazioni siano unitariamente implementate. Nel contesto della fisica delle particelle assumono particolare interesse le rappresentazioni ad energia positiva (REP) di $\mathscr{A}$, ovvero quelle rappresentazioni π di $\mathscr{A}$, su un certo spazio di Hilbert $\mathscr{H}_\pi$, per le quali esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua U del gruppo delle traslazioni tale che

$$Ad_{U(x)} \circ \pi = \pi \circ \alpha_x, \tag{1.4}$$

e lo spettro di U sia contenuto nel cono luce positivo chiuso $\bar{V}_+$. Una rappresentazione del vuoto è una *REP* con un vettore unitario invariante per traslazioni Ω, unico a meno di una fase, mentre una rappresentazione di singola particella è una *REP* per la quale lo spettro di U contiene un iperboloide di massa isolato. Lo studio delle rappresentazioni ad energia positiva fu iniziato da Borchers, nella cui analisi emerse il ruolo fondamentale svolto dalle proprietà di localizzazione delle rappresentazioni. Tale approccio venne sviluppato e fissato in forma compiuta da Doplicher, Haag e Roberts [DHR69a], [DHR69b], [DHR71], [DHR74], i quali selezionarono le rappresentazioni π di $\mathscr{A}$ interpretabili come eccitazioni locali di una certa rappresentazione del vuoto π_0 :

$$\pi\big|_{\mathscr{A}(\mathcal{O}')} \simeq \pi_0\big|_{\mathscr{A}(\mathcal{O}')} \qquad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K} \qquad \text{(criterio DHR).} \tag{1.5}$$

Con $\mathscr{A}(\mathcal{O}')$ si denota la sottoalgebra C^* di $\mathscr{A}$ generata da tutte le algebre $\mathscr{A}(\mathcal{O}_1)$ con $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}_1 \in \mathcal{K}$. Il criterio DHR è valido per tutte le rappresentazioni irriducibili ad energia positiva nella teoria dei campi conformi, ma esclude "cariche topologiche", che possono essere presenti anche in teorie puramente massive (Cf. [BF]), e cariche che possono essere misurate a distanze arbitrarie in virtù, per esempio, della legge di Gauss. Sotto ipotesi piuttosto generali, i settori che soddisfano il criterio DHR sono automaticamente covarianti per Poincaré e ad energia positiva, per cui non è necessario assumere la covarianza come ipotesi. Nella trattazione generale assume cruciale importanza un'ulteriore proprietà di massimalità delle algebre locali nella rappresentazione del vuoto:

$$\pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{O}'))' = \pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{O})) \qquad \text{(dualità di Haag),} \tag{1.6}$$

soddisfatta dal campo libero (Araki) ma violata, per esempio, in caso di rottura spontanea di simmetria (Roberts). Una proprietà più debole, la dualità essenziale, risulta essere valida sotto ipotesi meno restrittive (Bisognano e Wichmann) e conduce, in uno spazio-tempo di dimensione superiore ad (1+1), alla stessa struttura dei settori di superselezione DHR.

In generale, una rappresentazione DHR π non soddisfa alla dualità di Haag, ed una misura di questa violazione è costituita dalla dimensione statistica $d_\pi \in [1, \infty]$, che è uguale ad 1 se e solo se π soddisfa alla dualità di Haag. Inoltre, ${d_\pi}^2$ può essere interpretato come l'indice di Jones dell'inclusione $\pi(\mathscr{A}(\mathcal{O}'))' \supset \pi(\mathscr{A}(\mathcal{O}))$, che non dipende da $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ (Longo). La classe delle rappresentazioni DHR con dimensione statistica finita in uno spazio-tempo (d+1)-dimensionale, con $d \geq 2$, è completamente nota ([DR90]). Esiste sempre un gruppo compatto G (il gruppo delle simmetrie interne) e immersioni delle algebre locali $\mathscr{A}(\mathcal{O})$ in algebre $\mathscr{F}(\mathcal{O}) \subset \mathscr{F}$, sulle quali G agisce tramite automorfismi, in modo tale che $\mathscr{A}(\mathcal{O})$ è l'insieme dei punti fissi in $\mathscr{F}(\mathcal{O})$. L'algebra $\mathscr{F}(\mathcal{O})$ ha un grading $\mathbb{Z}_2$ connesso alla presenza di campi fermionici in modo tale che la rete $\{\mathscr{F}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ soddisfa gli assiomi di Haag-Kastler con una nuova versione di dualità (twisted). La restrizione ad $\mathscr{A}$ della rappresentazione del vuoto di $\mathscr{F}$ è una somma diretta di rappresentazioni DHR irriducibili con molteplicità data dalle dimensioni statistiche che allo stesso tempo sono le dimensioni dei $G-$moduli irriducibili in $\mathscr{F}$, i cui elementi inducono transizioni al settore del vuoto. La dimostrazione della congettura secondo cui, in uno spazio-tempo di dimensione $\geq (2+1)$, la struttura di superselezione deve essere sempre equivalente alla teoria delle rappresentazioni di un unico gruppo compatto procede attraverso un'estensione della teoria della dualità per i gruppi compatti di Tannaka-Krein. Quest'ultima consente di ricostruire un gruppo compatto dal suo "duale concreto", ovvero dalla collezione degli spazi delle rappresentazioni unitarie finito-dimensionali con gli intertwiners fra rappresentazioni. Gli elementi del gruppo possono quindi essere identificati con certe funzioni che associano ad ogni spazio delle rappresentazioni un operatore unitario sul medesimo spazio. In [DR90], invece, vengono caratterizzati i duali "astratti" di gruppi compatti: ogni categoria che possiede tutte le proprietà della categoria degli endomorfismi localizzati (ovvero, una legge di composizione con simmetria delle permutazioni, l'esistenza di sotto-oggetti, somme dirette e coniugati) è equivalente alla categoria di rappresentazioni unitarie continue finito-dimensionali di un unico gruppo compatto. La costruzione dell'algebra dei campi e del gruppo di gauge a partire dalle osservabili a dagli endomorfismi localizzati si può allora vedere come la costruzione di un duale concreto di un gruppo da uno astratto. L'algebra dei campi può essere ottenuta come prodotto incrociato dell'algebra delle osservabili $\mathscr{A}$ con il semigruppo degli endomorfismi localizzati. In tal modo si ottiene un'algebra C^* che contiene $\mathscr{A}$ e, per ogni endomorfismo ρ, uno spazio di Hilbert di dimensione finita $H(\rho)$ che induce ρ, con certe relazioni fra le osservabili e gli elementi delle algebre generate dagli $H(\rho)$. Il gruppo di gauge può essere identificato con il gruppo compatto degli automorfismi dell'algebra dei campi che lasciano fisso ogni elemento di $\mathscr{A}$. In altri termini, in uno spazio di Minkowski di dimensione superiore a due, l'algebra delle osservabili può sempre essere immersa in un'algebra dei campi sulla quale agisce un gruppo di gauge compatto, in modo tale che le osservabili sono precisamente i campi invarianti per trasformazioni di gauge. I campi sono locali rispetto alle osservabili ed agiscono in modo irriducibile su uno spazio di Hilbert che contiene ogni settore di superselezione ρ con molteplicità pari alla dimensione statistica del settore $d_{[\rho]}$. I numeri quantici che descrivono la carica sono in corrispondenza iniettiva con le classi di equivalenza delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di gauge. La costruzione è unica a meno di equivalenza unitaria sotto l'ipotesi aggiuntiva che i campi obbediscano alle relazioni di commutazione "normali" (a distanza di tipo spazio due campi commutano oppure anticommutano). Naturalmente, questo procedimento di ricostruzione è anche una conferma dell'idea centrale che impronta la teoria quantistica dei campi locali: tutte le informazioni rilevanti fisicamente devono poter essere dedotte dalle posizioni relative delle algebre delle osservabili locali.

L'idea di derivare le proprietà di localizzazione dalla condizione spettrale (Borchers) è il punto di partenza che fornisce la possibilità di dimostrare che le rappresentazioni di una particella soddisfano automaticamente una versione del criterio DHR, in cui il doppio cono $\mathcal{O}$ è sostituito da un cono di tipo spazio infinitamente esteso (Buchholz e Fredenhagen), e l'analisi DHR può così essere estesa anche a questa classe di rappresentazioni, portando alla stessa struttura delle teorie (3+1)-dimensionali. È noto che in bassa dimensione la struttura dei settori di superselezione è più complessa. Grazie ai progressi ottenuti nel campo della teoria delle rappresentazioni del gruppo delle trecce (Jones) e la costruzione di nuovi modelli in teorie di campo conforme in due dimensioni (Belavin, Polyakov e Zamolodchikov) che esibiscono una ricca struttura di superselezione, nuovi motivi di interesse hanno dato impulso ad uno studio dettagliato dei settori di superselezione in bassa dimensione (Buchholz, Mack e Todorov; Frölich, Gabbiani e Marchetti; Longo; Fredenhagen, Rehren, Schroer).

1.1 Analisi DHR in (1+1) dimensioni

Sia π_0 una fissata rappresentazione del vuoto che soddisfi alla dualità di Haag, e sia π una rappresentazione che verifichi il criterio di selezione DHR. Se $\mathcal{O}_0 \in \mathcal{K}$, per la (1.5) esiste un unitario $V : \mathscr{H}_{\pi_0} \to \mathscr{H}_\pi$ tale che

$$V\pi_0(A) = \pi(A)V \tag{1.7}$$

per $A \in \mathscr{A}(\mathcal{O}_0{}')$. Risulta così definita una rappresentazione $\pi_V = Ad_{V^{-1}} \circ \pi$ in $\mathscr{H}_{\pi_0}$, unitariamente equivalente a π, che coincide con π_0 su $\mathscr{A}(\mathcal{O}_0{}')$. Sia ora $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{K}$ arbitrario e $\mathcal{O}$ un doppio cono che contenga sia $\mathcal{O}_0$ che $\mathcal{O}_1$. Per l'isotonia e la località,

$$\pi_V(\mathscr{A}(\mathcal{O}_1)) \subset \pi_V(\mathscr{A}(\mathcal{O})) \subset \pi_V(\mathscr{A}(\mathcal{O}'))' = \pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{O}'))'. \tag{1.8}$$

Avendo assunto la dualità di Haag, possiamo concludere che

$$\pi_V(\mathscr{A}(\mathcal{O}_1)) \subset \pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{O})), \tag{1.9}$$

e quindi $\pi_V(\mathscr{A})$ è una sottoalgebra di $\pi_0(\mathscr{A})$. Poichè, per la (1.5), i nuclei di π e π_0 coincidono, possiamo assumere che π_0 sia fedele e considerare l'endomorfismo $\rho = \pi_0^{-1} \circ \pi_V$ di $\mathscr{A}$. Con riferimento al fatto che ρ agisce banalmente su $\mathscr{A}(\mathcal{O}_0{}')$, l'automorfismo ρ è detto "localizzato" in $\mathcal{O}_0$. Inoltre, possiamo identificare $\mathscr{A}$ con la sua immagine nella rappresentazione del vuoto e considerare l'endomorfismo ρ come una rappresentazione.

Siano ρ e ρ' due endomorfismi localizzati in $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ ed unitariamente equivalenti come rappresentazioni. Per la dualità di Haag l'operatore unitario che implementa questa equivalenza è un elemento di $\mathscr{A}(\mathcal{O})$, e gli endomorfismi sono legati da un automorfismo interno. Pertanto, il prodotto di endomorfismi induce una legge di composizione di classi di equivalenza di rappresentazioni. Inoltre, endomorfismi localizzati in regioni spazialmente separate commutano, per cui la legge di composizione è commutativa per le classi di equivalenza. Questo costituisce la base per una definizione intrinseca di statistica.

Siano $\rho_i = Ad_{U_i} \circ \rho$ endomorfismi localizzati in regioni spazialmente separate $\mathcal{O}_i, i = 1, 2$. Allora

$$\rho^2 \simeq \rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1 \simeq \rho^2 \tag{1.10}$$

tramite l'unitario di allacciamento (*operatore statistico*)

$$\varepsilon = \rho(U_1^{-1})U_2^{-1}U_1\rho(U_2) \in \mathscr{A}(\mathcal{O}_0). \tag{1.11}$$

L'operatore ε dipende solo dalle regioni $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$, non dalla scelta degli intertwiners U_1, U_2 (equivalentemente, dei morfismi ausiliari ρ_1, ρ_2). Inoltre, risulta essere localmente costante rispetto a trasformazioni di $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ purché le regioni continuino ad avere una separazione relativa di tipo spazio. Di conseguenza, in due dimensioni ε può assumere al più due valori. L'operatore statistico soddisfa alle relazioni

$$\varepsilon\rho^2(A) = \rho^2(A)\varepsilon, \quad A \in \mathscr{A} \tag{1.12}$$

che non è altro che la proprietà di allacciamento di ε, e

$$\varepsilon\,\rho(\varepsilon)\,\varepsilon = \rho(\varepsilon)\,\varepsilon\,\rho(\varepsilon). \tag{1.13}$$

Infatti, ponendo $U_1 = \mathbb{1}$ e $U_2 = U$ nella definizione di ε, si ottiene

$$\varepsilon\rho(\varepsilon) = U^{-1}\rho^2(U) \tag{1.14}$$

e quindi

$$\varepsilon\rho(\varepsilon)\varepsilon = U^{-1}\rho^2(U)\varepsilon = U^{-1}\varepsilon\,\rho^2(U) \tag{1.15}$$

per la (1.12) e

$$\rho(\varepsilon)\varepsilon\rho(\varepsilon) = \rho(\varepsilon)U^{-1}\rho^2(U) = U^{-1}Ad_U \circ \rho(\varepsilon)\rho^2(U). \tag{1.16}$$

A questo punto, la (1.13) segue dal fatto che $Ad_U \circ \rho$ è localizzato in una regione spazialmente separata rispetto ad $\mathcal{O}_0$ e quindi agisce in modo banale su $\varepsilon \in (\mathcal{A}(\mathcal{O}_0))$. Ponendo

$$\varepsilon^{(\rho)}(\sigma_i) = \rho^{i-1}(\varepsilon) \tag{1.17}$$

risulta definita, in virtù delle (1.12)-(1.13), una rappresentazione unitaria del gruppo delle trecce B_∞, cioè del gruppo generato dai simboli $\sigma_i, i \in \mathbb{N}$ con le relazioni

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \qquad |i-j| \geq 2 \tag{1.18}$$

e

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \tag{1.19}$$

(la prima relazione è conseguenza della (1.12) mentre la seconda discende dalla (1.13)).

La presenza, in tale contesto, di una rappresentazione del gruppo delle trecce è indicativa di una statistica anomala di particella, che può essere analizzata in termini di inverso a sinistra dell'endomorfismo ρ. Alcuni esempi di statistiche non ordinarie sono forniti da modelli specifici in contesti particolari. In generale, è sempre possibile costruire una traccia di Markov (nel senso di Jones) sul gruppo delle trecce e calcolare diversi generi di invarianti ad essa associati, ma non è tuttora disponibile una classificazione generale.

1.2 Statistica delle trecce in (2+1) dimensioni

I settori di superselezione DHR in uno spazio-tempo tridimensionale hanno sempre statistica ordinaria, ovvero descritta dal gruppo delle permutazioni. All'origine di questo fenomeno è la topologia dello spazio di Minkowski $\mathbb{M}^3$: l'operatore statistico è globalmente costante in quanto ogni coppia di doppi coni spazialmente separati può essere deformata con continuità, fino a raggiungere la configurazione inversa, in modo tale che le due regioni si mantengano sempre spazialmente separate. Pertanto $\varepsilon^2 = \mathbb{1}$, e quindi $\varepsilon^{(\rho)}$ si riduce ad una rappresentazione del gruppo delle permutazioni. In realtà, statistiche descritte dal gruppo delle trecce possono essere ritrovate anche in una teoria sullo spazio-tempo $\mathbb{M}^3$, perché una rappresentazione ad energia positiva non soddisfa necessariamente al criterio DHR.

Abbiamo a disposizione una proprietà di localizzazione generale per rappresentazioni irriducibili di singola particella (Cf. [BF]). Estendendo un risultato di Swieca, si dimostra che esiste sempre un sottospazio denso nello spazio della rappresentazione π di singola particella, in modo tale che per ogni vettore unitario Φ in tale sottospazio le derivate dei valori di aspettazione

$$\partial_\mu(\Phi, \pi\alpha_x(A)\Phi) \tag{1.20}$$

sono fortemente decrescenti per $|\mathbf{x}| - |x^0| \to \infty$ per ogni osservabile locale A. Ne segue che il valore di aspettazione di A ammette limite quando x tende all'infinito di tipo spazio. Tale limite è indipendente da Φ e, in uno spazio-tempo di dimensione non inferiore a 3, non dipende nemmeno dalla direzione con cui si tende all'infinito di tipo spazio. Quindi esiste uno stato ω_0 (nel senso di funzionale di aspettazione sull'algebra degli osservabili)

$$\omega_0(A) = \lim_x (\Phi, \pi\alpha_x(A)\Phi), \tag{1.21}$$

che è invariante per traslazione. Per la costruzione GNS esiste uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}_0$, una rappresentazione π_0 ed un vettore ciclico $\Omega \in \mathscr{H}_0$ tale che

$$\Omega_0(A) = (\Omega, \pi_0(A)\Omega), \tag{1.22}$$

insieme ad un implementazione unitaria delle traslazioni

$$U_0(x)\pi_0(A)\Omega = \pi_0\alpha_x(A)\Omega. \tag{1.23}$$

Si può dimostrare che U_0 è fortemente continuo e soddisfa alla condizione spettrale, e quindi π_0 è una rappresentazione del vuoto associata in modo unico alla rappresentazione di singola particella π.

In uno spazio-tempo bidimensionale l'infinito di tipo spazio non è connesso, e quindi potrebbero manifestarsi limiti diversi in (1.21) per l'infinito a destra e l'infinito a sinistra di tipo spazio, portando così a diverse rappresentazioni del vuoto π_+ e π_- rispettivamente (solitoni).

Ritornando al caso (2+1)-dimensionale, si pone il problema dell'esistenza di campi locali che connettano π_0 e π. Per ogni cono di tipo spazio

$$S = a + \bigcup_{\lambda>0} \lambda\mathcal{O}, \tag{1.24}$$

dove $\mathcal{O}$ è un doppio cono generato da due vettori unitari di tipo spazio con differenza di tipo tempo, vale il seguente criterio DHR modificato:

$$\pi|_{\mathscr{A}(S')} \simeq \pi_0|_{\mathscr{A}(S')}. \tag{1.25}$$

In virtù di questo risultato si può ripetere l'analisi DHR per le rappresentazioni π che soddisfano alla (1.25) per una prefissata rappresentazione del vuoto π_0. Denotiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme dei doppi coni. In stretta analogia all'analisi DHR, si fissa un certo $S_0 \in \mathcal{S}$ e si utilizza l'equivalenza unitaria di π e π_0 su $\mathscr{A}(S_0{}')$ per sostituire π con una rappresentazione equivalente π_V su $\mathscr{H}_0$ in modo tale che π e π_0 coincidono su $\mathscr{A}(S')$. Allo stesso modo, π_V definisce una rappresentazione fedele ρ di $\pi_0(\mathscr{A})$ in $\mathscr{H}_0$ ma, in generale, l'immagine di ρ non è contenuta in $\pi_0(\mathscr{A})$. Assumendo la dualità di Haag per i coni di tipo spazio,

$$\pi_0(\mathscr{A}(S'))' = \pi_0(\mathscr{A}(S))'', \tag{1.26}$$

si ha, per $S_0 \subset S_1 \in \mathcal{S}$.

$$\rho(\pi_0(\mathscr{A}(S_1))) \subset \pi_0(\mathscr{A}(S_1))'', \tag{1.27}$$

e quindi l'immagine di ρ può contenere operatori non locali che appartengono solamente alla chiusura debole dell'algebra dei coni di tipo spazio.

In (3+1) dimensioni questo ostacolo può essere evitato, ottenendo così la stessa struttura dei settori della teoria DHR. In (2+1) dimensioni il problema assume una forma diversa, essenzialmente identica alla situazione tipica della teoria dei campi conformi chirali in due dimensioni.

L'approccio si fonda sull'idea di fissare innanzitutto una direzione di tipo spazio "vietata", che sostituisce l'infinito di tipo spazio nel caso di regioni limitate. Denotiamo con $\mathcal{S}(r)$ l'insieme dei coni di tipo spazio che contengono λr per tutti i valori sufficientemente grandi di λ, ed introduciamo la seguente algebra C^*:

$$\mathscr{A}^r = \overline{\bigcup_{S\in\mathcal{S}(r)} \pi_0(\mathscr{A}(S'))''}. \tag{1.28}$$

Per ogni r, la rappresentazione ρ ammette un'unica estensione ρ^r ad $\mathscr{A}^r$ debolmente continua su ogni algebra $\pi(\mathscr{A}(S'))''$, $S \in \mathcal{S}(r)$. Inoltre, se ρ è localizzato in un certo cono di tipo spazio S spacelike rispetto ad r (ovvero: esiste un certo $S_1 \in \mathcal{S}(r)$ tale che $S \subset S_1{}'$) allora ρ^r è un endomorfismo di $\mathscr{A}^r$. In generale, le estensioni ρ^r e $\rho^{r'}$ per due diverse direzioni di tipo spazio non coincidono sull'intersezione dei loro domini di definizione. Tuttavia, coincidono sull'immagine di $\mathscr{A}$ tramite un endomorfismo, per cui il prodotto di rappresentazioni è ben definito come nella teoria DHR. Le differenze diventano più evidenti quando si studiano gli intertwiners.

Siano ρ_1 e ρ_2 localizzati in S, e $Ad_{U_2} \circ \rho_2$ sia localizzato in $S_2 \subset S'$. Per ogni direzione di tipo spazio r che sia spacelike rispetto ad S ed a S_2 l'operatore statistico

$$\varepsilon^r(\rho_1, \rho_2) = U_2^{-1}\rho_1(U_2) \tag{1.29}$$

allaccia $\rho_1^r\rho_2$ e $\rho_2^r\rho_1$. Ma ε^r potrebbe essere diverso da $\varepsilon^{r'}$ se la configurazione S, r, S_2 non può essere deformata con continuità nella configurazione S, r', S_2. In caso contrario, $\varepsilon^{r'}(\rho_1, \rho_2)$ coincide con $\varepsilon^r(\rho_2, \rho_1)^{-1}$, pertanto l'*operatore di monodromia*

$$\varepsilon_M(\rho_1, \rho_2) := \varepsilon(\rho_2, \rho_1)\varepsilon(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^{r'}(U_2)^{-1}\rho_1^r(U_2) \tag{1.30}$$

la cui non banalità è segnale della presenza di statistiche del gruppo delle trecce, misura la differenza fra le due estensioni di ρ_1.

1.3 Settori solitonici in due dimensioni

I risultati ottenuti in [BF] sulla localizzazione delle rappresentazioni di singola particella costituiscono il punto di partenza per una discussione generale dei settori solitonici in (1+1) dimensioni. L'analogo del cono di tipo spazio (migliore localizzazione in $\mathbb{M}^3$) per uno spazio-tempo bidimensionale è il "wedge", in funzione del quale la precedente nozione di localizzazione deve essere adattata. Se π una rappresentazione di singola particella, esistono rappresentazioni del vuoto $\pi_\pm$ tali che

$$\pi|_{\mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + x)} \simeq \pi_\pm|_{\mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + x)}. \tag{1.31}$$

Con i simboli $\mathcal{W}_\pm$ si sono denotati i wedge a destra, rispettivamente, a sinistra

$$\mathcal{W}_\pm = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x^0| < \pm x^1\}. \tag{1.32}$$

In analogia al caso (2 + 1)-dimensionale si possono introdurre estensioni dell'algebra $\mathscr{A}$, le quali dipendono non solo dalla direzione di tipo spazio (che in due dimensioni ha solo due differenti possibilità) ma anche da una rappresentazione del vuoto. Se π_0 è una di queste, l'insieme degli operatori di classe traccia T in $\mathscr{H}_{\pi_0}$ induce, tramite

$$||A||_T = |\operatorname{tr} T\pi_0(A)| \tag{1.33}$$

una famiglia di seminorme su $\mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + x)$. Il corrispondente completamento $\mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + x)_{\pi_0}$ è un'algebra di von Neumann astratta canonicamente isomorfa alla chiusura debole di $\pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + x))$, dove l'isomorfismo canonico è l'estensione $\sigma-$debole di π_0. L'inclusione $\mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + x) \subset \mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + y)$ per $\mathcal{W}_\pm + x \subset \mathcal{W}_\pm + y$ si estende in modo unico ai completamenti, e quindi è lecito definire l'algebra C^*

$$\mathscr{A}^\pm_{\pi_0} = \overline{\bigcup_x \mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + x)_{\pi_0}}. \tag{1.34}$$

Per la (1.31), π ammette estensioni uniche $\pi^\pm$ ad $\mathscr{A}^\pm_{\pi_\pm}$ che sono $\sigma-$debolmente continue su $\mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + x)_{\pi_\pm}$ per tutti gli x in $\mathbb{R}^2$. Assumendo che tutte le rappresentazioni del vuoto π_0 soddisfino alla dualità di Haag per i wedge,

$$\pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{W}_\pm + x))' = \pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{W}_\mp + x))'', \tag{1.35}$$

si può procedere come per la costruzione di endomorfismi DHR.
Sia $x \in \mathbb{R}^2$. Per (1.31) esiste un unitario $V : \mathscr{H}_{\pi_-} \to \mathscr{H}_\pi$ tale che

$$V\pi_-(A) = \pi(A)V, \qquad A \in \mathscr{A}(\mathcal{W}_- + x). \tag{1.36}$$

La rappresentazione $\pi_V = Ad_{V^{-1}} \circ \pi$ coincide, quindi, con π_- su $\mathscr{A}(\mathcal{W}_- + x)$. Se $y \in \mathbb{R}^2$ è arbitrario, esiste $z \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\mathcal{W}_+ + z \supset \mathcal{W}_+ + x \ \cup \ \mathcal{W}_+ + y. \tag{1.37}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\pi_V^+(\mathscr{A}(\mathcal{W}_+ + y)_{\pi_+}) \subset \pi_V(\mathcal{A}(\mathcal{W}_- + y))' \subset \pi_V(\mathscr{A}(\mathcal{W}_- + z))' = \\ = \pi_-(\mathscr{A}(\mathcal{W}_- + z))' = \pi_-(\mathscr{A}(\mathcal{W}_+ + z))'' = \pi_-^+(\mathscr{A}(\mathcal{W}_+ + z)_{\pi_-}),\end{aligned}$$

da cui si deduce che possiamo definire un omomorfismo $\rho : \mathscr{A}^+_{\pi_+} \to \mathscr{A}^+_{\pi_-}$, $\rho = (\pi_-^+)^{-1}\pi_V^+$, che risulta essere $\sigma-$debolmente continuo su ogni algebra $\mathscr{A}(\mathcal{W}_+ + u)_{\pi_+}, u \in \mathbb{R}^2$ e soddisfa

$$\pi^+ \simeq \pi_-^+ \circ \rho, \tag{1.38}$$

$$\rho\Big|_{\mathscr{A}(\mathcal{W}_- + x)} = \mathrm{id}\Big|_{\mathscr{A}(\mathcal{W}_- + x)}. \tag{1.39}$$

Questi omomorfismi, localizzati in un wedge a destra, costituiscono la generalizzazione più appropriata degli endomorfismi DHR. La loro struttura di semigruppo induce in modo naturale una legge di composizione per le rappresentazioni. Siano π, π' due rappresentazioni che soddisfano alla condizione (1.31) per opportune rappresentazioni del vuoto $\pi_\pm, \pi'_\pm$, rispettivamente. Allora, π e π' possono essere composti purché $\pi_+ \simeq \pi'_-$. Siano ρ, ρ' i corrispondenti omomorfismi localizzati a destra e a sinistra. Il prodotto è quindi definito, a meno di equivalenza, da

$$\pi \times \pi' \simeq \pi_-^+ \circ \rho\rho'\big|_{\mathscr{A}}. \tag{1.40}$$

Il prodotto così definito non dipende dalla scelta degli omomorfismi. Infatti, se ρ e $\hat{\rho}$ soddisfano alle (1.38)-(1.39), differiscono per un automorfismo interno di $\mathscr{A}_{\pi_-}^+$ indotto da un unitario $U \in \mathscr{A}(\mathcal{W}_+ + x)_{\pi_-}$. Tale prodotto è indipendente dalla scelta del lato a destra anziché di quello a sinistra.

Se, invece, scegliamo di lavorare con endomorfismi localizzati a sinistra $\lambda : \mathscr{A}_{\pi_-}^- \to \mathscr{A}_{\pi_+}^-$ che soddisfano alle (1.38) e (1.39), con $+$ e $-$ interscambiati, possiamo definire la composizione di π e π' ponendo

$$\pi \diamond \pi' \simeq \pi'^-_+ \circ \lambda'\lambda|_{\mathscr{A}}. \tag{1.41}$$

Le due leggi di composizione sono equivalenti. Per dimostrarlo, notiamo innanzitutto che

$$\pi \times \pi' \simeq \pi^+ \circ \rho'_0 \simeq (\pi_0^- \circ \lambda_0)^+ \circ \rho'_0 \tag{1.42}$$

e

$$\pi \diamond \pi' \simeq \pi'^- \circ \lambda_0 \simeq (\pi_0^+ \circ \rho'_0)^- \circ \lambda_0, \tag{1.43}$$

dove $\pi_0 \simeq \pi_+ \simeq \pi'_-$, $\rho'_0 = \rho'|_{\mathscr{A}}$ e $\lambda_0 = \lambda|_{\mathscr{A}}$. Quindi, ciò che rimane da dimostrare è essenzialmente la commutatività degli endomorfismi che sono localizzati in regioni spazialmente separate. Sia $A \in \mathscr{A}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$. Esiste un wedge a destra $\mathcal{W}_+ + x_+ \supset \mathcal{W}_+ + x$ ed esiste un wedge a sinistra $\mathcal{W}_- + x_- \supset \mathcal{W}_- + x$ tali che $\mathcal{O} \subset \mathcal{W}_+ + x_+ \cup \mathcal{W}_- + x_-$. Sia $\hat{\lambda}$ localizzato in $\mathcal{W}_- + x_-$ e $U_- \in \mathscr{A}(\mathcal{W}_- + x)_{\pi_0}$ un unitario tale che

$$\lambda = Ad_{U_-} \circ \hat{\lambda} \tag{1.44}$$

e sia $\hat{\rho}'$ localizzato in $\mathcal{W}_+ + x_+$, con $U_+ \in \mathscr{A}(\mathcal{W}_+ + x)_{\pi_0}$ un unitario tale che

$$\rho' = Ad_{U_+} \circ \hat{\rho}'. \tag{1.45}$$

Allora $\hat{\lambda}(A) = A = \hat{\rho}'(A)$. Poiché $\pi_0^- \circ \hat{\lambda}_0$ e π_0 coincidono su $\mathscr{A}(\mathcal{W}_+ + x)$, coincidono anche sulla chiusura $\sigma-$debole rispetto a π_0, quindi

$$(\pi_0^- \circ \hat{\lambda}_0)^+(U_+) = \pi_0^+(U_+) \in \pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{W}_+ + x))''$$

e, per lo stesso argomento,

$$(\pi_0^+ \circ \hat{\rho_0})^-(U_-) = \pi_0^-(U_-) \in \pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{W}_- + x))''.$$

Infine, otteniamo:

$$\begin{aligned}(\pi_0^- \circ \lambda_0)^+ \circ \rho_0'(A) &= \text{Ad}\ \pi_0^-(U_-)\pi_0^+(U_+)(A) = \\ &= \text{Ad}\ \pi_0^+(U_+)\pi_0^-(U_-)(A) = \\ &= (\pi_0^+ \circ \rho_0')^- \circ \lambda_0(A)\end{aligned}$$

e, pertanto, le leggi di composizione $\times$ e $\diamond$ coincidono.

Vogliamo concludere questo capitolo riassumendo gli assiomi appropriati a trattare teorie in cui le osservabili sono definite a partire dai campi grazie ad un principio di invarianza di gauge.

1. L'algebra dei campi $\mathscr{F}$ è l'algebra globale della rete di algebre di von Neumann $\mathcal{O} \to \mathscr{F}(\mathcal{O})$ e la sua azione è irriducibile sullo spazio di Hilbert $\mathscr{H}$.

2. Esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua $L \to \mathcal{U}(L)$ del gruppo di Poincaré $\mathscr{P}$ su $\mathscr{H}$ che induce automorfismi α_L dell'algebra dei campi, la cui azione sulle singole algebre locali è geometrica, ovvero $\alpha_L(\mathscr{F}(\mathcal{O})) = \mathscr{F}(L\mathcal{O})$. Esiste un vettore unitario $\Omega \in \mathscr{H}$, il vettore del vuoto, invariante per $\mathcal{U}(L)$, $L \in \mathscr{P}$, che induce lo stato di vuoto ω_0 di $\mathscr{F}$,
$$\omega_0(F) = (\Omega, F\Omega).$$

3. (Proprietà di *Reeh-Schlieder*) Ω è un vettore ciclico e separante per ogni algebra $\mathscr{F}(\mathcal{O})$.

4. Esiste una rappresentazione fedele $g \to \beta_g$ di un gruppo compatto G, il gruppo di gauge, che agisce come automorfismi di $\mathscr{F}$. β_g commuta con α_L e $\beta_g(\mathscr{F}(\mathcal{O})) = \mathscr{F}(\mathcal{O})$. Inoltre, si suppone che, se $F \in \mathscr{F}(\mathcal{O})$, la corrispondenza $g \to \beta_g(F)$ sia debolmente continua.

5. Si assume che l'algebra dei campi abbia relazioni di commutazione di Bose-Fermi. Si può esprimere questo assioma supponendo che esiste un $k \in G$, con $k^2 = e$, in modo tale che, posto $F_\pm = \frac{1}{2}(F \pm \beta_k(F))$, si abbia:

$$F_+F'_+ - F'_+F_+ = 0 \tag{1.46}$$
$$F_+F'_- - F'_-F_+ = 0 \tag{1.47}$$
$$F_-F'_- + F'_-F_- = 0 \tag{1.48}$$

quando $F \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_1)$, $F' \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_2)$, $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2{}'$. L'elemento k è automaticamente nel centro di G.

Capitolo 2

Teoria degli operatori sullo spazio di Fock fermionico

2.1 Algebra CAR e seconda quantizzazione

In questa sezione verranno fissate le notazioni e riassunte quelle nozioni fondamentali della teoria della seconda quantizzazione che verranno impiegate nella presente trattazione. Sia $\mathscr{H}$ uno spazio di Hilbert complesso separabile con prodotto scalare $(\, , \,)$. Lo spazio di Fock fermionico $\mathcal{F}_a(\mathscr{H})$ è il completamento dello spazio vettoriale

$$\mathscr{D}_{at} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \wedge^n \mathscr{H} \tag{2.1}$$

dei tensori algebrici antisimmetrici rispetto al prodotto scalare "naturale"

$$\Big\langle \bigoplus_{n\geq 0} \xi_n \Big| \bigoplus_{n\geq 0} \eta_n \Big\rangle = \sum_{n\geq 0} (\xi_n, \eta_n),$$

con il vettore unità standard $\Omega := (1, 0, 0, ...)$ definito come *il vettore di vuoto*. È noto, infatti, che la potenza alternante n-esima $\wedge^n \mathscr{H}$ è dotata di un prodotto scalare hermitiano canonico che sui tensori elementari è definito da

$$< x_1 \wedge \cdots \wedge x_n | y_1 \wedge \cdots \wedge y_n >= \det[(x_i \, , \, y_j)],$$

dove $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \mathscr{H}$. Il prodotto scalare così definito è incompleto se $n > 1$ e $\mathscr{H}$ è di dimensione infinita. Con la potenza alternante di ordine zero si intende lo spazio di Hilbert dei complessi $\mathbb{C}$ dotato del prodotto interno hermitiano standard. Lo spazio prehilbertiano definito dalla (2.1) non è completo se $\mathscr{H}$ ha dimensione infinita ed è finito-dimensionale altrimenti. Per ogni $f \in \mathscr{H}$ si definisce l'*operatore di creazione* $c^*(f)$ per induzione sulla n-esima potenza tensoriale antisimmetrizzata:

$$c^*(f_1)c^*(f_2)\cdots c^*(f_n)\Omega = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\delta_\sigma} f_{\sigma(1)} \otimes f_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}, \tag{2.2}$$

dove S_n è il gruppo delle permutazioni di n oggetti e δ_σ è la parità della permutazione σ. Da essa discende che

$$\|\prod_{i=1}^{n} c^*(f_i)\Omega\|^2 = \det(f_i, f_j). \tag{2.3}$$

essendo $\det(f_i, f_j)$ il determinante della matrice il cui elemento in posizione (ij) è il prodotto scalare tra gli elementi f_i ed f_j. Per convenzione, in una produttoria di operatori i fattori sono disposti secondo l'ordine naturale degli indici. Chiaramente, $c^*(f)$ si estende ad un operatore limitato definito su tutto lo spazio di Fock fermionico. Precisamente, si ha: $\|c^*(f)\| = \|f\|$.[1] Gli operatori di distruzione $c(f)$ sono definiti come gli aggiunti dei corrispondenti operatori di creazione $c^*(f)$. Tali operatori verificano le relazioni:

$$\begin{aligned} \{c(f), c(g)\} = \{c^*(f), c^*(g)\} = 0 \\ \{c(f), c^*(g)\} = (f, g)\mathbb{1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

per arbitrari $f, g \in \mathscr{H}$ (nelle nostre notazioni, $\{\cdot\,,\cdot\}$ denota l'anticommutatore, $[\cdot\,,\cdot]$ il commutatore). Questi operatori formano un'algebra C^* (precisamente, un'algebra CAR) e questa rappresentazione (detta di Fock-Cook) è l'unica rappresentazione irriducibile per la quale esiste un vettore $\Omega \neq 0$ tale che $c(f)\Omega = 0$, $\forall f \in \mathscr{H}$, ovvero esista un vettore non banale annullato da tutti gli operatori di distruzione.

Se $U \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$, si può definire su $\overline{\wedge^n \mathscr{H}}$, e quindi su tutto lo spazio di Fock fermionico, l'operatore $\Gamma(U)$ tale che

$$\Gamma(U)c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega = c^*(Uf_1)\cdots c^*(Uf_n)\Omega. \tag{2.5}$$

Come si verifica immediatamente, risulta

$$\Gamma(U)\Gamma(V) = \Gamma(UV). \tag{2.6}$$

In particolare, se $U \in \mathcal{U}(\mathscr{H}) := \{A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, A \text{ unitario}\}$, si ha che la corrispondenza definita da $c^*(f) \mapsto c^*(Uf)$ è un automorfismo dell'algebra CAR, unitariamente implementabile da $\Gamma(U)$ (nella rappresentazione di Fock):

$$\Gamma(U)c^*(f)\Gamma(U)^* = c^*(Uf) \tag{2.7}$$

come si può vedere dalla (2.5). Un arbitrario $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ induce su $\mathcal{F}_a(\mathscr{H})$ un *operatore somma* $d\Gamma(A)$ definito sugli spazi componenti $\overline{\wedge^n \mathscr{H}}$ come

$$d\Gamma(A) = A \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes A \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} + \cdots + \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes A.$$

Esplicitamente:

$$d\Gamma(A)c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega = \sum_{i=1}^{n} c^*(f_1)\cdots c^*(Af_i)\cdots c^*(f_n)\Omega. \tag{2.8}$$

[1] Cfr. Appendice

Elenchiamo le proprietà principali dell'operatore somma, peraltro facilmente dimostrabili:

$$d\Gamma(A)^* = d\Gamma(A^*), \tag{2.9}$$

$$[d\Gamma(A), d\Gamma(B)] = d\Gamma([A, B]), \tag{2.10}$$

$$e^{itd\Gamma(A)} = \Gamma(e^{itA}), \tag{2.11}$$

$$[d\Gamma(A), c^*(f)] = c^*(Af). \tag{2.12}$$

Un ruolo fondamentale è svolto dall'operatore somma nel caso particolare in cui $A = \mathbb{1}$.

Definizione 1 *L'operatore somma* $d\Gamma(\mathbb{1})$ *prende il nome di* operatore numero (di particelle).

Sia P_l il proiettore spettrale dell'operatore numero sull'intervallo $[0, l]$. Allora

$$P_l \mathcal{F}_a(\mathscr{H}) = \bigoplus_{n=0}^{l} \overline{\wedge^n \mathscr{H}}, \tag{2.13}$$

valendo la maggiorazione:

$$\|d\Gamma(A)P_l\| \leq l\|A\|. \tag{2.14}$$

In generale, anche se $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\Gamma(A)$ e $d\Gamma(A)$ non sono limitati, ma sono comunque ben definiti sul sottospazio $\mathscr{D}$ dei vettori ad un numero finito di particelle:

$$\mathscr{D} := \{F \in \mathcal{F}_a(\mathscr{H}) : F = P_l F, \quad l \in \mathbb{N} \text{ opportuno}\}. \tag{2.15}$$

Tutte le precedenti identità sono sicuramente valide su $\mathscr{D}$. Sia $A \in \mathscr{J}_1$; con questa definizione intendiamo dire (Cf. [PS]):

$$Af = \sum_{i=1}^{N} \lambda_n g_n(f_n, f), \qquad N \leq \infty,$$

dove $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots > 0$ sono i valori singolari di A, $\{f_n\}$ ed $\{g_n\}$ due sistemi ortonormali. Posto

$$Ac^*c := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c^*(g_n)c(f_n), \tag{2.16}$$

si può dimostrare che Ac^*c è ben definito, in quanto il secondo membro non dipende dalla scelta dei sistemi $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$. Inoltre, se $N = \infty$, la serie converge in norma, in quanto $\|c^{(*)}(f)\| = \|f\|$ e $\sum_n \lambda_n = Tr|A| < \infty$. Inoltre, si verifica facilmente che

$$d\Gamma(A) = Ac^*c. \tag{2.17}$$

Ne consegue che $d\Gamma(A)$ è ancora un elemento dell'algebra CAR, e quindi anche $\Gamma(e^{itA})$, purché $A \in \mathcal{J}_1$. Osserviamo che, in tal caso, $d\Gamma(A)$ è limitato (come si vede immediatamente), e che vale anche il viceversa: $A \notin \mathcal{J}_1$ implica $d\Gamma(A)$ non limitato.

Osserviamo che, poiché $A \to d\Gamma(A)$ è lineare, anche la corrispondenza $A \to Ac^*c$ è lineare. Per garantire che le mappe $A \to Acc^*, Acc, Ac^*c^*$ da $\mathcal{J}_1$ nell'algebra CAR siano ben definite e lineari (su $\mathbb{C}$) è necessario introdurre una coniugazione $\mathscr{J}$ su $\mathscr{H}$. Denoteremo con $\bar{f}, \bar{A}$ e A^T gli oggetti $\mathscr{J}f$, $\mathscr{J}A\mathscr{J}$ e $\mathscr{J}A^*\mathscr{J}$ rispettivamente, in previsione del fatto che applicheremo questa teoria ad un caso concreto in cui $\mathscr{H}$ è uno spazio di funzioni e $\mathscr{J}$ è la coniugazione complessa. Per $A \in \mathcal{J}_1$ definiamo:

$$Acc^* := \sum_n \lambda_n c(\bar{g}_n)c^*(\bar{f}_n) = -A^T c^* c + Tr\, A, \tag{2.18}$$

$$Acc := \sum_n \lambda_n c(\bar{g}_n)c(f_n), \tag{2.19}$$

$$Ac^*c^* := \sum_n \lambda_n c^*(g_n)c^*(\bar{f}_n)^*. \tag{2.20}$$

Poiché il secondo membro della (2.19) è una mappa lineare in A, la corrispondenza $A \to Acc^*$ è lineare. Per dimostrare la linearità di $A \to Acc$ notiamo innanzitutto che

$$[Acc, c^*(f)] = c((\bar{A} - A^*)\bar{f}), \tag{2.21}$$

come segue facilmente dalle relazioni CAR. Quindi, se $A, B \in \mathcal{J}_1$, l'operatore $D := (\alpha A + \beta B)cc - \alpha(Acc) - \beta(Bcc)$ commuta con tutti i $c^{(*)}(f)$ e quindi $D = c\mathbb{1}$. Poiché $(\Omega, D\Omega) = 0$, segue che $c = 0$. Analogamente si dimostra la linearità di $A \to Ac^*c^*$. Notiamo che la (2.21) implica che gli operatori Acc e Ac^*c^* sono identicamente zero nel caso $A = A^T$. Le mappe $A \to Acc$, Ac^*c^* ammettono estensioni continue su $\mathscr{D}$ alla classe $\mathcal{J}_2$ degli operatori di Hilbert-Schmidt. Precisamente, ogni $A \in \mathcal{J}_2$ determina in modo unico due operatori Acc e Ac^*c^* di $\mathscr{D}$ in se tali che $A_n c^{(*)}c^{(*)}f \to Ac^{(*)}c^{(*)}F$, $\forall F \in \mathscr{D}$ quando $\mathcal{J}_1 \ni A_n \to A$ in $\mathcal{J}_2$. Tale affermazione discende immediatamente dalle seguenti maggiorazioni:

$$\|Acc P_l\| \leq l\|A\|_2, \tag{2.22}$$

$$\|Ac^*c^* P_l\| \leq (l+2)\|A\|_2. \tag{2.23}$$

In realtà, la (2.23) segue dalla (2.22), in quanto $\|Ac^*c^*P_l\| = \|P_{l+2}Ac^*c^*\| = \|A^*ccP_{l+2}\|$. Infine, osserviamo che se A e B sono due operatori di rango 1 si ha:

$$[Acc, d\Gamma(B)] = (A - A^T)Bcc, \tag{2.24}$$

$$[Acc, Bc^*c^*] = \frac{1}{2}Tr(B - B^T)(A - A^T) - d\Gamma((B - B^T)(A - A^T)). \tag{2.25}$$

Per continuità e linearità le (2.24)-(2.25) valgono su $\mathscr{D}$ per ogni $A \in \mathscr{J}_2$ ed ogni B limitato.

Per continuare ad acquisire familiarità con certa terminologia, identifichiamo $\mathscr{H}$ e $\mathscr{J}$ con $L^2(\mathbb{R}, dp)$ e la coniugazione complessa, rispettivamente. Denotiamo con $\mathscr{D}_0^\infty$ il sottospazio di $\mathscr{D}$ costituito dai vettori F le cui componenti ad n particelle $F^{(n)}$ siano in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definiamo un operatore $c(p) : \mathscr{D}_0^\infty \to \mathscr{D}_0^\infty$ ponendo

$$(c(p)F)^{(l-1)}(p_1, \ldots, p_{l-1}) := l^{1/2} F^{(l)}(p, p_1, \ldots, p_{l-1}). \tag{2.26}$$

Di conseguenza, $(F, c(p)G) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\forall F, G \in \mathscr{D}_0^\infty$, e

$$\int dp f(p)(F, c(p)G) = (F, c(\bar{f})G), \quad \forall f \in \mathscr{H}. \tag{2.27}$$

Infatti, questo risulta ovvio per i tensori elementari in $\mathscr{D}_0^\infty$, così che il caso generale segue per linearità e continuità. Analogamente, denotando con $c^*(p)$ la forma quadratica aggiunta di $c(p)$ su $\mathscr{D}_0^\infty$, si ha:

$$\int dp f(p) c^*(p) = c^*(f), \quad \forall f \in \mathscr{H}, \tag{2.28}$$

dove si intende che l'integrale della forma al primo membro coincide con la forma dell'operatore $c^*(f)$. Spesso, particolarmente nella letteratura fisica, tali oggetti non hanno un significato matematico rigoroso, ma vengono trattati solo da un punto di vista formale. In generale, quindi, prodotti e funzioni di operatori di creazione e distruzione $c(p)$ e $c^*(q)$ non hanno un vero significato analitico. Per convincersi di questo, basti osservare che, mentre $c(p)$ può essere visto come un operatore densamente definito, il dominio del suo operatore aggiunto consiste del solo vettore nullo, così che $c^*(p)$ deve essere interpretato come una forma quadratica.

Procediamo considerando solo alcuni casi in cui ha senso il prodotto di tali operatori, e a tal proposito sia A un operatore tracciabile. Allora A è un operatore integrale con nucleo $A(p,q)$ a quadrato integrabile e, come è facile dimostrare,

$$\int dp\, dq A(p,q)(F, c(p)c(q)G) = (F, AccG), \quad \forall F, G \in \mathscr{D}_0^\infty \tag{2.29}$$

(tale equazione è chiaramente vera per F e G tensori elementari e A di rango 1, e pertanto è vera sempre). La (2.29) permette di dimostrare la maggiorazione (2.22). Infatti

$$|(F^{(l-2)}, AccG^{(l)})| =$$

$$(l(l-1))^{1/2} \left| \int dp dq A(p,q) \int dp_1 \ldots dp_{l-2} \bar{F}^{(l-2)}(p_1, \ldots, p_{l-2}) G^l(q, p, p_1, \ldots, p_{l-2}) \right|$$

$$\leq l\int dpdq|A(p,q)|\Big[\int dp_1\dots dp_{l-2}|F^{(l-2)}(p_1,\dots,p_{l-2})|^2\cdot$$

$$\cdot\int dq_1\dots dq_{l-2}|G^{(l)}(q,p,q_1,\dots,q_{l-2})|^2\Big]^{1/2}\leq$$

$$\leq l\|A\|_2\|F^{(l-2)}\|\|G^{(l)}\|, \tag{2.30}$$

dove abbiamo usato la disugualgianza di Schwarz. Siamo quindi autorizzati a considerare operatori della forma Acc e Ac^*c^* per $A\in\mathcal{J}_2$; sono ben definiti su $\mathscr{D}$, ma non sono limitati se $A\notin\mathcal{J}_1$. Dalla (2.29) segue, tra l'altro, la linearità della mappa $A\to Acc$, così come quella di $A\to Ac^*c^*$ discende dall'analoga

$$\int dpdqA(p,q)(c(q)c(p)F,G)=(F,Ac^*c^*G),\quad \forall F,G\in\mathscr{D}_0^\infty. \tag{2.31}$$

Se A è limitato è possibile dare una simile rappresentazione al generatore $d\Gamma(A)$: la mappa $S(\mathbb{R})\times S(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$, $<f,g>\to(\bar{f},Ag)$ è bilineare e continua, e quindi, per il teorema del nucleo di Schwarz, A ammette un unico nucleo integrale $A(p,q)\in S'(\mathbb{R}^2)$. Allora, $d\Gamma(A)$ corrisponde a $\int dpdqA(p,q)c^*(p)c(q)$ nel senso che

$$(F,d\Gamma(A)G)=\int dpdqA(p,q)(c(p)F,c(q)G),\quad \forall F,G\in\mathscr{D}_0^\infty. \tag{2.32}$$

Al solito, con questa notazione integrale si intende la valutazione di una distribuzione su una funzione e la dimostrazione della (2.32) segue per linearità e continuità dal caso in cui A ha rango 1.

2.2 Seconda quantizzazione per particelle relativistiche

Nei casi concreti, come quello che ci riguarda, $\mathscr{H}=\mathscr{H}_+\oplus\mathscr{H}_-$, dove $\mathscr{H}_\pm$ sono copie di uno stesso spazio $L^2\equiv L$. Qui esiste una coniugazione naturale J data dalla classica coniugazione complessa $Jf=\bar{f}$, definita separatamente su $\mathscr{H}_+$ e $\mathscr{H}_-$.

Siano P_δ ($\delta=+,-$) i proiettori su $\mathscr{H}_\pm$. Ricorriamo alla notazione delle matrici 2×2 a blocchi:

$$A=\begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-}\\ A_{-+} & A_{--}\end{pmatrix}$$

i cui elementi sono le matrici

$$A_{\delta\delta'}:=P_\delta AP_{\delta'},\qquad \delta,\delta'=+,-. \tag{2.33}$$

Ciascun elemento di A è dunque un endomorfismo di L. Si può definire un'altra coniugazione

$$Cf := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{f}, \quad f \in \mathscr{H}, \tag{2.34}$$

che ovviamente soddisfa

$$CP_\delta = P_{-\delta}C. \tag{2.35}$$

Tale decomposizione di $\mathscr{H}$ corrisponde al fatto che l'hamiltoniana libera di Dirac H_m ha spettro $(-\infty, -m] \cup [m, +\infty)$, dove $m \geq 0$ è la massa a riposo della particella. Qui $P_\pm$ sono i proiettori spettrali di H_m su $[m, +\infty)$ e $(-\infty, -m]$ rispettivamente. La *seconda quantizzazione* $A \mapsto d\Gamma(A)$, notoriamente impiegata nel caso non relativistico, non è però appropriata ad una teoria che si proponga di estendere la trattazione alle particelle relativistiche, dove emerge il problema delle energie negative (prive, tra l'altro, di significato fisico). A tale scopo si ricorre ad un'altra rappresentazione irriducibile dell'algebra CAR, definita da

$$\tilde{c}(f) := c(P_+f) + c^*(\overline{P_-f}). \tag{2.36}$$

Osserviamo preliminarmente che se $U \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ è tale che $[U, P_\delta] = 0$, allora l'automorfismo $\tilde{c}(f) \mapsto \tilde{c}(Uf)$ è unitariamente implementato dall'operatore

$$\widetilde{\Gamma}(U) := \Gamma(U_{++})\Gamma(\bar{U}_{--}) \tag{2.37}$$

come è immediato dimostrare. Per brevità si è adottata la notazione $\Gamma(U_{++}) \equiv \Gamma(U_{++} \oplus \mathbb{1})$. Analogamente $\Gamma(\bar{U}_{--}) \equiv \Gamma(\mathbb{1} \oplus \bar{U}_{--})$.

In particolare, l'automorfismo $\tilde{c}(f) \mapsto \tilde{c}(e^{itH_m}f)$ è implementato da

$$\widetilde{\Gamma}(e^{itH_m}) = \Gamma(e^{itH_m}{}_{++})\Gamma(\overline{e^{itH_m}}{}_{--}).$$

Fisicamente, $c^*(g)\Omega$ descrive uno stato di una particella se $g \in \mathscr{H}_+$, di antiparticella se $g \in \mathscr{H}_-$. Il fatto che $\mathscr{H}_+$ ed $\mathscr{H}_+$ sono copie dello stesso spazio L riflette il principio che le antiparticelle possono essere distinte dalle particelle solo dalla carica e non dalle funzioni d'onda.

Sia $U \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$; non è detto che esista un unitario $\widetilde{\Gamma}(U)$ sullo spazio di Fock tale che, posto $\phi(f) = \tilde{c}(f)$, si abbia

$$\phi(Uf) = \widetilde{\Gamma}(U)\phi(f)\widetilde{\Gamma}(U)^* \qquad \forall f \in \mathscr{H}. \tag{2.38}$$

È ben noto che condizione necessaria e sufficiente perché ciò avvenga è che le parti non diagonali di U, ovvero $U_{\delta-\delta}$, siano operatori di Hilbert-Schmidt (per brevità, HS). Una volta asserita l'esistenza di un unitario che implementi l'automorfismo di cui sopra, l'unicità a meno di un fattore di fase è conseguenza immediata dell'irriducibilità della rappresentazione $\{\phi(f)\}$.

Inoltre, poiché $(UV)_{\delta-\delta} = U_{\delta-\delta}V_{-\delta-\delta} + U_{\delta\delta}V_{\delta-\delta}$, gli unitari su $\mathscr{H}$ che inducono un automorfismo dell'algebra CAR unitariamente implementabile su $\mathcal{F}_a(\mathscr{H})$ costituiscono un gruppo, denotato con $\mathcal{G}_2$.

Definiamo $\mathfrak{g}_2 := \{A \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) : A_{+-} \text{ e } A_{-+} \in HS\}$, come algebra di Lie complessa di $\mathcal{G}_2$. Allora, se $A = A^* \in \mathfrak{g}_2$, e^{iAt} è un sottogruppo ad un parametro di $\mathcal{G}_2$ continuo in norma (basta espandere l'esponenziale ed utilizzare le seguenti stime: $\|BC\|_2 \leq \|B\|\|C\|_2$, $\|BC\|_2 \leq \|B\|_2\|C\|$). Non solo, ma si può dimostrare che, scegliendo oppurtunamente le fasi degli unitari che implementano i corrispondenti automorfismi dell'algebra CAR, è sempre possibile ottenere un gruppo ad un parametro fortemente continuo

$$\widetilde{\Gamma}(e^{itA}) = e^{itd\tilde{\Gamma}(A)}, \quad \forall A = A^* \in \mathfrak{g}_2 \tag{2.39}$$

dove $d\tilde{\Gamma}(A)$ è il generatore autoaggiunto. La costante additiva arbitraria nella definizione di $d\tilde{\Gamma}(A)$ è fissata imponendo che il suo valore di aspettazione sul vuoto sia zero, ovvero $(\Omega, d\tilde{\Gamma}(A)\Omega) = 0$. È facile dimostrare che tale scelta può essere sempre fatta quando $A \in \mathcal{J}_1$. Infatti, ricordiamo che $d\Gamma(A) = Ac^*c$ e $\Gamma(e^{itA}) = e^{itAc^*c}$ appartengono all'algebra CAR quando $A \in \mathcal{J}_1$. Poiché $e^{itAc^*c}c^*(f) = c^*(e^{itA}f)e^{itAc^*c}$, segue che $e^{itA\tilde{c}^*\tilde{c}}\tilde{c}^*(f) = \tilde{c}^*(e^{itA}f)e^{itA\tilde{c}^*\tilde{c}}$, dove

$$A\tilde{c}^*\tilde{c} = (a^*\ b)\begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^* \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

denota il rappresentante di Ac^*c nella rappresentazione (2.36). Si sono indicati con $a^{(*)}, b^{(*)}$ gli operatori di creazione e di distruzione di una particella, antiparticella rispettivamente. In virtù della precedente,

$$d\widetilde{\Gamma}(A) \equiv: A\tilde{c}^*\tilde{c} := A\tilde{c}^*\tilde{c} - Tr\, A_{--} \tag{2.41}$$

ha valore di aspettazione sul vuoto nullo ed implementa l'automorfismo $\tilde{c}(f) \to \tilde{c}(e^{itA}f)$. Notiamo che la (2.41) può essere scritta

$$d\widetilde{\Gamma}(A) = d\Gamma(A_{++}) - d\Gamma(A_{--}^T) + A_{+-}a^*b^* + A_{-+}ba. \tag{2.42}$$

Come abbiamo stabilito in precedenza, il membro di destra ha senso per ogni $A \in \mathfrak{g}_2$, purché agisca su un vettore ad un numero finito di particelle. Pertanto, la (2.42) fornisce un operatore ben definito su $\mathscr{D}$ per ogni $A \in \mathfrak{g}_2$, il quale lascia invariato $\mathscr{D}$ e preserva l'involuzione

$$d\tilde{\Gamma}(A)^* = d\tilde{\Gamma}(A^*), \quad \forall A \in \mathfrak{g}_2 \tag{2.43}$$

su $\mathscr{D}$. Citiamo anche il risultato seguente:

Proposizione 1 *Sia $A \in \mathfrak{g}_2$ autoaggiunto. Allora $d\widetilde{\Gamma}(A)$, definito dalla (2.42), è essenzialmente autoaggiunto su $\mathscr{D}$. Denotando la sua chiusura con lo stesso simbolo si ha:*

$$e^{itd\tilde{\Gamma}(A)}\phi(f)^* = \phi(e^{itA}f)^*e^{itd\tilde{\Gamma}(A)}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathscr{H}. \tag{2.44}$$

Definizione 2 L'operatore di carica Q *è il generatore del gruppo ad un parametro indotto dall'operatore identità:*

$$Q := d\widetilde{\Gamma}(\mathbb{1}) = d\Gamma(P_+) - d\Gamma(P_-). \tag{2.45}$$

Consideriamo la decomposizione dello spazio di Fock fermionico negli autospazi dell'operatore carica:

$$\mathcal{F}_a\mathscr{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n \tag{2.46}$$

ovvero $F \in \mathcal{F}_n \Longleftrightarrow QF = nF$.

Si dimostra facilmente che

$$\widetilde{\Gamma}(U)\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n+q(U)}, \qquad U \in \mathcal{G}_2,$$

dove $q(U) \in \mathbb{Z}$ è determinato univocamente da U. Infatti, poiché $e^{itQ}\widetilde{\Gamma}(U)$ e $\widetilde{\Gamma}(U)e^{itQ}$ implementano la stessa trasformazione, quella generata dall'operatore $e^{it}U = Ue^{it}$, deve risultare necessariamente

$$e^{itQ}\widetilde{\Gamma}(U) = e^{i\varphi(t)}\widetilde{\Gamma}(U)e^{itQ}. \tag{2.47}$$

Per la proprietà di gruppo e la relazione $e^{2\pi iQ} = \mathbb{1}$ segue che $\varphi(t) = q(U)t$, con $q(U) \in \mathbb{Z}$, e quindi la tesi. Analogamente, segue che

$$q(U_1U_2) = q(U_1) + q(U_2). \tag{2.48}$$

Quindi, se $q(U) = 1$, si può connettere al settore del vuoto $\mathcal{F}_0$ il settore di carica n applicando $\widetilde{\Gamma}(U)^n$. Un'altra proprietà importante per noi è

$$q(e^{itA}) = 0, \quad \forall A = A^* \in \mathfrak{g}_2. \tag{2.49}$$

Infatti, le proprietà enunciate sinora implicano

$$\exp[iq(e^{itA})] = (\exp[itd\tilde{\Gamma}(A)]\Omega\, , e^{iQ}\exp[itd\tilde{\Gamma}(A)]\Omega), \tag{2.50}$$

per cui $q(e^{itA}) = q(\mathbb{1}) = 0$ per continuità in t. Da questa proprietà discende che i settori carichi vengono lasciati invariati da $\widetilde{\Gamma}(e^{itA})$. Infine, notiamo che la (2.47) con $t = \pi$ può essere scritta

$$\Gamma(-\mathbb{1})\widetilde{\Gamma}(U) = (-1)^{q(U)}\widetilde{\Gamma}(U)\Gamma(-\mathbb{1}), \tag{2.51}$$

come conseguenza del fatto che l'intero $q(U)$ eguaglia l'indice di Fredholm di U_{--} :

$$q(U) = \dim\ker U_{--} - \dim\ker U^*{}_{--} \tag{2.52}$$

(Cf. [CHB]). Abbiamo implicitamente usato il fatto che $\widetilde{\Gamma}(-\mathbb{1}) = \Gamma(-\mathbb{1})$, come dimostrato dalle seguenti ovvie identità: $\widetilde{\Gamma}(-\mathbb{1}) = \Gamma(-\mathbb{1}_{++})\Gamma(-\mathbb{1}_{--}) =$

$= \Gamma(-P_+ \oplus I)\Gamma(I \oplus (-P_-)) = \Gamma(-P_+ \oplus (-P_-)) = \Gamma(-\mathbb{1})$. Come vedremo nel capitolo successivo, considereremo solo portatori di carica pari (per garantire la localizzabilità di certi morfismi) e quindi, per la (2.51), avremo a che fare con oggetti bosonici.

In vista dei calcoli successivi, è utile introdurre sin d'ora tre proposizioni che forniscono le regole di commutazione fra implementatori unitari e fra i loro generatori autoaggiunti.

Proposizione 2 *Per ogni $A, B \in \mathfrak{g}_2$, sul dominio $\mathcal{D}$ definito dalla (2.15) vale*

$$[d\widetilde{\Gamma}(A), d\widetilde{\Gamma}(B)] = d\widetilde{\Gamma}([A, B]) + C(A, B)\mathbb{1} \tag{2.53}$$

dove $C(A, B) := \mathrm{Tr}\ (A_{-+}B_{+-} - B_{-+}A_{+-})$ *è il* termine di Schwinger.

Dimostrazione. La verifica di questa identità può essere fatta direttamente utilizzando le relazioni di commutazione (2.24) e (2.25), ma si può fornire una dimostrazione alternativa che faccia uso di una maggiorazione che enunciamo senza dimostrare: se $A = A^* \in \mathfrak{g}_2$, si ha $\|d\widetilde{\Gamma}(A)P_l\| \leq (l+2)|\!|\!|A|\!|\!|$, dove $|\!|\!|A|\!|\!| = 4\max(\|A_{++}\|, \|A_{--}\|, \|A_{+-}\|_2, \|A_{-+}\|_2)$. In virtù di quest'ultima, è sufficiente dimostrare la (2.53) per $A, B \in \mathcal{J}_1$, in quanto il caso generale segue per continuità. In tale ipotesi Ac^*c e Bc^*c appartengono all'algebra CAR, per cui

$$[A\tilde{c}^*\tilde{c}, B\tilde{c}^*\tilde{c}] = [A, B]\tilde{c}^*\tilde{c} \tag{2.54}$$

in virtù delle (2.17) e (2.11). Per la (2.41) la precedente può essere scritta

$$[d\widetilde{\Gamma}(A), \widetilde{\Gamma}(B)] = d\widetilde{\Gamma}([A, B]) + Tr[A, B]_{--}. \tag{2.55}$$

D'altra parte, si ha anche

$$[A, B]_{--} = (A_{-+}B_{+-} - B_{-+}A_{+-}) + [A_{--}, B_{--}], \tag{2.56}$$

da cui discende immediatamente che $Tr[A, B]_{--} = C(A, B)$ per la ciclicità della traccia, e quindi la tesi.

□

È importante considerare il caso particolare in cui A e B commutano. In tale ipotesi, per la (2.56), si ottiene che $[A_{--}, B_{--}]$ è di classe traccia.

Proposizione 3 *Siano* $A, B \in \mathfrak{g}_2$, $A = A^*$, $B = B^*$ *e* $[A, B] = 0$. *Allora:*

$$\widetilde{\Gamma}(e^{iA})\widetilde{\Gamma}(e^{iB}) = e^{-C(A,B)/2}\widetilde{\Gamma}(e^{i(A+B)}). \tag{2.57}$$

Dimostrazione. In virtù della Proposizione 2, su $\mathscr{D}$ il commutatore di $d\widetilde{\Gamma}(A)$ e $d\widetilde{\Gamma}(B)$ è uguale al termine di Schwinger $C(A, B)$. Utilizzando argomenti standard, segue:

$$e^{i\,d\widetilde{\Gamma}(z_1 A)}e^{i\,d\widetilde{\Gamma}(z_2 B)} = e^{-z_1 z_2 C(A,B)/2}e^{i\,d\widetilde{\Gamma}(z_1 A + z_2 B)}$$

per $|z_1|+|z_2| < [2\max(\|A\|, \|B\|)]^{-1}$. Quindi, per n sufficientemente grande, si ottiene la (2.57) con $A/n, B/n$ in luogo di A, B e, di conseguenza, le relazioni:

$$\widetilde{\Gamma}(e^{iA/n})\widetilde{\Gamma}(e^{iB/n}) = e^{-C(A,B)/n^2}\widetilde{\Gamma}(e^{iB/n})\widetilde{\Gamma}(e^{iA/n}), \tag{2.58}$$

$$\widetilde{\Gamma}(e^{i(A+B)}) = \widetilde{\Gamma}(e^{i(A+B)/n})^n = e^{C(A,B)/2n}[\widetilde{\Gamma}(e^{iA/n})\widetilde{\Gamma}(e^{iB/n})]^n. \tag{2.59}$$

A questo punto, spostando i fattori $\widetilde{\Gamma}(e^{iB/n})$ verso destra nella (2.59), usando la (2.58), si ottiene la (2.57).

□

Concludiamo questa presentazione delle relazioni di commutazione fra operatori di seconda quantizzazione derivando una formula che risulterà utile quando uno degli unitari è un portatore di carica.

Proposizione 4 *Siano* $U \in \mathcal{G}_2$, $A = A^* \in \mathfrak{g}_2$, $[U, A] = 0$. *Allora*

$$\widetilde{\Gamma}(e^{iA})\widetilde{\Gamma}(U) = e^{i(\widetilde{\Gamma}(U)\Omega,\, d\widetilde{\Gamma}(A)\widetilde{\Gamma}(U)\Omega)}\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(e^{iA}). \tag{2.60}$$

Dimostrazione. Poiché $[A, U] = 0$, $\widetilde{\Gamma}(e^{iA})\widetilde{\Gamma}(U)$ e $\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(e^{iA})$ inducono lo stesso automorfismo e dunque, per l'irriducibilità della rappresentazione di Fock, esiste $\varphi \in \mathbb{R}$ tale che

$$\widetilde{\Gamma}(e^{iA})\widetilde{\Gamma}(U) = e^{i\varphi}\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(e^{iA}).$$

Ci siamo dunque ricondotti al calcolo della fase φ. Per questo osserviamo che, per lo stesso argomento di cui sopra,

$$\widetilde{\Gamma}(e^{itA})\widetilde{\Gamma}(U) = e^{i\varphi(t)}\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(e^{itA}) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

che, per $t = 1$, si riduce alla relazione da dimostrare. Ponendo $t = 0$ si ottiene $e^{i\varphi(0)} = 1$. Facendo, invece, la derivata[2] rispetto a t e tenendo conto della relazione $\widetilde{\Gamma}(e^{itA}) = e^{itd\widetilde{\Gamma}(A)}$ si ottiene:

$$i\, d\widetilde{\Gamma}(A)\, e^{i\varphi(t)}\, \widetilde{\Gamma}(U)\, e^{itd\widetilde{\Gamma}(A)} = i\, e^{i\varphi(t)} \left(\varphi'(t)\, \widetilde{\Gamma}(U)\, e^{itd\widetilde{\Gamma}(A)} + \widetilde{\Gamma}(U)\, e^{itd\widetilde{\Gamma}(A)}\, d\widetilde{\Gamma}(A)\right)$$

da cui:

$$[d\widetilde{\Gamma}(A), \widetilde{\Gamma}(U)] = \varphi'(t)\widetilde{\Gamma}(U).$$

Segue che $\varphi'(t) =$ costante $\equiv \varphi'(0)$, e quindi $\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t$. Per quanto visto sopra, risulta dunque $e^{i\varphi(t)} = e^{it\varphi'(0)}$.

Infine, determiniamo $\varphi'(0)$:

$$(\widetilde{\Gamma}(U)\Omega,\, [d\widetilde{\Gamma}(A),\, \widetilde{\Gamma}(U)]\Omega) = (\widetilde{\Gamma}(U)\Omega,\, \varphi'(t)\widetilde{\Gamma}(U)\Omega) = \varphi'(t),$$

[2] È lecito derivare rispetto a t in quanto, come stabilito in precedenza, la corrispondenza $t \mapsto e^{itd\widetilde{\Gamma}(A)}$ è fortemente continua.

e poiché $(\tilde{\Gamma}(U)\Omega, \tilde{\Gamma}(U)d\tilde{\Gamma}(A)\Omega) = 0$, si ha:

$$\varphi'(0) \equiv \varphi'(t) = (\widetilde{\Gamma}(U)\Omega, d\widetilde{\Gamma}(A)\widetilde{\Gamma}(U)\Omega)$$

da cui la tesi.

$\square$

2.3 Implementabilità di gruppi di gauge nella teoria di Dirac

2.3.1 Teoria di Dirac per una particella in (1+1) dimensioni

Presentiamo una breve panoramica su alcuni operatori nel contesto della teoria di Dirac per una particella di massa $m \geq 0$ in uno spazio tempo (1+1)-dimensionale. L'Hamiltoniana di Dirac libera è l'operatore differenziale

$$\check{H}_m := \begin{pmatrix} -i\frac{d}{dx} & m \\ m & i\frac{d}{dx} \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

sullo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)^2$. In termini di γ-algebra di Dirac tale definizione corrisponde alla seguente scelta:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 := \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.62}$$

Il dominio di $\check{H}_m$ è lo spazio di Sobolev $H_1(\mathbb{R})^2$. Per diagonalizzare $\check{H}_m$ si introduce l'operatore unitario

$$W : \mathscr{H} \equiv L^2(\mathbb{R}, dp)^2 \to \check{\mathscr{H}} \equiv L^2(\mathbb{R}, dx)^2,$$

$$(g_+(p), g_-(p)) \to (Wg)(x) \tag{2.63}$$

definito da

$$(Wg)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\delta=+,-} \int dp\, e^{i\delta xp} w_\delta(p) g_\delta(p), \tag{2.64}$$

la cui trasformazione inversa è data da

$$(W^{-1}f)_\delta(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-i\delta xp} w_\delta(p) \cdot f(x). \tag{2.65}$$

Nelle nostre notazioni, gli spinori di Dirac w_δ sono definiti da:

$$w_+(p) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1+p/E_p)^{1/2} \\ (1-p/E_p)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad w_-(p) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1+p/E_p)^{1/2} \\ -(1-p/E_p)^{1/2} \end{pmatrix}, \tag{2.66}$$

dove

$$E_p := \sqrt{p^2 + m^2}. \tag{2.67}$$

Notiamo che se $m = 0$ gli spinori si Dirac si riducono (con ovvio significato delle notazioni) alle funzioni

$$w_{(0)+}(p) := \begin{pmatrix} \Theta(p) \\ \Theta(-p) \end{pmatrix}, \quad w_{(0)-}(p) := \begin{pmatrix} \Theta(p) \\ -\Theta(-p) \end{pmatrix}, \tag{2.68}$$

dove Θ è la funzione di Heaviside. Adottiamo la notazione $A := W^{-1}\check{A}W$ se $\check{A}$ è un operatore su $\mathscr{H}$. In tal modo, si verifica facilmente che

$$(H_m f)_\delta(p) = \delta E_p f_\delta(p), \tag{2.69}$$

mentre gli operatori *momento*, *coniugazione di carica* e *parità*, così definiti:

$$\begin{aligned} (\check{P}^1 g)(x) &:= -i\left(\frac{d}{dx}g\right)(x), & (2.70)\\ (\check{C}g)(x) &:= \gamma^5 \bar{g}(x), & (2.71)\\ (\check{P}g)(x) &:= \gamma^0 g(-x) & (2.72) \end{aligned}$$

si trasformano in

$$\begin{aligned} (P^1 f)_\delta(p) &= \delta p f_\delta(p), & (2.73)\\ (Cf)_\delta(p) &= \bar{f}_{-\delta}(p), & (2.74)\\ (Pf)_\delta(p) &= \delta f_\delta(-p). & (2.75) \end{aligned}$$

Denotiamo i proiettori spettrali di H_m su $[m, \infty)$ e $(-\infty, -m]$ con P_+ e P_- rispettivamente, per cui, in virtù della (2.69), si ha:

$$\mathscr{H}_\delta := P_\delta \mathscr{H} \simeq L^2(\mathbb{R}, dp), \quad \delta = +, -. \tag{2.76}$$

Notiamo che le (2.74)-(2.75) implicano:

$$\begin{aligned} [P^1, P_\delta] &= 0, & (2.77)\\ CP_\delta &= P_{-\delta}C, & (2.78)\\ [P, P_\delta] &= 0. & (2.79) \end{aligned}$$

Notiamo anche che i proiettori $P_\pm$ sono dati dai moltiplicatori

$$P_\pm = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} \pm \frac{H(p)}{E_p}\right), \tag{2.80}$$

che non devono essere confusi con i *proiettori chirali*

$$\check{q}_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{q}_- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.81}$$

Questi ultimi soddisfano

$$[q_s, P_\delta] = 0, \quad s = +, -, \quad m = 0 \tag{2.82}$$

ma non commutano con P_δ per $m > 0$.

2.3.2 Implementabilità di $U(1)$

Nello teoria del campo libero di Dirac in (1+1)-dimensioni esposta in questa sezione, le trasformazioni di gauge sono operatori di moltiplicazione per matrici unitarie su $\check{\mathscr{H}}$. Tuttavia, poiché siamo interessati a "trasportare" questi unitari sullo spazio di Fock, dobbiamo considerare quelle trasformazioni di gauge che definiscono unitari nel gruppo $\mathcal{G}_2$, ovvero il gruppo di unitari le cui parti non diagonali sono in HS. Dato che $\mathcal{G}_2 \subset \mathfrak{g}_2$, l'algebra di Lie degli operatori limitati con parti non diagonali in HS, considereremo dapprima operatori di moltiplicazione limitati su $\check{\mathscr{H}}$.

Per ogni $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, si definiscono due operatori di moltiplicazione

$$\check{A}_+ := \begin{pmatrix} \alpha(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \check{A}_- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha(-x) \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

su $\check{\mathscr{H}}$. I nuclei integrali di A_s, $s = +, -$ sono dati da

$$A_{+,\delta\delta'}(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^{1/2} \hat{\alpha}(\delta p_1 - \delta' p_2) \prod_{i=1}^{2} (1 + p_i/E_{p_i})^{1/2}, \tag{2.84}$$

$$A_{-,\delta\delta'}(p_1, p_2) = \delta\delta' \left(\frac{1}{8\pi}\right)^{1/2} \hat{\alpha}(-\delta p_1 + \delta' p_2) \prod_{i=1}^{2} (1 - p_i/E_{p_i})^{1/2} \tag{2.85}$$

dove

$$\hat{\alpha}(p) := \left(\frac{1}{8\pi}\right)^{1/2} \int dx\, e^{-ipx} \alpha(x). \tag{2.86}$$

Nel caso $m > 0$, che è quello che ci interessa, si ha:

$$\int dp_1 dp_2 |A_{(m)s,\delta-\delta}(p_1, p_2)|^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{m^2}{8\pi} \int d\Theta_1 d\Theta_2 \big|\hat{\alpha}(\delta m[\sinh\Theta_1 + \sinh\Theta_2])\big|^2 e^{\Theta_1 + \Theta_2} = \\ &= \frac{m^2}{4\pi} \int d\phi d\Theta \big|\hat{\alpha}(2\delta m \sinh\varphi\, \cosh\Theta)\big|^2 e^{2\varphi} = \\ &= \frac{m}{2\pi} \int dk I\left(\frac{k}{2m}\right) \big|\hat{\alpha}(\delta k)\big|^2, \end{aligned} \tag{2.87}$$

dove

$$I(y) := \frac{1}{4} \int \frac{d\Theta}{\cosh^2\Theta} \big[2y + 2(\cosh^2\Theta + y^2)^{1/2} - \cosh^2\Theta\, (\cosh^2\Theta + y^2)^{-(1/2)}\big]. \tag{2.88}$$

Si verifica facilmente che, per una costante C opportuna,

$$0 < I(y) \leq C(|y| + 1), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{2.89}$$

da cui si ricava la convergenza dell'integrale (2.87). Questo dimostra che le parti non diagonali di $A_{(m)s}$ sono in HS per $m > 0$

Per quanto riguarda gli operatori di moltiplicazione della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha(\cdot) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha(\cdot) & 0 \end{pmatrix},$$

si verifica facilmente che non sono elementi di $\mathfrak{g}_2$. Per questo motivo restringiamo la nostra attenzione agli operatori di moltiplicazione che commutano con γ^5. Chiaramente, perchè gli operatori A siano in $\mathfrak{g}_2$ non è necessario che $\alpha \in C_0^\infty$, ma è sufficiente richiedere che α sia in $L^\infty(\mathbb{R})$ e che abbia trasformata di Fourier distribuzionale tale che la (2.87) abbia senso e converga. Comunque, per evitare inutili complicazioni tecniche, fissiamo una classe più ristretta di funzioni α, precisamente le scegliamo nello spazio di Sobolev $H_1(\mathbb{R})$. Ricordiamo che $H_1(\mathbb{R})$ consiste delle funzioni assolutamente continue in L^2 con derivata anch'essa in L^2. Poichè tali funzioni si annullano all'infinito, sono limitate e la condizione HS è soddisfatta in quanto $\int dk(k^2+1)|\hat{\alpha}(k)|^2 < \infty$ implica $\int dk|k||\hat{\alpha}(k)|^2 < \infty$. Denotiamo con V lo spazio delle funzioni a valori reali in $H_1(\mathbb{R})$. È chiaro che, per ogni $\alpha \in V$, $\exp[i\alpha(x)]$ è un cammino continuo nel gruppo $U(1)$, che converge all'identità per $|x| \to \infty$; inoltre, tali cammini formano un gruppo rispetto alla moltiplicazione punto per punto, in quanto V è uno spazio vettoriale. In tal modo si ottiene un sottogruppo del gruppo dei cappi in $U(1)$, denotato con $L_eU(1)_0$. Il pedice e sta a significare che i cappi partono dall'identità e, mentre il pedice 0 denota l'indice di avvolgimento. Introduciamo adesso un gruppo più grande costituito da cappi intorno ad e di indice di avvolgimento arbitrario. A tale scopo, poniamo

$$L_eU(1) := \{u \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, U(1)) \,|\, u(\cdot) - 1 \in H_1(\mathbb{R})\}. \tag{2.90}$$

In effetti $L_eU(1)$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione punto per punto in virtù del fatto che $f \in H_1$ e $g - 1 \in H_1$ implicano $fg \in H_1$. Definendo $\eta(x) := \pi + 2\arctan x$ e $\sigma(x) := \exp[i\eta(x)] = (x-i)/(x+i)$ si verifica facilmente che ogni $u(x) \in L_eU(1)$ può essere scritto in modo unico nella forma $\exp[i\alpha(x)]\sigma^n(x)$ con $\alpha \in V$ e $n \in \mathbb{Z}$. Quindi, $L_eU(1)$ è generato dalla sua componente dell'identità $L_eU(1)_0$ e dal cappio σ di indice di avvolgimento 1.

Su $\check{\mathscr{H}}$ definiamo due rappresentazioni unitarie fedeli $\check{\pi}_\pm$ di $L_eU(1)$ ponendo

$$\check{\pi}_+(u) = \begin{pmatrix} u(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.91}$$

e

$$\check{\pi}_-(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u(-x) \end{pmatrix}. \tag{2.92}$$

Per quanto visto in precedenza è chiaro che $\pi_s(u) \in \mathcal{G}_2$. Corrispondentemente, si ottengono due rappresentazioni unitarie proiettive $\widetilde{\Gamma}(\pi_\pm)$ su $\mathcal{F}_a(\mathscr{H})$. Altre trasformazioni di gauge globali sono della forma

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi_+} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_-} \end{pmatrix}, \quad \varphi_\pm \in (0, 2\pi).$$

Nel caso che ci interessa, $m > 0$, si deve richiedere $\varphi_+ = \varphi_-$, altrimenti la condizione HS sarebbe violata. La scelta del segno $-$ per l'argomento di x nella seconda delle (2.83) e nella (2.92) è motivata dal fatto che in tal modo valgono le seguenti relazioni:

$$\check{P}\check{A}_s\check{P} = \check{A}_{-s}, \quad \check{P}\check{\pi}_s(u)\check{P} = \check{\pi}_{-s}(u), \tag{2.93}$$

di dimostrazione immediata. Grazie ad esse si ottiene un'equivalenza unitaria delle corrispondenti rappresentazioni attraverso l'operatore parità dello spazio di Fock, permettendo così di considerare soltanto una delle due rappresentazioni.

Chiudiamo questo paragrafo stabilendo una formula utile per il calcolo dell' indice di U_{--} nel caso di un moltiplicatore unitario. Gli operatori che ci interessano hanno la forma

$$(\check{U}f)(x) = u(x)f(x), \quad u(x) \in U(2), \quad f \in \check{\mathscr{H}} \tag{2.94}$$

dove, al solito, $u(x)$ denota una matrice 2×2 che, in questo caso, assumiamo diagonale:

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_+(x) & 0 \\ 0 & u_-(x) \end{pmatrix}, \quad u_\pm(x) \in \mathbb{C}. \tag{2.95}$$

Gli operatori di questa forma costituiscono un gruppo G_χ. Consideriamo il suo sottogruppo G_e costituito da quegli elementi $U \in G_\chi$ le cui funzioni $u_\pm(x) \in U(1)$ sono continue su $\mathbb{R}$ e soddisfano

$$u_s(x) - 1 = o(1), \quad |x| \to \infty, \quad s = +, -.$$

Tali elementi ammettono un'ovvia interpretazione topologica: $u_\pm$ possono essere visti come mappe continue di $\mathbb{S}^1$ che si riducono ad 1 sul polo N. L'utilità di questa interpretazione risulta più evidente in casi di dimensione superiore, dove è particolarmente conveniente vedere $\mathbb{R}^{2N-1}$ come ottenuto da $\mathbb{S}^{2N-1}$ tramite proiezione stereografica. Per operatori di questo tipo è possibile dare una formula per il calcolo dell'indice di U_{--}. Vale, infatti, il seguente

Teorema 1 *Per ogni U di G_e*

$$\text{Ind } U_{--} = w(u_+) - w(u_-) \tag{2.96}$$

(Cf. [Rui]). Ma possiamo specializzare ulteriormente queste formule per renderle ancora più adatte al tipo di operatori che incontreremo. In particolare, nel caso (1+1)-dimensionale, possiamo considerare quei moltiplicatori continui di G_χ per i quali esiste $u_\infty \in C(\mathbb{S}^0, U(1))$ tali che

$$u_s(x) - u_\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) = o(1), \quad |x| \to \infty, \quad s = +, -.$$

Nel nostro caso è ovviamente $\mathbb{S}^0 \equiv \{\pm 1\}$. Si dimostra che tali moltiplicatori costituiscono un gruppo, denotato con G_h, e che per essi si può calcolare l'indice di Fredholm grazie al seguente (Cf. [Rui])

Teorema 2 *Sia $U \in G_h$. Allora*

$$\text{Ind } U_{--} = w(u_+ u_-^{-1}). \tag{2.97}$$

Chiaramente, la mappa $u_+ u_-^{-1}$ è continua all'infinito, e quindi ha un indice di avvolgimento ben definito $w \in \mathbb{Z}$.

Anticipando un calcolo che risulterà utile nel prossimo capitolo, consideriamo il caso $u_+(x) = e^{i\pi(n+\lambda)\varepsilon(x)}$, $u_-(x) = e^{i\pi\lambda\varepsilon(x)}$. Come è noto, l'indice di avvolgimento di una curva $\gamma : t \in [a, b] \mapsto \gamma(t)$ intorno al punto z_0 è $\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{dz}{z - z_0}$. Ponendo $t \equiv \varepsilon(x) \in [-1, 1]$, otteniamo la curva $z(t) = e^{i\pi n t}$ il cui indice di avvolgimento intorno al punto $z_0 = 0$ è proprio n. Pertanto, il teorema 2 ci ha fornito un metodo per determinare facilmente l'indice di U_{--} in un caso che tornerà particolarmente utile quando dovremo stabilire quali settori carichi sono connessi al settore del vuoto dai portatori di carica di questa forma.

2.4 Operatori di campo "classici" e loro implementazione

Per completare lo studio degli operatori che utilizzeremo nel capitolo successivo, vogliamo dimostrare che i nostri unitari che inducono automorfismi dell'algebra CAR sullo spazio di Fock fermionico sono tutti unitariamente implementabili. Seguiremo la linea espositiva di Ruijsenaars.

Sia $\alpha(x_1)$ una funzione C^∞ dispari e a valori reali che valga 1 per $x_1 > 1$ e che sia monotona crescente su $(-1, 1)$. In questa sezione studieremo un operatore "kink" definito da

$$\check{U}_{\lambda,\epsilon} := e^{i\pi\lambda\alpha(\cdot/\epsilon)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \epsilon > 0, \tag{2.98}$$

ed i corrispondenti operatori di campo classici $U^x_{\lambda,\epsilon} \equiv T(x) U_{\lambda,\epsilon} T(-x)$ di cutoff. Il primo risultato è una forma di località "approssimata" per gli operatori classici di campo:

Lemma 1 *Dati $x, y \in \mathbb{R}^2$ con $(x-y)^2 < 0$, si ha*

$$[U^x_{\lambda,\epsilon}, U^y_{\lambda',\epsilon}] = 0, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{C} \tag{2.99}$$

per ϵ sufficientemente piccolo.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che è sufficiente dimostrare la tesi per $x \in (a, a+\delta)$ e $y \in (-a, -a-\delta)$, dove $a \geq 0$ e $\delta > 0$. Inoltre, basta dimostrare che i commutatori sono nulli sui sottospazi $\check{\mathscr{H}}_r$ e $\check{\mathscr{H}}_l$ di $\check{\mathscr{H}}$ per ϵ sufficientemente piccolo, dove $\check{\mathscr{H}}_r$ e $\check{\mathscr{H}}_l$ sono costituiti dalle funzioni in $\check{\mathscr{H}}$ i cui supporti sono posti alla destra e sinistra dell'origine, rispettivamente. Fissato $\epsilon \leq \delta$, affermiamo che gli operatori $\check{U}^x_{\lambda,\epsilon}$, $\check{U}^y_{\lambda',\epsilon}$: (i) agiscono come la moltiplicazione per il fattore $e^{-i\pi\lambda}$, $e^{i\pi\lambda'}$ su $\check{\mathscr{H}}_l$, $\check{\mathscr{H}}_r$, rispettivamente; (ii) lasciano invariati $\check{\mathscr{H}}_r$, $\check{\mathscr{H}}_l$. In effetti, da queste due affermazioni la (2.99) segue facilmente. La verifica di (i) e (ii) segue una procedura standard (Cf. [Rui]).

□

Vogliamo dimostrare che $U_{\lambda,\epsilon}$ ha parti non diagonali in HS per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, e che quindi genera trasformazioni di Bogoliubov unitariamente implementabili per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Ricordiamo innanzitutto che $\check{U}_{\lambda,\epsilon}$ agisce come la moltiplicazione per la funzione $e^{i\pi\lambda\alpha(x_1/\epsilon)}$, che assume i valori costanti $e^{\pm i\pi\lambda}$ per $x_1 \lessgtr \pm\epsilon$. Introduciamo un operatore ausiliario

$$\check{U}^C_{\lambda,\epsilon} \equiv \cos\pi\lambda + i\sin\pi\lambda \, \tanh\frac{\pi}{2}\Big(\frac{\cdot}{\epsilon} - i\lambda\Big), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.100}$$

che è unitario per $\lambda \in \mathbb{R}$. La convenienza di introdurre questo operatore sta nel fatto che l'operatore differenza

$$\check{D}_{\lambda,\epsilon} \equiv \check{U}_{\lambda,\epsilon} - \check{U}^C_{\lambda,\epsilon} \tag{2.101}$$

agisce come la moltiplicazione per una funzione in $S(\mathbb{R})$, mentre la trasformata di Fourier della funzione $\tanh\pi/2(x-i\lambda)$, vista come una distribuzione temperata, può essere calcolata esplicitamente:

$$\int dx\, e^{-ipx} \tanh\frac{\pi}{2}(x-i\lambda) = \frac{2}{i} P\frac{e^{\lambda p}}{\sinh p}. \tag{2.102}$$

Per $f_1, f_2 \in S(\mathbb{R})^2$ e $|Re\lambda| < 1$ si ottiene, utilizzando la trasformazione unitaria W,

$$(f_1, \check{U}^C_{\lambda,\epsilon} f_2) = \sum_{\delta,\delta'=+,-} \int d\theta_1 d\theta_2 \overline{(W^{-1}f_1)}_\delta(\theta_1) U^C_{\lambda,\epsilon\delta\delta'}(\theta_1,\theta_2)(W^{-1}f_2)_{\delta'}(\theta_2),$$

dove i nuclei integrali sono dati da

$$U^C_{\lambda,\epsilon\delta\delta}(\theta_1,\theta_2) = \cos\pi\lambda\delta(\theta_1-\theta_2) + \epsilon P\, C_\lambda(\epsilon\delta(\sinh\theta_1 - \sinh\theta_2))\cosh\Big(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\Big),$$

$$U^C_{\lambda,\epsilon\delta-\delta}(\theta_1,\theta_2) = i\epsilon\delta C_\lambda(\epsilon\delta(\sinh\theta_1 + \sinh\theta_2))\sinh\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right),$$

e C_λ è la funzione

$$C_\lambda(p) \equiv \sin\pi\lambda e^{\lambda p}/\pi\sinh p.$$

Analogamente, otteniamo i nuclei integrali per gli operatori differenza

$$D_{\lambda,\epsilon\delta\delta}(\theta_1,\theta_2) = \epsilon D_\lambda(\epsilon\delta(\sinh\theta_1 - \sinh\theta_2))\cosh\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$D_{\lambda,\epsilon\delta-\delta}(\theta_1,\theta_2) = i\epsilon\delta D_\lambda(\epsilon\delta(\sinh\theta_1 + \sinh\theta_2))\sinh\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right),$$

dove D_λ è la funzione in $S(\mathbb{R})$ data da

$$D_\lambda(p) \equiv \frac{1}{2\pi}\int dx\, e^{-ipx}\Big[e^{i\pi\lambda\alpha(x)} - \cos\pi\lambda - i\sin\pi\lambda\tanh\frac{\pi}{2}(x-i\lambda)\Big].$$

Pertanto:

$$U_{\lambda,\epsilon\delta\delta'}(\theta_1,\theta_2) = U^C_{\lambda,\epsilon\delta\delta'}(\theta_1,\theta_2) + D_{\lambda,\epsilon\delta\delta'}(\theta_1,\theta_2).$$

Lemma 2 *Gli operatori $U_{\lambda,\epsilon\delta-\delta}$ sono funzioni $||\cdot||_2$-intere di λ.*

Dimostrazione. Osserviamo che $U_{n\lambda,\epsilon} = (U_{\lambda,\epsilon})^n$ e che gli operatori $U_{\lambda,\epsilon\delta\delta}$ sono intere (in norma) in λ, in virtù del fatto che $\breve{U}_{\lambda,\epsilon}$ possiedono queste proprietà. Quindi, dobbiamo soltanto dimostrare che $U_{\lambda,\epsilon\delta-\delta}$ sono $||\cdot||_2$-analitiche per λ nella striscia $S = \{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,|Re\lambda| < 1/2\}$. A questo punto utilizziamo la stima

$$\int d\varphi\, d\theta |K_\lambda(2\epsilon\sinh\varphi\cosh\theta)|^2\sinh^2\varphi \le C\epsilon^{-3}\int dp\, d\theta |K_\lambda(p)|^2 p^2/\cosh^3\theta < \infty,$$

$K_\lambda = C_\lambda, D_\lambda$, per affermare che gli operatori $U_{\lambda,\epsilon\delta-\delta}$ sono di Hilbert- Schmidt per $\lambda\in S$. Se, per $\lambda,\lambda_0\in S$, vale la stima

$$|p|\big|(K_\lambda(p) - K_{\lambda_0}(p))(\lambda-\lambda_0)^{-1} - K'_{\lambda_0}(p)\big| \le C(\lambda,\lambda_0)(1+p^2)^{-1}, \quad (2.103)$$

$K_\lambda = C_\lambda, D_\lambda$, (abbiamo considerato la derivata rispetto a λ), allora l'analiticità in S è dimostrata. Pertanto, dimostriamo la (2.103). Chiaramente, tale stima vale per $K_\lambda = C_\lambda$, per cui dobbiamo solo considerare il caso $K_\lambda = D_\lambda$. Sostituendo l'espressione di $D_\lambda(p)$ si ottiene

$$p(1+p^2)[(D_\lambda(p) - D_{\lambda_0}(p))(\lambda-\lambda_0)^{-1} - D'_{\lambda_0}(p)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int dx\, e^{-ipx}(1-\partial_x^2)[(F(\lambda,x) - F(\lambda_0,x))(\lambda-\lambda_0)^{-1} - F'(\lambda_0,x)]$$

dove

$$F(\lambda,x) \equiv -\pi\lambda\alpha'(x)\sin\pi\lambda\alpha(x) + i\pi\Big[\lambda\alpha'(x)\cos\pi\lambda\alpha(x) - \frac{\sin\pi\lambda}{2\cosh^2\frac{\pi}{2}(x-i\lambda)}\Big].$$

Notando che $\alpha'\in C_0^\infty$, la stima segue facilmente anche per il caso $K_\lambda = D_\lambda$. $\square$

Capitolo 3

Teoria algebrica dei campi massivi liberi di Dirac in (1+1) dimensioni

Applichiamo la teoria dei gruppi di gauge fermionici esposta nel capitolo precedente per costruire un modello che esibisca statistiche anioniche. Lo spazio di Hilbert da cui partiremo è $H = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. Per ogni unitario U su H è definito l'automorfismo $\rho_U(\phi(f)) = \phi(Uf)$. In particolare, adottando come polarizzazione di H quella descritta dallo spettro dell'operatore di Dirac libero H_m, si può porre $U = e^{itH_m}$. Per brevità, indichiamo con ρ_t l'automorfismo generato da tale unitario per ogni valore fissato di t. Lo spazio di una particella è definito da

$$\mathcal{H}_1 := P_+ H \oplus \overline{P_- H}$$

e lo spazio di Hilbert fisico è $\mathcal{H} := \mathcal{F}_a \mathcal{H}_1$.

Consideriamo la seguente rappresentazione irriducibile, fedele[1], ad energia positiva π dell'algebra CAR su $\mathcal{H}$

$$\pi(\phi(f)) = c(P_+ f) + c^*(\overline{P_- f}).$$

Denotato con $\mathcal{K}$ l'insieme dei doppi coni nello spazio di Minkowski (1+1)-dimensionale, indichiamo con $B_{\mathcal{O}}$ la sua base al tempo t. Si definiscono le algebre di campo localizzate nel doppio cono $\mathcal{O}$:

$$\mathscr{F}(\mathcal{O}) = \{\pi(\phi(e^{itH_m} f)) : \operatorname{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}}\}''.$$

L'algebra dei campi è quindi definita al solito modo

$$\mathscr{F} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}} \mathscr{F}(\mathcal{O})}^{\|\cdot\|_{C^*}}.$$

[1] cfr. Appendice

Poiché i campi fermionici anticommutano, la nozione più appropriata di dualità non è quella alla Haag ma è la *dualità twisted*: per ogni $F \in \mathscr{F}$ si definisce la sua parte bosonica e fermionica, rispettivamente

$$F_{\pm} := \frac{1}{2}(F \pm Ad_{\tilde{\Gamma}(-\mathbb{1})}(F)),$$

e si pone

$$\mathscr{F}(\mathcal{O})^{\tau} := \{F_+ + i\tilde{\Gamma}(-\mathbb{1})F_- : F \in \mathscr{F}(\mathcal{O})\}.$$

La dualità twisted afferma dunque

$$\mathscr{F}(\mathcal{O})^{\tau} = \mathscr{F}(\mathcal{O}')'.$$

L'algebre delle osservabili localizzate in $\mathcal{O}$ è costituita dagli elementi $U(1)$-invarianti della corrispondente algebra di campo:

$$\mathscr{A}(\mathcal{O}) := \mathscr{F}(\mathcal{O}) \cap \{\tilde{\Gamma}(e^{i\gamma}) : \gamma \in \mathbb{R}\}'.$$

Applicando questa costruzione generale al nostro caso, $\mathcal{O} \to \mathscr{A}(\mathcal{O})$ è proprio la rete delle osservabili del campo libero di Dirac in (1+1)-dimensioni. Purtroppo $\mathscr{A}(\mathcal{O})$ non soddisfa alla dualità di Haag, ovvero $\mathscr{A}(\mathcal{O}) \subsetneq \mathscr{A}(\mathcal{O}')'$. Per provare questa affermazione è sufficiente esibire un $A \in \mathscr{A}(\mathcal{O})'$ tale che $A \notin \mathscr{A}(\mathcal{O}') = \mathscr{A}(\mathcal{O}')''$. Si può scegliere $A := \pi(\phi(f_1))^*\pi(\phi(f_2))$, con $\mathrm{supp}(f_i) \subset B_{\mathcal{O}_i}$, essendo $\mathcal{O}_1$ ed $\mathcal{O}_2$ due doppi coni contenuti nella componente di sinistra, rispettivamente, di destra del complemento causale di $\mathcal{O}$. Poichè $(f_i\,, f) = 0$, segue subito dalle relazioni dell'algebra CAR che

$$\left[\pi(\phi(f_1))^*\pi(\phi(f_2)), \pi(\phi(f))\right] = 0,$$

e quindi, posto $\mathscr{B}(\mathcal{O}) := \{\pi(\phi(f)) : \mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}}\}$, si ha $A \in \mathscr{B}(\mathcal{O})'$. Poiché $\mathscr{B}(\mathcal{O})'' = \mathscr{F}(\mathcal{O})$, segue che $A \in \mathscr{F}(O)'$, e quindi $A \in \mathscr{A}(\mathcal{O})'$. Tale A è invariante per trasformazioni di gauge (come subito si verifica), ma non appartiene all'algebra $\mathscr{A}(\mathcal{O}')$ in quanto quest'ultima, corrispondendo ad una regione non connessa, è per definizione generata dalle algebre delle osservabili associate alla componente di destra e di sinistra del complemento causale di $\mathcal{O}$. Quest'algebra, però, non contiene operatori gauge-invarianti costruiti usando campi localizzati in entrambe le componenti.

Non è certamente questo il solo caso in cui la dualità di Haag è violata. È noto, ad esempio, che sebbene sia valida nelle teorie dei campi quantistici conformi per i campi osservabili sul raggio luce compattificato $\mathbb{S}^1$ e sullo spazio di Minkowski $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, la dualità alla Haag non è più vera per la restrizione dei campi conformi agli spazi non compatti $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rispettivamente (Cf. [BM]). In generale, in condizioni di rottura spontanea di simmetria, la rete delle osservabili $\mathcal{O} \to \mathscr{A}(\mathcal{O})$ ammette un'estensione non banale $\mathcal{O} \to \mathscr{B}(\mathcal{O})$ che continua ad essere locale. Pertanto (ricordando il significato di dualità alla Haag come condizione di massimalità rispetto alla località) l'algebra delle osservabili non soddisfa alla dualità nella rappresentazione del vuoto π_0, ossia $\pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{O})) \subsetneq \pi_0(\mathscr{A}(\mathcal{O}'))'$ (almeno per $\mathcal{O}$ sufficientemente grande).

3.1 Automorfismi localizzati e trasportabili

Riportiamo alcuni risultati noti da cui partire per la nostra analisi. Se definiamo, per $U \in \mathcal{G}_2$, $\rho_U(A) := \tilde{\Gamma}(U)A\tilde{\Gamma}(U)^*$, $A \in \mathscr{A}$, l'automorfismo ρ_U è sicuramente unitariamente implementabile nella rappresentazione di Fock π nel caso in cui U venga scelto fra uno dei seguenti unitari di $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$:

$$U(n) = \begin{pmatrix} e^{i\pi n\varepsilon(x)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\pi\lambda\eta(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\pi\lambda\eta(x)} \end{pmatrix}$$

dove $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Qui $\varepsilon(x)$ e $\eta(x)$ sono due funzioni di classe C^∞, a valori reali, antisimmetriche, monotone, che assumono definitivamente il valore 1 a destra dell'intervallo $(-\epsilon, \epsilon)$, e quindi il valore -1 a sinistra di tale intervallo (il motivo di tale scelta apparirà chiaro fra breve). Precisiamo che tale risultato è valido nel caso massivo (Cf. [PS]). Per studiare la localizzabilità supporremo sempre che n sia pari, ma tale convenzione non è determinante in questa trattazione (in caso contrario, basterebbe considerare $2n$ in luogo di n).

Più semplicemente, $V(\lambda) = e^{i\pi\lambda\eta(x)}\mathbb{1}$. Poiché $\mathcal{G}_2$ è un gruppo, anche il prodotto tra $U(n)$ e $V(\lambda)$ è unitariamente implementabile. Posso dunque considerare l'operatore $W \equiv W(n, \lambda) := U(n)V(\lambda)$. Scegliendo $\eta = \varepsilon$, ottengo un operatore unitario che, sulla generica $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, agisce esplicitamente nel modo seguente:

$$(Wf)(x) := \begin{pmatrix} e^{i\pi(n+\lambda)\varepsilon(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\pi\lambda\varepsilon(x)} \end{pmatrix} f(x).$$

È evidente che $U(n) \equiv W(n, 0)$ e $V(\lambda) \equiv W(0, \lambda)$. Per quanto visto nel capitolo precedente, per determinare la carica trasportata dall'automorfismo ρ_W occorre calcolare il valore di $q(W)$. È chiaro che, per determinare l'indice di Fredholm dell'operatore W_{--} così definito sarà sufficiente calcolare, in virtù dell'additività di $U \mapsto q(U)$, gli indici degli operatori $U(n)$ e $V(\lambda)$ separatamente. Tali calcoli sono pressoché immediati. Infatti, l'indice di Fredholm dell'operatore U_{--} è uguale all'indice di avvolgimento della funzione $e^{i\pi n\varepsilon(\cdot)}$, per cui, poiché $q(U) = \mathrm{Ind}(U_{--})$, disponiamo già di una formula per $q(U)$. In effetti, poiché la funzione ε è monotona e $\lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = \pm 1$, si ha facilmente $q(U) = n$. Infine, per determinare l'indice dell'operatore $V(\lambda)$ è sufficiente notare che, per la continuità in λ, $V(\lambda)_{--}$ appartiene alla componente connessa dell'dentità (si intendono qui le componenti rispetto al valore dell'indice di Fredholm) e, poiché $\mathrm{Ind}(\mathbb{1}) = 0$, segue immediatamente che $\mathrm{Ind}V(\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Dunque, W ha indice n.

Proposizione 5 *Gli automorfismi ρ_W di $\mathscr{F}$ inducono, per restrizione, automorfismi dell'algebra delle osservabili $\mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathscr{A} := \overline{\cup_{\mathcal{O}_1 \in \mathcal{K}} \mathscr{A}(\mathcal{O}_1)}^{\|\cdot\|}$, e poiché uno *omomorfismo unitale tra C^* algebre con identità è continuo in norma, la tesi discende immediatamente dall'inclusione

$$\rho_W(\mathscr{A}(\mathcal{O}_1)) \subset \mathscr{A}(\mathcal{O}_1), \qquad \forall \mathcal{O}_1 \in \mathcal{K}.$$

Per dimostrarla, consideriamo la trasformazione

$$(Wf)(x) := \begin{pmatrix} e^{i\pi(n+\lambda)\varepsilon(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\pi\lambda\varepsilon(x)} \end{pmatrix} f(x)$$

dove la funzione ε è centrata in $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$.

(i) Dimostriamo innanzitutto che $\rho_W(\mathscr{F}(\mathcal{O}_1)) \subset \mathscr{F}(\mathcal{O}_1)$. Infatti, sia $\mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}_1}$; allora, se $x \notin \mathrm{supp}(f)$, è certamente $x \notin \mathrm{supp}(Wf) = 0$, ovvero $\mathrm{supp}(Wf) \subset \mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}_1}$, e quindi:

$$\rho_W(\pi(\phi(f))) \equiv \pi(\phi(Wf)) \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_1).$$

Allora, essendo $\mathscr{F}(\mathcal{O}_1) := \{\pi(\phi(f) : \mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}_1}\}''$, l'affermazione segue dalla continuità forte di ρ_W.

(ii) Vale: $\rho_W(\mathscr{A}(\mathcal{O}_1)) \subset \mathscr{A}(\mathcal{O}_1)$, $\forall \mathcal{O}_1 \in \mathcal{K}$. In effetti, per la (i), $\rho_W(\mathscr{A}(\mathcal{O}_1)) \subset \rho_W(\mathscr{F}(\mathcal{O}_1) \subset \mathscr{F}(\mathcal{O}_1)$, in quanto $\mathscr{A}(\mathcal{O}_1) \equiv \mathscr{F}(\mathcal{O}_1)^{U(1)}$. Rimane da dimostrare che, $\forall A \in \mathscr{A}(\mathcal{O}_1)$ e $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, $[\rho_W(A), \widetilde{\Gamma}(e^{i\gamma})] = 0$, ovvero che

$$\widetilde{\Gamma}(W)A\widetilde{\Gamma}(W)^*\widetilde{\Gamma}(e^{i\gamma}) = \widetilde{\Gamma}(e^{i\gamma})\widetilde{\Gamma}(W)A\widetilde{\Gamma}(W)^*.$$

Osserviamo dapprima che ogni azione aggiunta $Ad_{\widetilde{\Gamma}(e^{i\gamma})}$ commuta con ogni azione aggiunta della forma $Ad_{\widetilde{\Gamma}(V)}$ in quanto, come discende dalla Proposizione 4, $\widetilde{\Gamma}(e^{i\gamma})$ e $\widetilde{\Gamma}(V)$ commutano a meno di una fattore di fase. Allora, poiché A è un'osservabile, $[A, \tilde{\Gamma}(e^{i\gamma})] = 0$, da cui la tesi.

□

Evidentemente, le inclusioni dimostrate nella proposizione precedente sono in realtà delle uguaglianze, in quanto ρ_W è invertibile.

In vista della prossima proposizione, è utile introdurre sin d'ora due lemmi:

Lemma 3 *Gli automorfismi ρ_W sono fortemente continui, nel senso che $\rho_W(A_n) \xrightarrow{f} \rho_W(A)$ quando $A_n \xrightarrow{f} A$.*

Dimostrazione. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ una successione fortemente convergente ad un elemento $A \in \mathscr{F}$. Poiché $\|(A_n - A)x\| \to 0$ per $n \to \infty$ $\forall x \in \mathcal{H}$, si ha:

$$\|(\rho_W(A_n) - \rho_W(A))x\| = \|\widetilde{\Gamma}(W)(A_n - A)\widetilde{\Gamma}(W)^*x\| \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

□

Lemma 4 *Posto* $\mathscr{B}(\mathcal{O}) := \{\pi(\phi(f)) : \mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}}\}$ *si ha:*

$$(\mathscr{B}(\mathcal{O})'')^{U(1)} = (\mathscr{B}(\mathcal{O})^{U(1)})''.$$

Dimostrazione. Cf. [DHR69a, Lemma 3.1].

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente

Proposizione 6 *Gli automorfismi dell'algebra* $\mathscr{A}$ *definiti nella* Proposizione 4 *sono localizzati in doppi coni.*

Dimostrazione. Verificheremo che, detto $\mathcal{O}$ il doppio cono nella cui base è "centrato" l'unitario W,

$$\rho_W|_{\mathscr{A}(\mathcal{O}')} = \mathrm{id}|_{\mathscr{A}(\mathcal{O}')},$$

ovvero che per ogni doppio cono $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'$ si ha:

$$\rho_W(A) = A, \qquad \forall A \in \mathscr{A}(\mathcal{O}_1). \tag{3.1}$$

Sia $A := \pi(\phi(f))$, $\mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}_1}$. Se denotiamo $f(x) \equiv (f_+(x), f_-(x))$, si avrà

$$(Wf)(x) = (e^{\pi i(n+\lambda)\varepsilon(x)} f_+(x), e^{\pi i \lambda \varepsilon(x)} f_-(x)).$$

Si vede subito che se $x \notin \mathrm{supp}(f)$, allora $(Wf)(x) = 0$. Nel caso in cui, invece, $x \in \mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}_1}$, allora $x \notin B_{\mathcal{O}}$, e quindi $\varepsilon(x) = \pm 1$; in questo caso

$$(Wf)(x) = e^{\pm \pi i \lambda} f(x) \tag{3.2}$$

e quindi $\rho_W(A) = Ad_{\tilde{\Gamma}(e^{\pm\pi i\lambda})}(A), \quad \forall A \in \mathscr{B}(\mathcal{O}_1)$. Passando alla chiusura forte si ha:

$$\rho_W(A) = Ad_{\tilde{\Gamma}(e^{\pm\pi i\lambda})}(A), \quad \forall \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_1).$$

A questo punto è evidente che, se $A \in \mathscr{A}(\mathcal{O}_1) \equiv \mathscr{F}(\mathcal{O}_1)^{U(1)}$, allora risulta $\rho_W(A) = A$ e, quindi, la (3.1).

□

Ricordiamo che la teoria del campo libero massivo di Fermi in (1+1)-dimensioni soddisfa alla dualità twisted $\mathscr{F}(\mathcal{O})^\tau = \mathscr{F}(\mathcal{O}')'$ (la dimostrazione non dipende dalla dimensione dello spazio-tempo, pertanto si può assumere come esemplificativa la dimostrazione più recente fornita in [BJL]). Inoltre, è noto che, data una rappresentazione irriducibile, localmente normale π di $\mathscr{F}$ su uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}_\pi$,

$$m_\pi(F) = \int_{\mathscr{G}} \alpha_g(F) d\mu(g) \tag{3.3}$$

definisce una mappa lineare positiva normale di $\mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi)$ su $U_\pi(\mathscr{G})'$ tale che $m_\pi(\mathscr{L}) = \mathscr{L} \cap U_\pi(\mathscr{G})'$ per ogni *-algebra $\mathscr{L}$ su $\mathscr{H}_\pi$ con $m_\pi(\mathscr{L}) \subset \mathscr{L}$. Si è denotato con $\mathscr{G}$ il gruppo di gauge, e con U_π la rappresentazione unitaria fortemente continua di $\mathscr{G}$ che implementa l'azione α. Nella (3.3) μ denota la misura di Haar normalizzata su $\mathscr{G}$ e l'integrale è inteso nella topologia debole degli operatori. In tale ipotesi, per la normalità di m_π, $m_\pi(\mathscr{L})'' = m_\pi(\mathscr{L}'') = \mathscr{L}'' \cap U_\pi(\mathscr{G})'$. Si ottiene:

$$\mathscr{A}(\mathcal{O}) = m_\pi(\mathscr{F}(\mathcal{O})) = m_\pi(\mathscr{F}(\mathcal{O})^\tau)$$

che, unitamente alla dualità twisted, stabilisce che un operatore di $\mathscr{F}(\mathcal{O}')'$ che sia gauge invariante è un elemento dell'algebra delle osservabili locali $\mathscr{A}(\mathcal{O})$.

Teorema 3 *Con le notazioni introdotte, $\rho_W := Ad\widetilde{\Gamma}(W)$ definisce un automorfismo localizzato e trasportabile dell'algebra delle osservabili quasi locali $\mathscr{A}$.*

Dimostrazione La localizzabilità è stata già dimostrata:

$$\rho_W\Big|_{\mathscr{A}(\mathcal{O}')} = \mathrm{id}\Big|_{\mathscr{A}(\mathcal{O}')},$$

dove $\mathcal{O}$ è il doppio cono nella qui base è "centrato" l'unitario W, e

$$\rho_W(\mathscr{A}(\tilde{\mathcal{O}})) \subset (\mathscr{A}(\tilde{\mathcal{O}}))$$

per ogni doppio cono $\tilde{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}$. Per la trasportabilità, osserviamo innanzitutto che, detto $W_x = T(x)WT(-x)$, l'automorfismo ρ_{W_x} risulta essere localizzato in $\mathcal{O} + x$. Per provarlo, verifichiamo dapprima che anche nel nostro modello l'azione del gruppo delle traslazioni è geometrica, ovvero $\alpha_x(\mathscr{A}(\mathcal{O})) = \mathscr{A}(\mathcal{O} + x)$. In effetti, si ha subito:

(i) $\alpha_x(\mathscr{F}(\mathcal{O})) \subset \mathscr{F}(\mathcal{O} + x)$. Infatti, $Ad_{\tilde{\Gamma}(T(x))}\pi(\phi(f)) = \pi(\phi(T(x)f))$ e, ovviamente, si ha $\mathrm{supp}(T(x)f) = \mathrm{supp}(f) + x$. Ne segue che, quando $\mathrm{supp}(f) \subset B_\mathcal{O}$, allora $\mathrm{supp}(T(x)f) \subset B_\mathcal{O} + x \equiv B_{\mathcal{O}+x}$. Il risultato segue dalla continuità forte di $\widetilde{\Gamma}(T(x))$.

(ii) $\alpha_x(\mathscr{A}(\mathcal{O})) \subset \mathscr{A}(\mathcal{O} + x)$. Questo è vero perché se $A \in \mathscr{A}(\mathcal{O})$ allora $Ad_{\tilde{\Gamma}(e^{i\gamma})}A = A \quad \forall\gamma \in \mathbb{R}$, e dunque

$$\begin{aligned} Ad_{\tilde{\Gamma}(e^{i\gamma})}(\alpha_x(A)) &= Ad_{\tilde{\Gamma}(e^{i\gamma})}Ad_{\tilde{\Gamma}(T(x))}(A) = \\ &= Ad_{\tilde{\Gamma}(T(x))}Ad_{\tilde{\Gamma}(e^{i\gamma})}(A) = \alpha_x(A). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi verificato che l'azione del gruppo delle traslazioni sulle algebre degli osservabili locali è di tipo geometrico. Sia ora $A \in \mathscr{A}(\mathcal{O}'_x)$. Per quanto appena visto $Ad_{\tilde{\Gamma}(T(-x))}(A) \in \mathscr{A}(\mathcal{O}')$ e poiché ρ_W è localizzato in $\mathcal{O}$ si ha:

$$\rho_{W_x}(A) = Ad_{\tilde{\Gamma}(T(x)WT(-x))}(A) = Ad_{\tilde{\Gamma}(T(x))}Ad_{\tilde{\Gamma}(W)}Ad_{\tilde{\Gamma}(T(-x))}(A) = A.$$

Inoltre, essendo $\rho_W = Ad_{\tilde{\Gamma}(W)}$ e $\rho_{W_x} = Ad_{\tilde{\Gamma}(W_x)}$, si nota subito che l'unitario $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)$ interlaccia ρ_W con ρ_{W_x}. Perché tale unitario induca un'equivalenza tra gli automorfismi suddetti occorre che sia contenuto nell'algebra locale e per questo dimostreremo che $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*) \in \mathscr{A}(\tilde{\mathcal{O}})$, dove $\tilde{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_x$. Come al solito si tratta di dimostrare che l'unitario in questione commuta con tutte le trasformazioni di gauge e che è contenuto nell'algebra $\mathscr{F}(\tilde{\mathcal{O}}')'$. Per quanto riguarda la prima affermazione, utilizziamo le relazioni di commutazione di cui alla Proposizione (4) tra operatori del tipo $\widetilde{\Gamma}(V)$ e $\widetilde{\Gamma}(e^{iX})$, notando che il prodotto scalare nella (2.60) è nullo. Infatti, poiché $q(W_x W^*) = q(W_x) + q(W^*) \equiv q(W) - q(W) = 0$, segue che l'intertwiner $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)$ conserva la carica e quindi $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)\Omega \in \mathbb{C}\Omega$. Pertanto, risulta $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)\Omega = \lambda\Omega$, per un opportuno $\lambda \in \mathbb{S}^1$, da cui:

$$(\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)\Omega, d\widetilde{\Gamma}(\gamma \mathbb{1})\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)\Omega) = (\Omega, d\widetilde{\Gamma}(\gamma \mathbb{1})\Omega) = 0.$$

Ricordiamo che si è adottata la convenzione di scegliere il generatore autoaggiunto con valore di aspettazione sul vuoto nullo. Per inciso, la precedente stabilisce che ogni rappresentante del gruppo di gauge $U(1)$ commuta con ogni unitario della forma $\widetilde{\Gamma}(W)$ per il quale sia $q(W) = 0$. Rimane da dimostrare che $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*) \in \mathscr{F}(\tilde{\mathcal{O}}')'$. Sia $\mathcal{O}_1 \subset \tilde{\mathcal{O}}'$ e $\operatorname{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}_1}$. Per quanto visto precedentemente,

$$\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)\pi(\phi(f))\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)^* = \rho_{W_x} \circ \rho_{W^*}(\pi(\phi(f))). \tag{3.4}$$

Osserviamo che $\rho_{W^*} \equiv {\rho_W}^{-1}$ è ancora localizzato in $\mathcal{O}$ e quindi, poiché $W(n, \lambda)^* = W(-n, -\lambda)$,

$$\rho_{W^*}(\pi(\phi(f))) = \pi(\phi(e^{-i\pi\lambda} f)).$$

Analogamente, essendo ρ_{W_x} localizzato in $\mathcal{O}_x \subset \tilde{\mathcal{O}}$, risulta

$$\rho_{W_x}(\pi(\phi(f))) = \pi(\phi(e^{i\pi\lambda} f)).$$

In definitiva, il secondo membro della (3.4) si riduce a $\pi(\phi(f))$ e quindi $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*) \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_1)'$, $\forall \mathcal{O}_1 \subset \tilde{\mathcal{O}}'$, da cui $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*) \in \mathscr{F}(\tilde{\mathcal{O}}')'$. Alternativamente, volendo fornire una dimostrazione diretta di quest'ultima affermazione, notiamo che la (3.4) è anche uguale a $\pi(\phi(W_x W^* f))$ e che, in notazione estesa,

$$W_x W^* = W(n, \lambda; \tau_x \varepsilon - \varepsilon). \tag{3.5}$$

Per fissare le idee, supponiamo che $\mathcal{O}_1 \succ \tilde{\mathcal{O}}$, ossia $\mathcal{O}_1$ sia contenuta nella componente di destra di $\tilde{\mathcal{O}}'$. Se $y \notin \operatorname{supp}(f)$ non c'è nulla da dimostrare, in quanto si ha: $f(y) = 0 = (W_x W^* f)(y)$. Se, invece, $y \in \operatorname{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}_1}$, necessariamente $y \notin B_{\tilde{\mathcal{O}}}$ e $y - x > 0$ in quanto $x \in \tilde{\mathcal{O}}$. Chiaramente, $\varepsilon(y) = 1$ per essere y alla destra dell'intervallo $B_{\mathcal{O}}$ dove è centrata la ε. Dalla (3.5) si ottiene quindi che $(W_x W^* f)(y) = f(y)$, $y \notin \operatorname{supp}(f)$. In definitiva, risulta $W_x W^* f = f$, $\forall f : \operatorname{supp}(f) \subset \mathcal{O}_1$, $\forall \mathcal{O}_1 \subset \tilde{\mathcal{O}}'$.

$\square$

3.2 Statistiche dei settori

Per calcolare l'operatore statistico ε_{ρ_W}, oltre alle Proposizioni 1, 2, 3 servirà anche il lemma seguente che, per semplicità, enunciamo nel caso in cui sia stato scelto $t = 0$ come tempo al quale riferire la base dei doppi coni presi in considerazione:

Lemma 5 *Sia $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ con base $(-\epsilon, \epsilon)$ e denotiamo $\mathcal{O}_x := T(x)\mathcal{O} \equiv \mathcal{O} + x$. Se $\mathcal{O}_x$ e $\mathcal{O}_{x'}$ sono spazialmente separati valgono le proprietà seguenti:*

(i) $\widetilde{\Gamma}(U(n)_x)\widetilde{\Gamma}(U(n')_{x'}) = (-1)^{nn'}\widetilde{\Gamma}(U(n')_{x'})\widetilde{\Gamma}(U(n)_x)$;

(ii) posto $V(\lambda) = e^{iX(\lambda)}$, *si ha:* $C(X(\lambda)_x, X(\lambda')_{x'}) = 0$;

(iii) $\left(\widetilde{\Gamma}(U(n)_x)\Omega,\, d\widetilde{\Gamma}(X(\lambda)_{x'})\widetilde{\Gamma}(U(n)_x)\Omega\right) = \pi n\lambda\,\mathrm{sgn}(x - x')$.

Grazie a questo lemma, le regole di commutazione di cui alla Proposizione 3 sono completamente note. Calcoliamo adesso l'operatore statistico di un automorfismo ρ_W localizzato dapprima (per semplicità) in un doppio cono $\mathcal{O}$ centrato nell'origine. Successivamente, faremo il calcolo per un doppio cono di centro arbitrario. Come è previsto dalla AQFT in (1+1)-dimensioni, dobbiamo considerare separatamente le due componenti connesse del complemento causale di $\mathcal{O}$ per il calcolo dei relativi operatori statistici, che potrebbero non coincidere.

Proposizione 7 *Se l'automorfismo ρ_W è localizzato in un doppio cono di centro l'origine, il suo operatore statistico è*

$$\varepsilon_{\rho_W} = (-1)^n e^{2\pi i n\lambda\,\mathrm{sgn}(x)}\mathbb{1}.$$

Dimostrazione Sia $\mathcal{O}_x := \mathcal{O} + x$ spazialmente separato da $\mathcal{O}$. Come già visto, l'automorfismo ρ_{W_x} è localizzato in $\mathcal{O}_x$ ed è unitariamente equivalente a ρ_W tramite l'intertwiner $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)$. Dunque,

$$\varepsilon_{\rho_W} = \widetilde{\Gamma}(W_x W^*)^* \rho_W(\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)) = \widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(W_x)^*\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(W_x)\widetilde{\Gamma}(W^*)^2$$

Per alleggerire le notazioni, scriviamo $W = UV$, e quindi $W_x = U_x V_x$. La precedente diventa (a meno di un cociclo che si eliderà nei passaggi successivi)

$$\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(W_x^*)\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(V)\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V_x)\widetilde{\Gamma}(V)^*\widetilde{\Gamma}(U)^*\widetilde{\Gamma}(W)^*.$$

D'altra parte, per la Proposizione 4 ed il Lemma 5,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}(V)\widetilde{\Gamma}(U_x) \equiv \widetilde{\Gamma}(e^{iX(\lambda)})\widetilde{\Gamma}(U_x(n)) &= e^{i(\widetilde{\Gamma}(U_x)\Omega, d\widetilde{\Gamma}(X(\lambda))\widetilde{\Gamma}(U_x)\Omega)}\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(e^{iX(\lambda)}) = \\ &= e^{i\pi n\lambda\,\mathrm{sgn}(x)}\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V)\end{aligned}$$

e quindi, poiché, sempre per il Lemma 5, $\widetilde{\Gamma}(V)$ e $\widetilde{\Gamma}(V_x)$ commutano, la precedente si scrive:

$$e^{i\pi n\lambda\,\mathrm{sgn}(x)}\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(V_x^*)\widetilde{\Gamma}(U_x)^*\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V_x)\widetilde{\Gamma}(U)^*\widetilde{\Gamma}(W)^*$$

che si semplifica ulteriormente tenendo conto che $\widetilde{\Gamma}(U_x)^*$ e $\widetilde{\Gamma}(U)$ commutano o anticommutano a seconda del segno di n:

$$(-1)^n e^{i\pi n\lambda\,\mathrm{sgn}(x)}\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(V_x^*)\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(V_x)\widetilde{\Gamma}(U)^*\widetilde{\Gamma}(W)^*.$$

Di nuovo, per i due termini centrali di questa espressione si ottiene, con identico procedimento,

$$\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(V_x) = e^{i\pi n\lambda\,\mathrm{sgn}(x)}\widetilde{\Gamma}(V_x)\widetilde{\Gamma}(U)$$

e quindi

$$\varepsilon_{\rho_W} = (-1)^n e^{2\pi i n\lambda\,\mathrm{sgn}(x)}\mathbb{1}.$$

□

Passiamo al calcolo dell'operatore statistico di un automorfismo localizzato in un doppio cono $\mathcal{O}_x$ per x arbitrario. Sappiamo che un tale automorfismo è della forma ρ_{W_x}, con W localizzato intorno all'origine.

Proposizione 8 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$,*

$$\varepsilon_{\rho_{W_x}} = (-1)^n e^{2\pi i n\lambda\ \mathrm{sgn}(x-y)}\mathbb{1}$$

dove $\mathcal{O}_y$ è il doppio cono ausiliario, spazialmente separato da $\mathcal{O}_x$, utilizzato nella costruzione dell'operatore statistico.

Dimostrazione Gli automorfismi ρ_{W_x} e ρ_{W_y} sono localizzati, rispettivamente, in $\mathcal{O}_x$ e $\mathcal{O}_y$, e sono unitariamente equivalenti al morfismo "di riferimento" ρ_W tramite gli interwiners $\widetilde{\Gamma}(W_xW^*)$ e $\widetilde{\Gamma}(W_yW^*)$, rispettivamente. Un intertwiner unitario tra ρ_{W_x} e ρ_{W_y} è dato da $\mathcal{V} := \widetilde{\Gamma}(W_x)\widetilde{\Gamma}(W_y)^*$ e quindi

$$\varepsilon_{\rho_{W_x}} = \mathcal{V}^*\rho_{W_x}(\mathcal{V}) = \widetilde{\Gamma}(W_y)\widetilde{\Gamma}(W_x)\widetilde{\Gamma}(W_y)^*\widetilde{\Gamma}(W_x)^* =$$

$$= \widetilde{\Gamma}(U_y)\widetilde{\Gamma}(V_y)\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V_x)\widetilde{\Gamma}(V_y)^*\widetilde{\Gamma}(U_y)^*\widetilde{\Gamma}(V_x)^*\widetilde{\Gamma}(U_x)^*.$$

D'altra parte,

$$\widetilde{\Gamma}(V_y)\widetilde{\Gamma}(U_x) = e^{i(\tilde{\Gamma}(U_x)\Omega, d\tilde{\Gamma}(X(\lambda)_y))\tilde{\Gamma}(U_x)\Omega)}\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V_y) =$$

$$= e^{i\pi n\lambda\,\mathrm{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V_y)$$

mentre $\widetilde{\Gamma}(V_x)$ e $\widetilde{\Gamma}(V_y)$ commutano in quanto $\mathcal{O}_x$ e $\mathcal{O}_y$ sono spazialmente separati. Analogamente,

$$\widetilde{\Gamma}(V_x)\widetilde{\Gamma}(U_y) = e^{i\pi n\lambda\,\mathrm{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(U_y)\widetilde{\Gamma}(V_x).$$

Grazie a queste regole di commutazione l'espressione dell'operatore statistico si semplifica:

$$e^{2i\pi n\lambda\,\mathrm{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(U_y)\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V_x)\widetilde{\Gamma}(V_x)^*\widetilde{\Gamma}(U_y)^*\widetilde{\Gamma}(U_x)^*$$

ed infine, poiché $\widetilde{\Gamma}(U_y)\widetilde{\Gamma}(U_x) = (-1)^{n^2}\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(U_y)$, si ottiene:

$$\varepsilon_{\rho_{W_x}} = (-1)^n e^{2\pi in\lambda\,\mathrm{sgn}(x-y)}\mathbb{1}. \tag{3.6}$$

□

Come era prevedibile, l'operatore statistico presenta una dipendenza funzionale dalla posizione solo tramite la differenza $x-y$, precisamente tramite il termine $\mathrm{sgn}(x-y)$, in quanto ciò che conta è la posizione relativa dei due doppi coni spazialmente separati che entrano nella costruzione dell'operatore statistico. Tale funzione non è ovviamente definita per $x=y$, ma questo caso è escluso a priori dallla richiesta che $\mathcal{O}_x$ e $\mathcal{O}_y$ siano spazialmente separati, ed assume solo due valori distinti, a secondo se consideriamo regioni di localizzazione ausiliarie contenute nella componente connessa di destra oppure di sinistra di $\mathcal{O}'_x$.

Per verificare l'esattezza di ε_{ρ_W} possiamo effettuare il calcolo in modo diverso, notando che la relazione $\rho_W = \rho_U\rho_V$ offre la possibilità di calcolare l'operatore statistico di ρ_W partendo dal calcolo degli operatori statistici di ρ_U e ρ_V, indubbiamente più semplici da valutare. Infatti (Cf. [FRS92, formule(2.3)])

$$\varepsilon_{\rho_U\rho_V} = \rho_U(\varepsilon(\rho_U,\rho_V))\varepsilon_{\rho_U}\rho_U{}^2(\varepsilon_{\rho_V})\rho_U(\varepsilon(\rho_V,\rho_U)). \tag{3.7}$$

- CALCOLO DI ε_{ρ_U}.

  Se $\mathcal{O}_x$ è spazialmente separato da $\mathcal{O}$ e l'automorfismo ρ_{W_x} è localizzato in $\mathcal{O}_x$, si ha:

  $$\varepsilon_{\rho_U} = \widetilde{\Gamma}(U_xU^*)^*\rho_U(\widetilde{\Gamma}(U_xU^*)) \equiv \widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(U_x)^*\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(U)^*\widetilde{\Gamma}(U)^*$$

  Per il Lemma 5, applicato ai due termini centrali con $n' = n$, si ottiene:

  $$\varepsilon_{\rho_U} = (-1)^n\mathbb{1}. \tag{3.8}$$

- CALCOLO DI ε_{ρ_V}.

  Si procede in maniera analoga al caso precedente. Poiché operatori della forma $\widetilde{\Gamma}(V_x)$ commutano fra loro se spazialmente separati, si ha subito:

  $$\varepsilon_{\rho_V} = \widetilde{\Gamma}(V_xV^*)^*\rho_V(\widetilde{\Gamma}(V_xV^*)) = \mathbb{1} \tag{3.9}$$

- Calcolo di $\varepsilon(\rho_U, \rho_V)$.

  Gli automorfismi ρ_U e ρ_V sono localizzati nella medesima regione $\mathcal{O}$. In accordo alle convenzioni stabilite, il calcolo di questo unitario deve essere condotto trasportando ρ_U alla destra di ρ_V. Più precisamente, sia ρ_{U_x} localizzato in $\mathcal{O}_x$ e ρ_{V_y} localizzato in $\mathcal{O}_y$, con $\mathcal{O}_x \succ \mathcal{O}_y$. Per definizione

$$\varepsilon(\rho_U, \rho_V) = \rho_V(\widetilde{\Gamma}(U_x U^*)^*)\widetilde{\Gamma}(V_y V^*)^*\widetilde{\Gamma}(U_x U^*)\rho_U(\widetilde{\Gamma}(V_y V^*))$$

  D'altra parte, per le solite relazioni di commutazione con cociclo si ha:

$$\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V_y) = e^{-i\pi n\lambda \operatorname{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(V_y)\widetilde{\Gamma}(U_x)$$

  da cui si ottiene:

$$\varepsilon(\rho_U, \rho_V) = e^{i\pi n\lambda \operatorname{sgn}(y-x)}\widetilde{\Gamma}(V)\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(V)^*\widetilde{\Gamma}(U)^* \qquad (3.10)$$

- Calcolo di $\varepsilon(\rho_V, \rho_U)$

  Il procedimento è del tutto analogo al caso precedente, ma con ρ_V trasportato alla destra di ρ_U. Quindi ρ_{U_y} è ora localizzato a sinistra rispetto a ρ_{V_x}, e pertanto

$$\begin{aligned}\varepsilon(\rho_V, \rho_U) &= \rho_U(\widetilde{\Gamma}(V_x V^*)^*)\widetilde{\Gamma}(U_y U^*)^*)\widetilde{\Gamma}(V_x V^*)\rho_V(\widetilde{\Gamma}(U_y U^*)) = \\ &= \widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(V)\widetilde{\Gamma}(V_x)^*\widetilde{\Gamma}(U_y)^*\widetilde{\Gamma}(V_x)\widetilde{\Gamma}(U_y)\widetilde{\Gamma}(U)^*\widetilde{\Gamma}(V)^*. \qquad (3.11)\end{aligned}$$

  Poiché $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}'_y$, è possibile permutare i termini adiacenti localizzati in queste regioni spazialmente separate, ottenendo:

$$\widetilde{\Gamma}(V_x)\widetilde{\Gamma}(U_y) = e^{i\pi n\lambda \operatorname{sgn}(y-x)}\widetilde{\Gamma}(U_y)\widetilde{\Gamma}(V_x). \qquad (3.12)$$

  Grazie alla (3.12) l'espressione (3.11) assume la forma definitiva:

$$\varepsilon(\rho_V, \rho_U) = e^{i\pi n\lambda \operatorname{sgn}(y-x)}\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(V)\widetilde{\Gamma}(U)^*\widetilde{\Gamma}(V)^*. \qquad (3.13)$$

Inserendo nella (3.7) le espressioni (3.8)-(3.12) si ottiene:

$$\varepsilon_{\rho_W} = (-1)^n \rho_U(\varepsilon_M(\rho_U, \rho_V))$$

dove l'operatore di monodromia è dato da:

$$\varepsilon_M(\rho_U, \rho_V) = e^{2\pi i n\lambda \operatorname{sgn}(y-x)}\mathbb{1}$$

da cui la tesi.

□

Un'ulteriore verifica può essere fatta, sempre utilizzando la teoria quantistica locale in bassa dimensione stabilita in [FRS92], questa volta per l'operatore di monodromia, che noi abbiamo calcolato esplicitamente in base alla sua stessa definizione, ma che può anche essere determinato conoscendo le fasi statistiche dei morfismi coinvolti. In effetti, è noto che, se $\{T_e\}$ è una prefissata base ortonormale per lo spazio degli interwiners $\rho_\gamma \to \rho_\alpha\rho_\beta$, con $\rho_\alpha \in [\alpha]$ endomorfismi irriducibili con statistiche finite, scelti uno per ogni settore di superselezione (qui il simbolo e è un multi-indice che tiene conto delle cariche trasportate dall'intertwiner T e dai settori che interlaccia), allora vale il seguente [FRS92, Lemma 3.3]:

Lemma 6 *Gli intertwiners di base $T_e : \rho_\gamma \to \rho_\alpha\rho_\beta$ diagonalizzano l'operatore di monodromia:*

$$\varepsilon(\rho_\beta, \rho_\alpha)\varepsilon(\rho_\alpha\rho_\beta)T_e = \frac{\kappa_\gamma}{\kappa_\alpha\kappa_\beta}T_e. \tag{3.14}$$

Questo lemma si applica facilmente alla teoria qui trattata, in quanto l'intertwiner $\widetilde{\Gamma}(W_xW^*)^* : \rho_{W_x} \to \rho_W$ è unitario e $\rho_W = \rho_U\rho_V$. Pertanto, dovrà risultare:

$$\varepsilon(\rho_V, \rho_U)\varepsilon(\rho_U, \rho_V) = \frac{\kappa_W}{\kappa_U\kappa_V}\mathbb{1} \tag{3.15}$$

essendo κ_W la fase statistica dell'automorfismo ρ_W (e analoghe definizioni per κ_U e κ_V). Per la Proposizione 8, si ha immediatamente che

$$\kappa_W = (-1)^n e^{2\pi i n\lambda\,\mathrm{sgn}(y-x)}$$

mentre, in virtù delle (3.8) e (3.9), si ha anche: $\kappa_U = (-1)^n$, $\kappa_V = 1$. In conclusione, la (3.15) fornisce

$$\varepsilon_M(\rho_V, \rho_U) = e^{2\pi i n\lambda\,\mathrm{sgn}(y-x)}\mathbb{1}$$

che conferma l'esattezza dei nostri calcoli. Dunque, i risultati sinora ottenuti continuano ad essere compatibili con la teoria generale dei campi quantistici in bassa dimensione.

Il calcolo dell'operatore statistico di ρ_W a partire dagi operatori statistici di ρ_U e ρ_V tramite la (3.7) ci permette di osservare che, in una teoria dei campi quantistici locali in (1+1)-dimensioni la statistica del prodotto non è data necessariamente dal prodotto delle statistiche, ovvero la composizione di due automorfismi con statistiche ordinarie può dare luogo ad un automorfismo con statistica delle trecce. Tale possibilità è preclusa in una teoria dei campi (3+1)-dimensionale che soddisfi alla dualità di Haag (Cf. [DHR69b, pag. 179]): se ξ denota il generico settore di superselezione, ovvero una classe di equivalenza unitaria di automorfismi localizzati e covarianti rispetto al gruppo di Poincaré, vale:

$$\varepsilon_{\xi_1}\varepsilon_{\xi_2} = \varepsilon_{\xi_1\xi_2} \tag{3.16}$$

che, in quel contesto, forniva un omomorfismo fra la famiglia dei settori ed il gruppo $\{\pm 1\}$, il cui nucleo si identifica con il sottogruppo dei settori di Bose (il complementare di questo kernel, costituito dagli elementi mappati in -1, è l'insieme dei settori di Fermi). Questa proprietà moltiplicativa non è più vera laddove emergano statistiche non ordinarie. Con riferimento al nostro modello, valendo la fattorizzazione $\rho_W = \rho_U \rho_V$, possiamo ricorrere alla (3.7) che, in virtù delle:

$$\varepsilon_{\rho_U} = (-1)^n \mathbb{1}, \quad \varepsilon_{\rho_V} = \mathbb{1}$$

fornisce:

$$\varepsilon_{\rho_W} = (-1)^n \rho_U(\varepsilon(\rho_U, \rho_V)\varepsilon(\rho_V, \rho_U)).$$

È evidente che nella teoria qui esposta non può valere la (3.16), in quanto ciò comporterebbe $\rho_U(\varepsilon_M(\rho_U, \rho_V)) = \mathbb{1}$ e quindi, per l'invertibilità di ρ_U, si dovrebbe avere un operatore di monodromia banale, il che è assurdo perché, come già calcolato, $\varepsilon_M(\rho_U, \rho_V) \neq \mathbb{1}$. Come è noto, il fatto che si abbia un operatore di monodromia non banale è segno della presenza di statistiche non ordinarie, di cui si ha una manifestazione nel nostro modello. Non deve quindi stupire se la proprietà (3.16) è violata.

Concludiamo questo paragrafo discutendo i motivi per cui nella teoria del campo massivo libero di Fermi in (1+1)-dimensioni la statistica di un automorfismo non possiede più la proprietà moltiplicativa nota in dimensione $\geq (2+1)$. Le ragioni di questa violazione appaiono chiare osservando la dimostrazione della seguente affermazione:

In una teoria di campo locale in uno spazio-tempo (d+1)-dimensionale, $d > 1$, che soddisfi alla dualità di Haag, vale la proprietà moltiplicativa $\varepsilon_{\rho\sigma} = \varepsilon_\rho \varepsilon_\sigma$ per ogni coppia di morfismi localizzati e trasportabili con supporti spazialmente separati.

Dimostrazione. La geometria di uno spazio-tempo almeno tridimensionale permette di scegliere in modo conveniente le posizioni relative delle regioni di localizzazione dei due morfismi ρ e σ e dei loro trasportati. Detti $\mathcal{O}_\rho$ e $\mathcal{O}_\sigma$ i doppi coni dove sono localizzati i due morfismi, ciascuno di essi viene trasportato ad un morfismo $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\sigma}$ localizzato in $\tilde{\mathcal{O}}_\rho \subset \mathcal{O}_\rho{}'$ e $\tilde{\mathcal{O}}_\sigma \subset \mathcal{O}_\sigma{}'$ rispettivamente. Come è facile verificare, posso scegliere $\tilde{\mathcal{O}}_\rho$ e $\tilde{\mathcal{O}}_\sigma$ in modo tale che esista un doppio cono $\tilde{\mathcal{O}} \supset \tilde{\mathcal{O}}_\rho \cup \tilde{\mathcal{O}}_\sigma$, $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}'_\rho$, ed esista un doppio cono $\mathcal{O}_{\sigma,\tilde{\sigma}} \supset \mathcal{O}_\sigma \cup \mathcal{O}_{\tilde{\sigma}}$, $\mathcal{O}_{\sigma,\tilde{\sigma}} \subset \mathcal{O}_\rho{}'$. Siano $U : \rho \to \tilde{\rho}$ e $V : \sigma \to \tilde{\sigma}$ due intertwiner unitari. Per costruzione, $\tilde{\rho}\tilde{\sigma} \times \rho\sigma$ e quindi, posto $W := U \times V$, è $\varepsilon_{\rho\sigma} = W^* \rho\sigma(W)$ (ricordiamo che quando due morfismi sono separati dal simbolo $\times$ si intendono causalmente indipendenti, ovvero localizzati in regioni spazialmente separate). Si trova facilmente: $\varepsilon_{\rho\sigma} = \varepsilon_\rho \varepsilon_\sigma$.

$\square$

Nella dimostrazione ha importanza cruciale la possibilità di scegliere opportunamente le regioni di localizzazione di tutti i morfismi coinvolti, per poter sfruttare la commutatività tra operatori localizzati in regioni spazialmente separate. Per quest'ultima affermazione si fa largo uso della dualità alla Haag, che nella teoria del campo libero massivo di Dirac in (1+1)-dimensioni è violata. Tuttavia, in questa dimostrazione, come in molte altre della AQFT, si ricorre alla dualità delle osservabili solo per gli unitari di allacciamento, che nel nostro modello sono effettivamente locali. Pertanto, se questa dimostrazione non continua ad essere valida in (1+1)-dimensioni, ciò non è imputabile alla violazione della dualità ma alla geometria dello spazio-tempo, in particolare al ben noto fatto che il complemento causale di una regione limitata non è connesso. La precedente si estende immediatamente ad una coppia di automorfismi non necessariamente indipendenti, ma anche per questa dimostrazione si fa uso della dualità alla Haag. In particolare, una delle proprietà più conosciute dell'operatore statistico è la seguente:

In (d+1)-dimensioni, con $d \geq 1$ *se* $\sigma = Ad_V \circ \rho$, *allora* $\varepsilon_\sigma = Ad_T(\varepsilon_\rho)$, *dove* $T = V\rho(V)$.

Tale proprietà continua a valere anche nella teoria qui esposta, in quanto non dipende dalla dimensione dello spazio-tempo e, al solito, sfrutta la dualità alla Haag solo per gli intertwiner unitari. Grazie a questa proprietà, la statistica di un settore continua ad avere senso anche qui, ovvero $\lambda_{\tilde{\rho}} = \lambda_\rho$, se $\tilde{\rho} \simeq \rho$. Ma vediamo i motivi "geometrici" che rendono impossibile la dimostrazione della proprietà moltiplicativa dell'operatore statistico in (1+1)-dimensioni, e per questo consideriamo, per semplicità, il caso di due morfismi causalmente indipendenti ρ e σ. Per poter esprimere l'operatore statistico di $\rho\sigma$ in funzione di quelli di ρ e di σ separatamente dobbiamo ricorrere ad un morfismo trasportato $\widetilde{\rho\sigma}$ che sia il prodotto dei due morfismi trasportati $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\sigma}$ utilizzati nella costruzione dei rispettivi operatori statistici ε_ρ e ε_σ. L'unica possibilità di disporre le regioni di localizzazione per avere $\widetilde{\rho\sigma} \times \rho\sigma$ prevede $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\sigma}$ localizzate entrambe a destra (o sinistra) del doppio cono $\mathcal{O} := \mathcal{O}_\rho \vee \mathcal{O}_\sigma$ dove è localizzato il prodotto $\rho\sigma$. Scegliendo la prima ipotesi, si ha l'alternativa: $\tilde{\rho} \prec \tilde{\sigma}$, $\tilde{\rho} \succ \tilde{\sigma}$. In entrambi i casi, non è possibile disporre di una configurazione che permetta di separare ε_ρ da ε_σ nell'espressione di $\varepsilon_{\rho\sigma}$. Nel caso particolare di automorfismi, essendo l'operatore statistico uno scalare, la proprietà moltiplicativa continua ad essere vera, ma solo per automorfismi causalmente indipendenti, come si può verificare con la (3.7).

Proveremo anche che, per due unitari $W_1 \equiv W_1(n_1, \lambda_1)$ e $W_2 \equiv W_2(n_2, \lambda_2)$, si ottiene:

$$\varepsilon(\rho_{W_1}, \rho_{W_2}) = (-1)^{n_1 n_2} e^{i\pi(n_1\lambda_2 + n_2\lambda_1)\,\mathrm{sgn}(x-x')}\mathbb{1}.$$

Come vedremo, l'operatore statistico ε_{ρ_W} così ottenuto dipende solo dalla classe di equivalenza unitaria dell'automorfismo ρ_W. In effetti, è noto dalla teoria DHR che, dati due morfismi localizzati e trasportabili unitariamente equivalenti ρ_i, $(i = 1, 2)$, con $\rho_2 = Ad_V \circ \rho_1$, si ha: $\varepsilon_{\rho_2} = W\varepsilon_{\rho_1}W^*$, dove $W := V\rho_1(V)$. Questo risultato continua a valere anche in (1+1)-dimensioni e dunque, poiché l'operatore statistico della nostra teoria è uno scalare, dovremo ottenere l'identità $\varepsilon_{\rho_2} = \varepsilon_{\rho_1}$. Infatti, vale il seguente:

Lemma 7 *Se $\sigma \simeq \rho_W$, allora $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\rho_W}$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che i "morfismi localizzati e trasportabili" sono endomorfismi ρ_W di $\mathscr{A}$ che agiscono come l'identità sull'algebra $\mathscr{A}(\mathcal{O}')$ per un certo doppio cono $\mathcal{O}$ e sono equivalenti ai loro traslati

$$\rho_{W_x} = \alpha_x \circ \rho_W \circ \alpha_{-x}.$$

Qui, posto $\rho_{W_x} = Ad_{V^x_{\rho_W}} \circ \rho_W$, si ha evidentemente

$$V^x_{\rho_W} = \widetilde{\Gamma}(T(x))\rho_W(\widetilde{\Gamma}(T(-x)))$$

ovvero, a meno di cocicli, $V^x_{\rho_W} = \widetilde{\Gamma}(W_x W^*)$, come già sapevamo. Sia $\sigma \simeq \rho_W$, con W localizzato in un doppio cono che al solito, per semplicità, supponiamo abbia base $(-\epsilon, \epsilon)$ in $t = 0$, e sia $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{K}$ il doppio cono ove è localizzato σ. Come abbiamo già visto nella dimostrazione del precedente teorema, deve essere $\sigma = \rho_{W_x}$, dove $x \in \mathbb{R}^2$ è tale che $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} + x$, nel qual caso l'unitario di interlacciamento è $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)$. Qui si è denotato al solito $W_x = T(x)WT(-x)$. Come si può verificare immediatamente, $W_x(n, \lambda; \varepsilon) = W(n, \lambda; \tau_x\varepsilon)$ ovvero, l'unitario W_x ha gli stessi valori di n e di λ di W, ma con una funzione che è la traslata di quella di W. A questo punto è sufficiente notare che tutti i passaggi delle dimostrazioni delle relazioni di cociclo impiegate nel calcolo dell'operatore statistico ε_{ρ_W} non dipendono dall'intervallo dove è centrata la funzione ε. È un risultato che dovevamo aspettarci, in quanto l'espressione dell'operatore statistico ottenuta in precedenza non dipende dalla scelta della funzione ε ma solo da n e da λ.

□

Come già visto, la rete delle osservabili di questa teoria non verifica la dualità di Haag e pertanto una gran parte delle dimostrazioni abitualmente utilizzate in AQFT non sono appropriate al nostro caso. Per esempio, per costruzione $\varepsilon_{\rho_W} \in \rho^2_W(\mathscr{A})'$ sempre, anche in (1+1)-dimensioni e senza dualità alla Haag, in quanto è una proprietà che discende unicamente dalle relazioni di allacciamento. Ma non possiamo più asserire che $\varepsilon_{\rho_W} \in \mathscr{A}(\mathcal{O})$, con $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ la regione dove è localizzato ρ_W, se la dualità è violata. Più in generale, se la dualità alla Haag è violata, non è detto che un operatore di allacciamento fra due morfismi localizzati in doppi coni $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ sia anch'esso localizzato in un doppio cono che contenga $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Tuttavia, nel nostro caso è possibile dimostrare ugualmente il carattere locale dell'operatore statistico in quanto, come già visto nella dimostrazione del Teorema 3 gli intertwiners unitari sono contenuti in algebre di osservabili locali. Infatti, se $x \in \mathbb{R}^2$ è tale che $\mathcal{O} + x \subset \mathcal{O}'$, si ha $\rho_{W_x} \simeq \rho_W$ tramite l'unitario $\widetilde{\Gamma}(W_x W^*) \in \mathscr{A}(\tilde{\mathcal{O}})$, dove $\tilde{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O} \cup (\mathcal{O} + x)$. Ne discende che

$$\varepsilon_{\rho_W} = \widetilde{\Gamma}(W_x W^*)^* \rho_W(\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)) \in \mathscr{A}(\tilde{\mathcal{O}}).$$

Occorre anche verificare che la definizione di operatore statistico continua ad avere senso anche nella teoria algebrica bidimensionale del campo libero massivo di Dirac ovvero, più in generale, in una teoria (1+1)-dimensionale dove non vale la dualità alla Haag ma dove gli intertwiners unitari sono locali.

Proposizione 9 *L'operatore statistico $\varepsilon_\rho = U^*\rho(U)$ non dipende dall'intertwiner $U : \rho \to \tilde{\rho}$, purché $\tilde{\rho} \times \rho$.*

Dimostrazione. Consideriamo un'altro automorfismo $\rho' \simeq \rho$, tramite $V : \rho \to \rho'$, con $\rho' \times \rho$. Perché risulti $V^*\rho(V) = U^*\rho(U)$ è necessario e sufficiente che $UV^* = \rho(UV^*)$, ma questo è sicuramente vero in quanto $UV^* : \rho' \to \tilde{\rho}$ e quindi, essendo ρ' e $\tilde{\rho}$ disgiunti da ρ, è sempre possibile scegliere un intertwiner localizzato in un doppio cono che contenga le loro regioni di localizzazione e su cui ρ agisca in modo banale.

□

Facciamo alcune precisazioni relative alla dimostrazione della proposizione precedente. Nelle notazioni da noi introdotte, sia ρ_W localizzato nel doppio cono $\mathcal{O}$, e siano ρ_{W_x}, ρ_{W_y} due automorfismi ad esso equivalenti, localizzati in due doppi coni $\mathcal{O}+x$ e $\mathcal{O}+y$ rispettivamente, spazialmente separati da $\mathcal{O}$. Detti $U := \widetilde{\Gamma}(W_x W^*), V := \widetilde{\Gamma}(W_y W^*)$ gli intertwiner unitari che realizzano tali equivalenze, sappiamo che $U \in \mathscr{A}(\mathcal{O}_1)$, dove $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O} \cup (\mathcal{O} + x)$ e $V \in \mathscr{A}(\mathcal{O}_2)$, dove $\mathcal{O}_2 \supset \mathcal{O} \cup (\mathcal{O} + y)$ e quindi, al momento, possiamo affermare soltanto che $VU^* \in \mathscr{A}(\tilde{\mathcal{O}})$, dove $\tilde{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O} \cup (\mathcal{O} + x) \cup (\mathcal{O} + y)$. Però, possiamo ripetere la dimostrazione del Teorema 3 questa volta partendo da ρ_{W_x} (in questo caso la funzione ε sarà centrata nel punto x anziché nell'origine) e quindi, posto $z = y - x$, si ha che

$$\widetilde{\Gamma}((W_x)_z W_x^*) \in \mathscr{A}((\mathcal{O} + x) \vee (\mathcal{O} + y))$$

è l'intertwiner unitario tra ρ_{W_x} e ρ_{W_y}. Si è denotato con $\mathscr{D}_1 \vee \mathscr{D}_2$ il doppio cono generato dalle regioni dello spazio-tempo $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$, ovvero il più piccolo doppio cono che li contiene entrambi. Per completezza, verifichiamo che $Ad_{\widetilde{\Gamma}((W_x)_z W_x^*)} = Ad_{VU^*}$, ma questo è evidente in quanto anche l'unitario $\widetilde{\Gamma}(W_y W^*)\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)^*$ è in (ρ_{W_x}, ρ_{W_y}), e quindi esiste un fattore di fase $\lambda \in \mathbb{S}^1$ (dipendente da W, x, y) tale che

$$\widetilde{\Gamma}((W_x)_z)W_x^* = \lambda \widetilde{\Gamma}(W_y W^*)\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)^*.$$

In realtà, possiamo dimostrare di più, e cioè che l'operatore statistico ε_{ρ_W} è localizzato nella stessa regione (doppio cono) dove è localizzato l'automorfismo ρ_W, ritrovando anche qui una classica proprietà della teoria algebrica dei campi quantistici che soddisfi alla dualità alla Haag.

Proposizione 10 *Per ogni automorfismo ρ_W dell'algebra delle osservabili $\mathscr{A}$ si ha: $\varepsilon_{\rho_W} \in \mathscr{A}(\mathcal{O})$.*

Dimostrazione. Dimostreremo che

(i) $\varepsilon_{\rho_W} \in \mathscr{F}(\mathcal{O}')'$;

(ii) $\varepsilon_{\rho_W} \in \widetilde{\Gamma}(U(1))'$,

in quanto ciò comporta che $\varepsilon_{\rho_W} \in \mathscr{A}(\mathcal{O})$.[2]

(i) Sia $\mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}_1}$, $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'$. Vogliamo dimostrare che

$$[\varepsilon_{\rho_W}, \pi(\phi(f))] = 0. \tag{3.17}$$

Infatti, se è verificata l'equazione (3.17), risulta $\varepsilon_{\rho_W} \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_1)'$, $\forall \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'$ e quindi

$$\varepsilon_{\rho_W} \in \bigcap_{\substack{\mathcal{O}_1 \in \mathcal{K} \\ \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'}} \mathscr{F}(\mathcal{O}_1)' = \Big(\bigvee_{\substack{\mathcal{O}_1 \in \mathcal{K} \\ \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'}} \mathscr{F}(\mathcal{O}_1) \Big)' = \mathscr{F}(\mathcal{O}')'.$$

Dimostriamo dunque la (3.17), e perché questa sia una verifica ulteriore di quanto abbiamo già calcolato, non ricorriamo alla forma esplicita già ottenuta per ε_{ρ_W} nel teorema 3 (sappiamo che è uno scalare e che quindi le (i) e (ii) sono banalmente vere!), ma facciamo una dimostrazione più generale utilizzando solo le proprietà viste nei lemmi precedenti, tipiche di una teoria senza dualità alla Haag ma con gli intertwiner unitari localizzabili in doppi coni. Osserviamo preliminarmente che, per definizione,

$$\widetilde{\Gamma}(W)\pi(\phi(f)) = \pi(\phi(Wf))\widetilde{\Gamma}(W)$$

da cui, iterando,

$$\widetilde{\Gamma}(W_1)\cdots\widetilde{\Gamma}(W_n)\pi(\phi(f)) = \pi(\phi(W_1\cdots W_n f))\widetilde{\Gamma}(W_1)\cdots\widetilde{\Gamma}(W_n).$$

Allora, tenuto conto che $[W, W_x] = 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\rho_W}\pi(\phi(f)) &= \widetilde{\Gamma}(W_x W^*)^* \rho_W(\widetilde{\Gamma}(W_x W^*))\pi(\phi(f)) = \\
&= \widetilde{\Gamma}(W W_x^*)\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)\widetilde{\Gamma}(W^*)\pi(\phi(f)) = \\
&= \pi(\phi(W W_x^* W W_x W^* W^* f))\varepsilon_{\rho_W} = \\
&= \pi(\phi(f))\varepsilon_{\rho_W}
\end{aligned}$$

[2] Cf. [DHR69a]

da cui la 3.17.

(ii) È immediato, in quanto, come già visto nella dimostrazione della (i), ε_{ρ_W} si può esprimere come prodotto di operatori del tipo $\widetilde{\Gamma}(\cdot)$, ovvero di operatori che commutano a meno del cociclo con gli unitari della forma $\widetilde{\Gamma}(e^{i\gamma})$. La tesi è conseguenza del fatto che i termini di cociclo si elidono a due a due.

□

Corollario 1 *L'operatore statistico ε_{ρ_W} induce una rappresentazione unitaria del gruppo delle trecce.*

Dimostrazione. Che l'operatore statistico ε_{ρ_W} induca una rappresentazione del gruppo delle trecce è qui evidente, in quanto è uno scalare e dunque, ponendo $b_i = \rho^{i-1}(\varepsilon_{\rho_W})$, per $i = 1, ..., n-1$, gli operatori b_i (anch'essi scalari) verificano banalmente le relazioni di treccia. Il fatto che $\varepsilon^2 \neq \mathbb{1}$ assicura che il gruppo rappresentato dai b_i non sia quello delle permutazioni ma il più generale gruppo delle trecce.

□

Come è noto, fra le condizioni "iniziali" che definiscono univocamente l'operatore statistico vi è quella che stabilisce che $\varepsilon(\rho, \sigma) = \mathbb{1}$ quando ρ è causalmente separato da σ. Verifichiamolo anche per il nostro modello, e per questo ricorriamo alla decomposizione di $\varepsilon(\rho_W, \rho_{W'})$ fornita in [FRS92]. Pertanto, siano $W \equiv UV$ e $W' \equiv U'V'$ i due unitari localizzati in $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ corrispondenti alle coppie $(n, \lambda), (n', \lambda') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Vale:

$$\varepsilon(\rho_W, \rho_{W'}) \equiv \varepsilon(\rho_U \rho_V, \rho_{U'} \rho_{V'}) =$$
$$= \rho_{U'}(\varepsilon(\rho_U, \rho_{V'}))\varepsilon(\rho_U, \rho_{U'})\rho_U(\rho_{U'}(\varepsilon(\rho_V, \rho_{V'}))\varepsilon(\rho_V, \rho_{U'})). \tag{3.18}$$

I calcoli sono simili a quelli effettuati in precedenza per la verifica dell'operatore statistico ρ_W, ma occorre tener conto di valori differenti per gli n e per i λ dei due autormorfismi considerati.

- CALCOLO DI $\varepsilon(\rho_U, \rho_{V'})$.

  Trasportiamo ρ_U in $\mathcal{O}_x$ e $\rho_{V'}$ in $\mathcal{O}_y$, con $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}'_y$. Al solito, gli intertwiner unitari sono $\widetilde{\Gamma}(U_x U^*) : \rho_U \to \rho_{U_x}$ e $\widetilde{\Gamma}(V'_y V'^*) : \rho_{V'} \to \rho_{V'_y}$. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho_U, \rho_{V'}) &= \widetilde{\Gamma}(V'_y V'^*)^* \rho_{V'_y}(\widetilde{\Gamma}(U_x U^*)^*)\widetilde{\Gamma}(U_x U^*)\rho_U(\widetilde{\Gamma}(V'_y V'^*)) = \\ &= \widetilde{\Gamma}(V')\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(U_x)^*\widetilde{\Gamma}(V'_y)^*\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V'_y)\widetilde{\Gamma}(V')^*\widetilde{\Gamma}(U)^*. \end{aligned}$$

  D'altra parte,

$$\widetilde{\Gamma}(U_x)\widetilde{\Gamma}(V'_y) = e^{-i\pi n\lambda' \operatorname{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(V'_y)\widetilde{\Gamma}(U_x),$$

da cui si ottiene:

$$\varepsilon(\rho_U, \rho_{V'}) = e^{i\pi n\lambda' \operatorname{sgn}(x-y)} \widetilde{\Gamma}(V')\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(V')^*\widetilde{\Gamma}(U)^*. \tag{3.19}$$

- Calcolo di $\varepsilon(\rho_V, \rho_{U'})$.

  In questo caso, a differenza del precedente, è ρ_V ad essere trasportato alla destra di $\rho_{U'}$. Qui, la disposizione delle regioni di localizzazione è la seguente (sempre restando unica la regione $\mathcal{O}$ dove sono localizzati entrambi i morfismi di partenza, ovvero degli unitari U e V): $\widetilde{\Gamma}(U'_x U'^*) : \rho_{U'} \to \rho_{U'_x}$, $\widetilde{\Gamma}(V_y V^*) : \rho_V \to \rho_{V_y}$, $\mathcal{O}_x \prec \mathcal{O}_y$. Ne segue:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\rho_V, \rho_{U'}) &= \widetilde{\Gamma}(U'_x U'^*)^* \rho_{U'_x}(\widetilde{\Gamma}(V_y V^*)^*)\widetilde{\Gamma}(V_y V^*)\rho_V(\widetilde{\Gamma}(U'_x U'^*)) = \\ &= e^{i\pi n'\lambda \operatorname{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(U')\widetilde{\Gamma}(V)\widetilde{\Gamma}(U')^*\widetilde{\Gamma}(V)^*. \end{aligned} \tag{3.20}$$

- Calcolo di $\varepsilon(\rho_U, \rho_{U'})$.

  Sia $\mathcal{O}_x \succ \mathcal{O}_y$, e consideriamo i morfismi trasportati $\rho_{U_x} = Ad_{\widetilde{\Gamma}(U_x)}$ e $\rho_{U'_y} = Ad_{\widetilde{\Gamma}(U'_y)}$. Si ha:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\rho_U, \rho_{U'}) &= \widetilde{\Gamma}(U'_y U'^*)^* \rho_{U'_y}(\widetilde{\Gamma}(U_x U^*)^*)\widetilde{\Gamma}(U_x U^*)\rho_U(\widetilde{\Gamma}(U'_y U'^*)) = \\ &= (-1)^{nn'}\widetilde{\Gamma}(U')\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(U')^*\widetilde{\Gamma}(U)^*, \end{aligned} \tag{3.21}$$

  avendo utilizzato il fatto che $\widetilde{\Gamma}(U_x)$ e $\widetilde{\Gamma}(U'_y)$ commutano a meno del fattore $(-1)^{nn'}$.

- Calcolo di $\varepsilon(\rho_V, \rho_{V'})$.

  Con procedimento analogo, notando che operatori della forma $\widetilde{\Gamma}(V_x)$ e $\widetilde{\Gamma}(V_y)$ commutano se causalmente indipendenti, si ottiene subito:

$$\varepsilon(\rho_V, \rho_{V'}) = \mathbb{1}. \tag{3.22}$$

Inserendo le (3.19)-(3.22) nella (3.18), si ottiene:

$$\varepsilon(\rho_W, \rho_{W'}) = (-1)^{nn'} e^{i\pi(n\lambda' - n'\lambda)\operatorname{sgn}(y-x)}$$

$$\widetilde{\Gamma}(U')\widetilde{\Gamma}(V')\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(V')^*\widetilde{\Gamma}(V)\widetilde{\Gamma}(U')^*\widetilde{\Gamma}(V)^*\widetilde{\Gamma}(U)^*. \tag{3.23}$$

Supponendo che W e W' siano centrati in regioni spazialmente separate, lo stesso vale per U e U' e per V e per V', ai quali possono dunque essere applicate le ormai note relazioni di commutazione con cociclo, ottenendo:

$$\widetilde{\Gamma}(V')\widetilde{\Gamma}(U) = e^{i\pi n\lambda' \operatorname{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(V')$$

e

$$\widetilde{\Gamma}(V)\widetilde{\Gamma}(U') = e^{i\pi n'\lambda \operatorname{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(U')\widetilde{\Gamma}(V).$$

Con queste ultime inserite nella (3.23) si ottiene infine:

$$\varepsilon(\rho_W, \rho_{W'}) = \mathbb{1},$$

come previsto dalla teoria generale.

Vogliamo concludere questa sezione riportando in dettaglio il calcolo dell'operatore statistico $\varepsilon(\rho_W, \rho_{W'})$ nel caso in cui i due unitari W e W' siano centrati nello stesso intervallo (e quindi descritti dalla stessa funzione $\varepsilon(x)$. In effetti, insieme al caso in cui le regioni di localizzazione dei due automorfismi siano spazialmente separate, è questa l'unica situazione in cui è possibile dare un'espressione semplice e di reale utilità per l'operatore statistico di una coppia di morfismi, in virtù del fatto che il fattore di cociclo non dipende dalla forma esplicita della funzione ε prescelta. A tale scopo occorre dimostrare un risultato intermedio, di cui tratteremo solo il caso $\lambda = 0$, che corrisponde a $W(n, 0) \equiv U(n)$, rimandando a [Rui] per i dettagli relativi al caso $n = 0$, ovvero quando $W \equiv V$. Per quest'ultima eventualità ci limitiamo solo a precisare che continua a valere lo stesso risultato che ci accingiamo a dimostrare per $U(n)$.

Lemma 8 *Se gli unitari $U \equiv U(n)$ e $U' \equiv U(n')$ hanno base nello stesso intervallo, gli implementatori $\widetilde{\Gamma}(U)$ e $\widetilde{\Gamma}(U')$ commutano.*

Dimostrazione. Utilizzando la formula

$$[d\widetilde{\Gamma}(A_s), d\widetilde{\Gamma}(B_{s'})] = \frac{\delta_{ss'}}{2\pi} \int dk\, k\, \hat{\alpha}(-k)\hat{\beta}(k), \qquad \forall \alpha, \beta \in H_1(\mathbb{R}). \tag{3.24}$$

Le relazioni di commutazione per la rappresentazione proiettiva $\widetilde{\Gamma}$ ed i generatori $d\widetilde{\Gamma}(\cdot)$ implicano che, prendendo α e β reali, si ha:

$$\Pi_s(e^{i\alpha})\Pi_s(e^{i\beta}) = e^{(-i/2)\rho(\alpha,\beta)}\Pi_s(e^{i(\alpha+\beta)}), \qquad \forall \alpha, \beta \in V \tag{3.25}$$

dove

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int dx\, \alpha'(x)\beta(x). \tag{3.26}$$

Pertanto, ci siamo ricondotti al calcolo dell'integrale (3.26) dove, nel caso qui trattato, $\alpha(x) \equiv \pi n \varepsilon(x)$, $\beta(x) \equiv \pi n' \varepsilon(x)$. Tale integrale è nullo, e quindi gli implementatori unitari di cui sopra commutano.

□

Per quanto riguarda le relazioni di commutazione fra gli unitari $\widetilde{\Gamma}(U)$ ed i loro traslati di tipo spazio, possiamo fornire una semplice dimostrazione della seguente proprietà, alla quale si è fatto spesso ricorso:

Lemma 9 *Se $\mathcal{O}_y \subset \mathcal{O}'$, vale:*

$$\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(U'_y) = (-1)^{nn'}\widetilde{\Gamma}(U'_y)\widetilde{\Gamma}(U).$$

Dimostrazione. Anche per questa proprietà è sufficiente calcolare l'integrale in (3.26) nel caso in cui $\alpha(x) \equiv \pi n \varepsilon(x)$, $\beta(x) \equiv \pi n' \varepsilon(x-y)$. Chiaramente, se $y > 0$ risulta $\varepsilon(x-y) = -1$ per ogni $x \in (-1,1)$ mentre, se $y < 0$, è $\varepsilon(x-y) = 1$ nello stesso intervallo, in quanto $(-1,1)$ e $(y-1, y+1)$ sono disgiunti. Poiché

$$\int dx\, \alpha'(x)\beta(x) = \pi^2 nn' \int_{-1}^{1} dx\, \varepsilon'(x)\varepsilon(x-y) = 2\pi^2 nn' \mathrm{sgn}(x-y)$$

si ha

$$\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(U'_y) = e^{(-i/2)\pi nn' \,\mathrm{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(UU'_y) = e^{(-i/2)\pi nn' \,\mathrm{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(U'_y U).$$

in quanto gli unitari U e U'_y commutano. Infine,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}(U'_y)\widetilde{\Gamma}(U) &= e^{(i/2)\pi nn' \,\mathrm{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(U'_y U) = \\ &= e^{i\pi nn' \,\mathrm{sgn}(x-y)}\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(U'_y) = \\ &= (-1)^{nn'}\widetilde{\Gamma}(U)\widetilde{\Gamma}(U'_y). \end{aligned}$$

□

Siamo ora in grado di calcolare l'operatore statistico $\varepsilon(\rho_W, \rho_{W'})$ per una generica coppia di unitari W, W' centrati nello stesso intervallo. Se gli automorfismi sono localizzati in $\mathcal{O}$, consideriamo $x, y \in \mathbb{R}^2$ tali che $\mathcal{O}_x$ e $\mathcal{O}_y$ siano nella componente a destra del complemento causale $\mathcal{O}'$ e con separazione relativa di tipo spazio. Per convenzione, nel calcolo di $\varepsilon(\rho_W, \rho_{W'})$ occorre traslare ρ_W alla destra del traslato di $\rho_{W'}$. Scegliamo, pertanto, un automorfismo ρ_{W_x} localizzato in $\mathcal{O}_x$ ed unitariamente equivalente a ρ_W, ed un automorfismo $\rho_{W'_y}$ localizzato in $\mathcal{O}_y$ ed unitariamente equivalente a $\rho_{W'}$. Usando il fatto che l'azione di ρ_{W_x} sull'unitario di allacciamento $\widetilde{\Gamma}(W'_y W'^*)$ è banale, e notando che tutti i cocicli si elidono (in quanto per ogni cociclo si ha anche il suo complesso coniugato), si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho_W, \rho_{W'}) &= \widetilde{\Gamma}(W' W'^*_y) \times \widetilde{\Gamma}(W W^*_x) \circ \widetilde{\Gamma}(W_x W^*) \times \widetilde{\Gamma}(W'_y W'^*) \\ &= \widetilde{\Gamma}(W' W'^*_y)\widetilde{\Gamma}(W'_y)\widetilde{\Gamma}(W W_x{}^*)\widetilde{\Gamma}(W'_y)^*\widetilde{\Gamma}(W_x W^*)\rho_W(\widetilde{\Gamma}(W'_y W'^*)) \\ &= \widetilde{\Gamma}(W' W'^*_y)\widetilde{\Gamma}(W'_y)\widetilde{\Gamma}(W W_x{}^*)\widetilde{\Gamma}(W'_y)^*\widetilde{\Gamma}(W'_y W'^*)\widetilde{\Gamma}(W_x W^*) \\ &= e^{-i\pi(n\lambda' + n'\lambda)}\widetilde{\Gamma}(W')\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(W')^*\widetilde{\Gamma}(W)^* \\ &= e^{-\pi i(n\lambda' + n'\lambda)}\mathbb{1}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il Lemma 8. Se, invece, $\mathcal{O}_x \prec \mathcal{O}_y$, nel risultato precedente cambia solo il segno dell'esponente. Pertanto

$$\varepsilon(\rho_W, \rho_{W'}) = e^{\pi i(n\lambda' + n'\lambda)\,\mathrm{sgn}(y-x)}\mathbb{1}.$$

Come abbiamo già notato, i portatori di carica $\widetilde{\Gamma}(W)$ non appartengono all'algebra delle osservabili. In questa sezione vogliamo dimostrare che tali implementatori unitari non sono neanche nell'algebra dei campi $\mathscr{F}$, almeno per $\lambda \neq 0$. Pertanto, l'interpretazione dei risultati ottenuti per questo modello non può essere affidata soltanto agli strumenti noti della Teoria Algebrica dei Campi Quantistici "ortodossa" così come formulata in [DHR69a], [DHR69b], [DHR71], [DHR74], [DR86], [DR90] ma si dovrà fare ricorso ad un più recente concetto di braiding, studiando il comportamento asintotico degli unitari di allacciamento.

Come primo passo, osserviamo che, se $\widetilde{\Gamma}(W) \in \mathscr{F}$, allora anche i suoi traslati $\widetilde{\Gamma}(W)_x \equiv \widetilde{\Gamma}(T(x))\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(T(-x)) \in \mathscr{F}$. Ricordiamo, infatti, che tra gli assiomi di una AQFT vi è anche la possibilità di rappresentare le traslazioni $T(x)$ come automorfismi di $\mathscr{F}$ unitariamente implementabili sullo spazio di Fock. Nel presente contesto, detta $x \mapsto \alpha_x \in \mathrm{Aut}\mathscr{F}$ la rappresentazione di cui sopra, si ha:

$$\alpha_x(\pi(\phi(f))) \equiv \widetilde{\Gamma}(T(x))\pi(\phi(f))\widetilde{\Gamma}(T(-x)) = \pi(\phi(\tau_x f)),$$

dove $(\tau_x f)(\xi) := f(\xi - x)$. Ne segue che $\alpha_x(\mathscr{F}(\mathcal{O})) = \mathscr{F}(\mathcal{O} + x)$ e quindi $\alpha_x(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$. Pertanto, se $\widetilde{\Gamma}(W) \in \mathscr{F}$, anche $\alpha_x(\widetilde{\Gamma}(W)) \in \mathscr{F}$. Poiché si ha $\alpha_x = Ad_{\widetilde{\Gamma}(T(x))}$, possiamo dire che $\widetilde{\Gamma}(W_x) \in \mathscr{F}$, in quanto i due, essendo $\widetilde{\Gamma}$ una rappresentazione proiettiva, differiscono solo per un fattore (il cociclo):

$$\alpha_x(\widetilde{\Gamma}(W)) \equiv \widetilde{\Gamma}(T(x))\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(T(-x)) = (\text{cocicli})\,\widetilde{\Gamma}(W_x) \in \mathscr{F}.$$

Come risulta evidente dalla forma dell'operatore statistico, se $\lambda = 0$ si ritorna alla statistica ordinaria. Consideriamo allora il caso $\lambda \neq 0$, e dimostriamo che per tali λ l'unitario $\widetilde{\Gamma}(W)$ non è un elemento dell'algebra $\mathscr{F}$. Procediamo per assurdo.

Sia dunque $\widetilde{\Gamma}(W) \in \mathscr{F}$. Per quanto appena visto, risulterà $\widetilde{\Gamma}(W_x) \in \mathscr{F}$. Scegliendo $x \in \mathbb{R}^2$ in modo tale che $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}'$, avremo

$$\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(W_x) = (-1)^n e^{2\pi i n\lambda\,\mathrm{sgn}(x)}\widetilde{\Gamma}(W_x)\widetilde{\Gamma}(W). \tag{3.27}$$

Poniamo $B := \pi(\phi(f))^q\widetilde{\Gamma}(W)$, $B^x := \pi(\phi(g))^q\widetilde{\Gamma}(W_x)$, dove $q \equiv q(W) = q(W_x)$ è la carica portata dagli automorfismi ρ_W e ρ_{W_x} e $\mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}}$, $\mathrm{supp}(g) \subset B_{\mathcal{O}_x}$. Inoltre,

$$\widetilde{\Gamma}(W)\pi(\phi(g))^q = e^{-i\pi q\lambda}\pi(\phi(g))^q\widetilde{\Gamma}(W), \tag{3.28}$$

avendo scelto, per fissare le idee, $x > 0$. In virtù delle (3.27)-(3.28),

$$\begin{aligned} BB^x &= \pi(\phi(f))^q\widetilde{\Gamma}(W)\pi(\phi(g))^q\widetilde{\Gamma}(W_x) = \\ &= e^{-i\pi q\lambda}\pi(\phi(f))^q\pi(\phi(g))^q\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(W_x) = \\ &= e^{-i\pi q\lambda}\pi(\phi(g))^q\pi(\phi(f))^q e^{i\pi q\lambda\,\mathrm{sgn}(x)}\widetilde{\Gamma}(W_x)\widetilde{\Gamma}(W). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Osservando che

$$\pi(\phi(f))^q\widetilde{\Gamma}(W_x) = e^{-i\pi q\lambda}\widetilde{\Gamma}(W_x)\pi(\phi(f))^q,$$

il secondo membro della (3.29) si scrive

$$e^{-i\pi q\lambda}\pi(\phi(g))^q\widetilde{\Gamma}(W_x)\pi(\phi(f))^q\widetilde{\Gamma}(W),$$

e quindi si ottiene una regola di commutazione per B ed i suoi traslati di tipo spazio:

$$BB^x = e^{-i\pi q\lambda}B^xB. \tag{3.30}$$

A questo punto usiamo l'ipotesi $\widetilde{\Gamma}(W) \in \mathscr{F}$. Poiché $\mathscr{F} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}\mathscr{F}(\mathcal{O})}^{||\cdot||}$, l'unitario di allacciamento ed il suo traslato possono essere visti come limite in norma di successioni di elementi locali

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}(W) &= \lim_{k\to\infty} F_k, \qquad F_k \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_k) \\ \widetilde{\Gamma}(W_x) &= \lim_{j\to\infty} F_j^x, \qquad F_j^x \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_{x,j}) \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} B &= \lim_{k\to\infty} \pi(\phi(f))^q F_k \equiv \lim_{k\to\infty} B_k \\ B^x &= \lim_{j\to\infty} \pi(\phi(g))^q F_j^x \equiv \lim_{j\to\infty} B_j^x. \end{aligned}$$

Sia $\epsilon > 0$, e sia $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall k \geq k_\epsilon$,

$$||B_k - B|| < \epsilon/3M, \ ,||B_k^x - B^x|| < \epsilon/3M, \ ||B_k^xB_k - B^xB|| < \epsilon/3,$$

dove M è una costante tale che $||B_k|| + ||B_k^x|| < M$ per ogni k (infatti, le successioni B_k e B_k^x convergono, quindi sono limitate). L'espressione

$$||BB^x - B^xB|| \leq ||B^x||\,||B - B_k|| + ||B_k||\,||B^x - B_k^x|| + ||B_k^xB_k - B^xB||$$

può essere resa arbitrariamente piccola approssimando B e B^x con elementi che commutano asintoticamente, in contraddizione con la (3.30).

Questa linea di dimostrazione, che ha il pregio di essere intuitiva, non prova nulla nel caso $q\lambda \in \mathbb{Z}$, in quanto è basata sulla contraddizione tra la (3.30) e la commutatività asintotica degli operatori B, B^x sopra introdotti, contraddizione che viene evidentemente a mancare se $q\lambda \in \mathbb{Z}$. In particolare, non si ha alcuna informazione relativa al caso $q = 0$. Intendiamo fornire, pertanto, una dimostrazione alternativa che aggiri questo ostacolo. Questa nuova dimostrazione è basata sulla "località twisted" dei campi, la cui validità nel nostro modello è stata stabilita in precedenza.

Lemma 10 *La corrispondenza $f \to \pi_P(\phi(f))$ è isometrica.*

Dimostrazione. Poiché la rappresentazione di Fock π_P è fedele, è isometrica:

$$||\pi_P(\phi(f))|| = ||\phi(f)||,$$

e quindi rimane da valutare $||\phi(f)||$. Poiché $\{\phi(f), \phi(g)^*\} = (f, g)\mathbb{1}$, si ha:

$$\begin{aligned} ||\phi(f)\phi(g)||^2 + ||\phi^*(f)\phi(g)||^2 &= (\phi^*(f)\phi(f)\phi(g), \phi(g)) + (\phi(f)\phi^*(f)\phi(g), \phi(g)) \\ &= (\{\phi^*(f), \phi(f)\}\phi(g), \phi(g)) = ||f||^2||\phi(g)||^2 \end{aligned}$$

da cui $||\phi(f)|| \leq ||f||$. D'altra parte, se nella precedente uguaglianza $g = f$ otteniamo $||\phi(f)^2|| \leq ||f||\,||\phi(g)||$, e quindi $||\phi(f)|| = ||f||$.

□

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

Teorema 4 *Per ogni $\lambda \neq 0$ gli implementatori unitari $\widetilde{\Gamma}(W)$ non sono elementi dell'algebra dei campi $\mathscr{F}$.*

Dimostrazione. L'operazione di "twisting" è definita, per ogni $F \in \mathscr{F}$, da $F^\tau := Ad_Z(F)$, dove

$$Z = \frac{\mathbb{1} + iV}{1 + i}, \qquad V^* = V^{-1} = V.$$

Nel nostro caso $V = \Gamma(-\mathbb{1})$ (l'implementatore dell'automorfismo di $\mathscr{F}$ che lascia invariati i campi bosonici e cambia segno a quelli fermionici). Se fosse $\widetilde{\Gamma}(W) \in \mathscr{F}$, si avrebbe $\widetilde{\Gamma}(W)^\tau = \widetilde{\Gamma}(W)$ (come subito si verifica), ma questo è assurdo, in quanto $\widetilde{\Gamma}(W)$ avrebbe carattere bosonico, e quindi, se fosse locale, dovrebbe commutare con i suoi traslati per separazioni di tipo spazio, mentre invece (per $x > 0$)

$$\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(W_x) = e^{2\pi i q\lambda}\,\widetilde{\Gamma}(W_x)\widetilde{\Gamma}(W).$$

Se, invece, non fosse locale ma pur sempre in $\mathscr{F}$, varrebbe l'argomento precedente. Quindi, se $q\lambda \notin \mathbb{Z}$, $\widetilde{\Gamma}(W) \notin \mathscr{F}$. Ma a noi interessa discutere il caso $q\lambda \in \mathbb{Z}$, e per questo consideriamo una successione $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi locali di $\mathscr{F}$ convergente (in norma) a $\widetilde{\Gamma}(W)$:

$$\widetilde{\Gamma}(W) = \lim_{n\to\infty} F_n, \qquad F_n \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_n).$$

Evidentemente, $F_n^\tau \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_n)^\tau = \mathscr{F}(\mathcal{O}_n{}')'$, e quindi

$$[F_n^\tau, A] = 0 \quad A \in \mathscr{F}(\mathcal{O}_n{}') \quad (n \in \mathbb{N}).$$

In particolare, $\forall\hat{\mathcal{O}}_n \subset \mathcal{O}_n{}'$,

$$[F_n^\tau, \pi(\phi(f))] = 0, \quad \text{supp}(f) \subset B_{\hat{\mathcal{O}}_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Con tali notazioni si ha:

$$||\widetilde{\Gamma}(W)^\tau \pi(\phi(f)) - \pi(\phi(f))\widetilde{\Gamma}(W)^\tau|| \leq$$
$$\leq ||(\widetilde{\Gamma}(W)^\tau - F_n^\tau)\pi(\phi(f))|| + ||F_n^\tau \pi(\phi(f)) - \pi(\phi(f))F_n^\tau|| +$$
$$+ ||\pi(\phi(f))(F_n^\tau - \widetilde{\Gamma}(W)^\tau)|| \leq$$
$$\leq 2||\pi(\phi(f))||\, ||\widetilde{\Gamma}(W)^\tau - F_n^\tau|| + ||F_n^\tau \pi(\phi(f)) - \pi(\phi(f))F_n^\tau||. \tag{3.31}$$

Consideriamo solo funzioni normalizzate. Pertanto, per il lemma 10, si ha $||\pi(\phi(f))|| = 1$. Fissato $\epsilon > 0$ arbitrario, sia $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$||\widetilde{\Gamma}(W)^\tau - F_n^\tau|| < \epsilon/2$$

per ogni $n \geq n_\epsilon$. Scegliendo $n = n_\epsilon$ e $\mathrm{supp}(f) \subset B_{\hat{\mathcal{O}}_{n_\epsilon}}$, dove $\hat{\mathcal{O}}_{n_\epsilon} \subset \mathcal{O}_{n_\epsilon}{}'$, l'ultimo membro della (3.31) risulta maggiorato da ϵ. Pertanto, per ogni prefissato valore di q e λ, la norma $||\widetilde{\Gamma}(W)^\tau \pi(\phi(f)) - \pi(\phi(f))\widetilde{\Gamma}(W)^\tau||$ può essere resa arbitrariamente piccola.

D'altra parte, essendo $\widetilde{\Gamma}(W)^\tau = \widetilde{\Gamma}(W)$, il primo membro della (3.31) è anche uguale a

$$||e^{-i\pi\lambda}\pi(\phi(f))\widetilde{\Gamma}(W) - \pi(\phi(f))\widetilde{\Gamma}(W)|| = |e^{-i\pi\lambda} - 1|, \tag{3.32}$$

avendo usato il lemma 10 e l'unitarietà di $\widetilde{\Gamma}(W)$. La (3.32) è in contraddizione con la (3.31), in quanto stabilisce che, per $\lambda \neq 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)$, la norma di cui sopra non può essere resa piccola a piacere.

□

Infine, nel caso $\lambda = 0$ gli implementatori unitari sono elementi locali di $\mathscr{F}$. Infatti, se W è centrato in $\mathcal{O}$, risulta

$$\widetilde{\Gamma}(W)\pi(\phi(f))\widetilde{\Gamma}(W)^* = \pi(\phi(f))$$

per ogni f con supporto spazialmente separato da $\mathcal{O}$. Pertanto, in virtù della dualità twisted, risulta

$$\widetilde{\Gamma}(W) \in \mathscr{F}(\mathcal{O}')' = \mathscr{F}(\mathcal{O})^\tau.$$

D'altra parte, poiché il twisting è involutivo sulle algebre dei campi locali, ovvero $\mathscr{F}(\mathcal{O})^{\tau\tau} = \mathscr{F}(\mathcal{O})$ (come discende immediatamente dalla definizione di "twisting" $\mathrm{Ad}_Z,\ Z^2 = V$) e poiché $\widetilde{\Gamma}(W)^\tau \equiv \widetilde{\Gamma}(W)$, segue $\widetilde{\Gamma}(W) \in \mathscr{F}(\mathcal{O})$.

Nel lemma successivo verrà dimostrata anche la dualità essenziale (per i doppi coni), in vista di una successiva applicazione della stessa. Utilizzando le notazioni in [Mue98], per ogni doppio cono $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ denotiamo con $\mathcal{W}_{LL}^{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{W}_{RR}^{\mathcal{O}}$ la componente di sinistra e di destra, rispettivamente, del complemento causale $\mathcal{O}'$, e poniamo $\mathcal{W}_L^{\mathcal{O}} := \mathcal{W}_{RR}^{\mathcal{O}\,\prime}$, $\mathcal{W}_R^{\mathcal{O}} := \mathcal{W}_{LL}^{\mathcal{O}\,\prime}$. Tutte le regioni coinvolte in questa analisi sono di tipo wedge, nel senso che sono ottenute per traslazione dai wedge standard $\mathcal{W}_L = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^1 < -|x^0|\}$ e $\mathcal{W}_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^1 > |x^0|\}$. Con queste definizioni, $\mathcal{O} = \mathcal{W}_L^{\mathcal{O}} \cap \mathcal{W}_R^{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{O}' = \mathcal{W}_{LL}^{\mathcal{O}} \cup \mathcal{W}_{RR}^{\mathcal{O}}$. Sebbene la dualità di Haag per i doppi coni sia violata per l'algebra $\mathscr{A}$ dei punti fissi di $\mathscr{F}$, si può comunque ottenere una forma più debole di dualità.

Lemma 11 *La rete dei punti fissi $\mathscr{A}$ soddisfa alla dualità per i wedge*

$$\mathscr{A}(\mathcal{W})' = \mathscr{A}(\mathcal{W}')$$

e la dualità essenziale nei settori semplici

$$\mathscr{A}^d(\mathcal{O}) = \mathscr{A}^{dd}(\mathcal{O}).$$

Infatti, la prima affermazione segue da [DHR69a], in quanto anche il complemento spacelike di una regione wedge è ancora un wedge, e quindi è connesso. La seconda affermazione discende dalla dualità per i wedge grazie a

$$\mathscr{A}^d(\mathcal{O}) = \mathscr{A}(\mathcal{O}')' = (\mathscr{A}(\mathcal{W}_{LL}^{\mathcal{O}}) \vee \mathscr{A}(\mathcal{W}_{RR}^{\mathcal{O}}))' = \mathscr{A}(\mathcal{W}_R^{\mathcal{O}}) \wedge \mathscr{A}(\mathcal{W}_L^{\mathcal{O}}),$$

in quanto la località della rete duale è equivalente alla dualità essenziale della rete originaria $\mathscr{A}$.

3.3 Struttura di intrecciamento e abelianità asintotica

Vogliamo adesso stabilire se il braiding emerso in questo modello sia effettivamente una simmetria, utilizzando il metodo proposto in [BDMRSb] per costruire categorie tensoriali simmetriche C^* nel contesto dell'elettrodinamica quantistica. Nell'ambito della teoria del campo libero massivo di Dirac in (1+1)-dimensioni, infatti, non è possibile limitarsi alle tecniche esposte in [DHR71] e [DHR74], in cui si passa dalle rappresentazioni selezionate e dai loro intertwiners agli endomorfismi ed ai loro interwiners, in quanto si fa uso della dualità di Haag, qui violata. Una volta stabilito che gli endomorfismi di una C^*-algebra ed i loro operatori di allacciamento formano una categoria tensoriale, la simmetria poteva essere dedotta analizzando le proprietà di commutazione degli intertwiners. Nel caso di localizzazione in coni di tipo spazio, sebbene gli operatori di allacciamento non appartengano all'algebra delle osservabili, si può costruire comunque una categoria tensoriale simmetrica C^* (Cf. [DR90]). Il metodo proposto in [BDMRSb] si estende anche al caso in cui gli intertwiners non appartengano all'algebra dove agiscono gli endomorfismi, ed a questi ultimi non si richiede necessariamente di essere

localmente interni [3], ma solo asintoticamente interni.
Ovviamente, il nostro modello rientra pienamente in queste ipotesi, in quanto, come già visto, gli intertwiners sono osservabili localizzate in un doppio cono. Ciò che, invece, rende adatto il metodo dell'abelianità asintotica al presente caso è la possibilità di costruire una categoria tensoriale C^* partendo direttamente dalle rappresentazioni senza ricorrere alla dualità di Haag. Ricordiamo qui solo alcune definizioni ed i teoremi che giustificano i calcoli successivi.

Introduciamo due insiemi di reti $\rho_W \mapsto \mathcal{U}_{\rho_W}$ e $\rho_W \mapsto \mathcal{V}_{\rho_W}$ per ogni oggetto ρ_W. Ogni rete è costituita da operatori di allacciamento unitari $U_m \in (\rho_W, \rho_{W_{xm}})$, dove $\rho_{W_{xm}}$ tende puntualmente in norma all'automorfismo identità su $\mathscr{A}$. Si richiede anche la seguente nozione di abelianità asintotica per gli intertwiners:

Definizione 3 (Abelianità asintotica) *Dati gli intertwiners $R \in (\rho_W, \rho_{W'})$ e $S \in (\rho_{\widetilde{W}}, \rho_{\widetilde{W}'})$, e le reti $U_m \in \mathcal{U}_{\rho_W}$, $U'_{m'} \in \mathcal{U}_{\rho_{W'}}, V_n \in \mathcal{V}_{\rho_{\widetilde{W}}}$, $V'_{n'} \in \mathcal{V}_{\rho_{\widetilde{W}'}}$, allora*

$$U'_{m'} R U^*_m \times V'_{n'} S V^*_n - V'_{n'} S V^*_n \times U'_{m'} R U^*_m \longrightarrow 0 \tag{3.33}$$

in norma per $m, m', n, n' \to \infty$.

Infine, l'insieme delle reti deve essere compatibile con i prodotti, nel senso che, $\forall \rho_W, \rho_{W'} \in \Delta$, $\exists U_m \in \mathcal{U}_{\rho_W}$ e $U_{m'} \in \mathcal{U}_{\rho_{W'}}$ tali che $U_m \times U_{m'} \in \mathcal{U}_{\rho_W \rho_{W'}}$ e analogamente per $\mathcal{V}$. La validità simultanea di tutti questi dati, che indichiamo con il termine *braidology*, è di cruciale importanza in quanto fornisce un braiding ε per la sottocategoria piena di End($\mathscr{A}$) generata da Δ. Vale, infatti, il seguente

Teorema 5 *Dati $\rho_W, \rho_{\widetilde{W}} \in \Delta$, allora:*

$$\varepsilon(\rho_W, \rho_{\widetilde{W}}) := \lim_{m,n\to\infty} V^*_n \times U^*_m \; U_m \times V_n$$

esiste, è indipendente dalla scelta di $U_m \in \mathcal{U}_{\rho_W}$ e $V_n \in \mathcal{V}_{\rho_{\widetilde{W}}}$ ed è un elemento di $(\rho_W \rho_{\widetilde{W}}, \rho_{\widetilde{W}} \rho_W)$. Inoltre, se $R \in (\rho_W, \rho_{W'})$ e $S \in (\rho_{\widetilde{W}}, \rho_{\widetilde{W}'})$, si ha:

$$\varepsilon(\rho_{W'}, \rho_{\widetilde{W}'}) \circ R \times S = S \times R \circ \varepsilon(\rho_W, \rho_{\widetilde{W}})$$

e, se $\rho_{\hat{W}} \in \Delta$,

$$\varepsilon(\rho_W \rho_{\widetilde{W}}, \rho_{\hat{W}}) = \varepsilon(\rho_W, \rho_{\hat{W}}) \times \mathbb{1}_{\rho_{\widetilde{W}}} \circ \mathbb{1}_{\rho_W} \times \varepsilon(\rho_{\widetilde{W}}, \rho_{\hat{W}}),$$

$$\varepsilon(\rho_W, \rho_{\widetilde{W}} \rho_{\hat{W}}) = \mathbb{1}_{\rho_{\widetilde{W}}} \times \varepsilon(\rho_W, \rho_{\hat{W}}) \circ \varepsilon(\rho_W, \rho_{\widetilde{W}}) \times \mathbb{1}_{\rho_{\hat{W}}}.$$

[3] Notare che $\widetilde{\Gamma}(W) \notin \mathscr{A}$

Applichiamo la costruzione teorizzata in [BDMRSb] al caso del campo libero massivo di Dirac in (1+1)-dimensioni. In virtù dei calcoli precedenti, rimane da verificare la condizione di abelianità asintotica per poter asserire l'esistenza di una braidology e quindi di un braiding per la nostra categoria. Sulla falsa riga di modelli (2+1)-dimensionali, dove, come regioni di localizzazioni "asintotiche" che compaiono nella definizione delle famiglie $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ possono essere scelti un cono di tipo spazio $\mathcal{C}$ ed il suo opposto $-\mathcal{C}$, scegliamo i due wedges $W_{\pm}$. Poiché in (1+1)-dimensioni vi è una naturale nozione di destra e sinistra, e quindi di $+\infty$ e $-\infty$, possiamo porre, con ovvio significato dei simboli:

$$\mathcal{U}_{\rho_W} := \{(U_a)_a \subset (\rho_W, \rho_{W_a}),\ a \to +\infty)\}$$

$$\mathcal{V}_{\rho_W} := \{(V_b)_b \subset (\rho_W, \rho_{W_b}),\ b \to -\infty)\}$$

dove le due successioni, denotate con gli indici a e b, sono contenute nei wedges W_+, W_- rispettivamente (così le due successioni sono definitivamente contenute nel complemento causale di una qualunque regione limitata). Siano $R : \rho_W \to \rho_{W'}$ e $S : \rho_{\widetilde{W}} \to \rho_{\widetilde{W}'}$, e siano $z, \zeta \in \mathbb{C}$ tali che

$$R = z\,\widetilde{\Gamma}(W'W^*), \quad S = \zeta\,\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'\widetilde{W}^*).$$

L'esistenza di z e ζ con tali proprietà è conseguenza dell' irriducibilità degli endomorfismi coinvolti (infatti, sono automorfismi!), del fatto che $\widetilde{\Gamma}(W_2W_1{}^*)$ è un intertwiner unitario in (ρ_{W_1}, ρ_{W_2}) e, infine, del ben noto

Lemma 12 *Sia $\mathscr{A}$ una C^*-algebra, e siano $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Irr}(\mathscr{A})$. Allora, per ogni $T \in (\pi_1, \pi_2)\backslash\{0\}$, esistono $r > 0$ ed $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ tali che $T = rU$.*

Si è denotato con $\mathscr{H}_j$ lo spazio di Hilbert della rappresentazione π_j, $j = 1, 2$. In base a quanto visto sin'ora, dovendo scegliere opportuni intertwiners $U_m \in \mathcal{U}_{\rho_W}$, $U'_{m'} \in \mathcal{U}_{\rho_{W'}}$, $V_n \in \mathcal{V}_{\rho_{\widetilde{W}}}$, $V'_{n'} \in \mathcal{V}_{\rho_{\widetilde{W}'}}$, possiamo porre:

$$\begin{aligned}
U_m &= \lambda_m \widetilde{\Gamma}(W_{x_m} W^*), & x_m &\xrightarrow{W_+} +\infty \\
U'_{m'} &= \lambda'_{m'} \widetilde{\Gamma}(W'_{x'_{m'}} W'^*), & x'_{m'} &\xrightarrow{W_+} +\infty \\
V_n &= \mu_n \widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n} \widetilde{W}^*), & y_n &\xrightarrow{W_-} -\infty \\
V'_{n'} &= \mu'_{n'} \widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_{n'}} \widetilde{W}'^*), & y'_{n'} &\xrightarrow{W_-} -\infty
\end{aligned}$$

dove $\lambda_m, \lambda'_{m'}, \mu_n, \mu'_{n'} \in \mathbb{C}$ hanno lo stesso significato dello scalare z di cui sopra, per ogni m, m', n, n'. Per definizione di *asymptopia*, infatti, si devono avere: $U_m \in (\rho_W, \rho_{W_{x_m}})$, $S \in (\rho_{W'}, \rho_{W'_{x'_{m'}}})$, $V_n \in (\rho_{\widetilde{W}}, \rho_{\widetilde{W}_{y_n}})$, $V'_{n'} \in (\rho_{\widetilde{W}'}, \rho_{\widetilde{W}'_{y'_{n'}}})$.

Per alleggerire le notazioni scriviamo semplicemente x'_m in luogo di $x'_{m'}$. Quale sia esattamente il termine della successione a cui ci si riferisce apparirà chiaro dal contesto. Analoghe semplificazioni vengono adottate per $y'_{n'}$, $\lambda'_{m'}$ e $\mu'_{n'}$. Dimostriamo dunque l'abelianità asintotica degli intertwiners per il nostro modello, e per questo calcoliamo il primo membro della (3.33), che adesso assume la forma:

$$\begin{gathered}\lambda'_m\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m}W'^*)z\widetilde{\Gamma}(W'W^*)\bar{\lambda}_m\widetilde{\Gamma}(W_{x_m}W^*)^*\times\\ \times\mu'_n\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}'^*)\zeta\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'\widetilde{W}^*)\bar{\mu}_n\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n}\widetilde{W}^*)^*-\\ -\mu'_n\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}'^*)\zeta\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'\widetilde{W}^*)\bar{\mu}_n\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n}\widetilde{W}^*)^*\times\\ \times\lambda'_m\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m}W'^*)z\widetilde{\Gamma}(W'W^*)\bar{\lambda}_m\widetilde{\Gamma}(W_{x_m}W^*)^* =\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}&=\lambda'_m\bar{\lambda}_m z\, C(W'_{x'_m}W'^*,W'W^*)C(W'_{x'_m}W^*,WW^*_{x_m})\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m}W^*_{x_m})\times\\ &\times\mu'_n\bar{\mu}_n\zeta\, C(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}'^*,\widetilde{W}'\widetilde{W}^*)C(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}^*,\widetilde{W}\widetilde{W}^*_{y_n})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}^*_{y_n})-(\leftrightarrow),\end{aligned}\qquad(3.34)$$

dove $(\leftrightarrow)$ denota il prodotto incrociato degli stessi termini che precedono, ma nell'ordine invertito. Si è adottata la notazione $C(A,B)$ per il cociclo della rappresentazione proiettiva $\widetilde{\Gamma}$, ossia: $\widetilde{\Gamma}(W_1)\widetilde{\Gamma}(W_2)=C(W_1,W_2)\widetilde{\Gamma}(W_1W_2)$. Raccogliendo tutti i gli scalari (tra i quali gli stessi cocicli) a fattor comune, e denotato quest'ultimo con q, la (3.34) si riduce alla

$$q\left(\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m}W^*_{x_m})\times\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}^*_{y_n})-\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}^*_{y_n})\times\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m}W^*_{x_m})\right)\qquad(3.35)$$

e pertanto, per studiare il comportamento asintotico della (3.33), è sufficiente calcolare il limite dell'espressione fra parentesi. Infatti, sebbene anche il termine q dipenda dagli indici m,m',n,n', si possono sempre scegliere le successioni numeriche coinvolte in modo tale che q rimanga limitato. A tale scopo, risulta particolarmente conveniente porre $\mathcal{U}_\rho$ come l'insieme delle successioni di unitari $U_a\in(\rho,\rho_a)$ per a che tende spacelike all'infinito rimanendo in W_+ (e analoga definizione per $\mathcal{V}_\rho$, con W_- in luogo di W_+). Pertanto, tale scelta ci permette di dire che $|\lambda_m|=|\lambda'_{m'}|=|\mu_n|=|\mu'_{n'}|$, e quindi non occorre controllare il comportamento al limite di q. Con tali definizioni, tra l'altro, è evidente che la condizione di compatibilità $\mathcal{U}_\rho\mathcal{U}_\sigma=\mathcal{U}_{\rho\sigma}$ è automaticamente soddisfatta. A questo punto, per semplificare la (3.35), osserviamo che

$$\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m}W^*_{x_m}):\rho_{W_{x_m}}\longrightarrow\rho_{W'_{x'_m}},\quad\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}^*_{y_n}):\rho_{\widetilde{W}_{y_n}}\longrightarrow\rho_{\widetilde{W}'_{y'_n}}$$

e quindi la (3.35) si scrive:

$$q\Big(\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m}W^*_{x_m})\widetilde{\Gamma}(W_{x_m})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}^*_{y_n})\widetilde{\Gamma}(W_{x_m})^*-$$

$$-\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n}\widetilde{W}^*_{y_n})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n})\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m}W^*_{x_m})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n})^*\Big) =$$

$$= q'\Big(\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}^*_{y_n})\widetilde{\Gamma}(W_{x_m})^* - \widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n})\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m})\widetilde{\Gamma}(W_{x_m})^*\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}^*_{y_n})\Big).$$

dove

$$q' := q\ \overline{C(W'_{x'_m}, W^*_{x_m})C(\widetilde{W}'_{y'_n}, \widetilde{W}^*_{y_n})}.$$

D'altra parte, si ha definitivamente: $y'_n < x'_m$, $y_n < x_m$ e quindi gli unitari $W'_{x'_m}$ e $\widetilde{W}'_{y'_n}$ sono definitivamente centrati in intervalli disgiunti, ovvero i corrispondenti unitari di implementazione $\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m})$ e $\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y'_n})$ sono definitivamente localizzati in regioni causalmente indipendenti. Siamo quindi autorizzati ad usare le relazioni di commutazione (con cociclo) fra operatori di seconda quantizzazione che, come sappiamo, valgono per coppie di operatori con localizzazioni spazialmente separate. Quindi

$$\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n}) = (-1)^{nn'}e^{-i\pi(n\lambda'+n'\lambda)}\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}'_{y'_n})\widetilde{\Gamma}(W'_{x'_m})$$

ed analogamente per i termini con W in luogo di W' e x_m in luogo di $x_{m'}$. La precedente vale, evidentemente, da un certo valore degli indici m ed n in poi. Infine, sostituendo queste ultime relazioni, si vede che il primo membro della (3.33) è definitivamente nullo e quindi, a fortiori, ha limite zero. Abbiamo dimostrato:

Teorema 6 *La sottocategoria di* End($\mathscr{A}$) *generata da* Δ *ammette una struttura di braiding* ε.

L'operatore ε definito nel Teorema 5 è precisamente l'operatore statistico $\varepsilon(\rho_W, \rho_{W'})$. Infatti, scegliendo le successioni $\{x_m\}_m$ e $\{y_n\}_n$ in modo tale che $\mathcal{O}_{x_m} \succ \mathcal{O}_{y_n}$ definitivamente, da un certo valore (finito) degli indici m ed n in poi si ha:

$$V_n^* \times U_m^*\ U_m \times V_n =$$

$$= \bar{\mu}_n\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}\widetilde{W}^*_{y_n}) \times \bar{\lambda}_m\widetilde{\Gamma}(WW^*_{x_m}) \circ \lambda_m\widetilde{\Gamma}(W_{x_m}W^*) \times \mu_n\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n}\widetilde{W}^*)$$

che, tenuto conto del fatto che i coefficienti numerici sono delle fasi, e scindendo i prodotti (i cocicli si elidono), diventa:

$$\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}\widetilde{W}^*_{y_n})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n})\widetilde{\Gamma}(WW^*_{x_m})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}^*_{y_n})\widetilde{\Gamma}(W_{x_m}W^*)\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n}\widetilde{W}^*)\widetilde{\Gamma}(W)^* =$$

$$= \widetilde{\Gamma}(\widetilde{W})\widetilde{\Gamma}(W)\widetilde{\Gamma}(W_{x_m})^*\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n})^*\widetilde{\Gamma}(W_{x_m})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}_{y_n})\widetilde{\Gamma}(\widetilde{W}^*)\widetilde{\Gamma}(W^*). \qquad (3.36)$$

Ma la (3.36) è esattamente l'espressione di $\varepsilon(\rho_W, \rho_{\widetilde{W}})$ ottenuta trasportando ρ_W e $\rho_{\widetilde{W}}$ in $\rho_{W_{x_m}}$ e $\rho_{\widetilde{W}_{y_n}}$ rispettivamente (tale espressione non dipende da x_m o da y_n). Quindi, la struttura di intrecciamento stabilita con l'ausilio della teoria dell'abelianità asintotica coincide con l'operatore statistico $\varepsilon(\rho_W, \rho_{\widetilde{W}})$ costruito in precedenza a partire dalla sua stessa definizione così come viene data nella teoria algebrica dei campi quantistici (in bassa dimensione). È evidente che anche nella presente costruzione possiamo ottenere entrambi gli operatori statistici $\varepsilon(\rho,\sigma)$ e $\varepsilon(\sigma,\rho)^*$, purché si scambino il ruolo delle due successioni $\{x_m\}_m$ e $\{y_n\}_n$ al fine di traslare verso $+\infty\,(-\infty)$ l'automorfismo che nel caso precedente era stato traslato verso $-\infty\,(+\infty)$.

Osservazione. $\widetilde{\Gamma}(W) \notin \mathscr{A}$, in quanto non è gauge invariante. Pertanto, gli automorfismi ρ_W dell'algebra delle osservabili $\mathscr{A}$ non sono interni. Ciò giustifica il ricorso alla teoria dell'abelianità asintotica (condizione che, come dimostrato, qui è verificata) per stabilire se gli oggetti costruiti con i metodi "classici" dell'AQFT possano configurare una vera e propria struttura di braiding e dare un autentico significato di statistica alla rappresentazione 1-dimensionale del gruppo delle trecce qui costruita.

Un altro motivo per cui $\widetilde{\Gamma}(W)$ non può essere un elemento di $\mathscr{A}$ è data dalla seguente osservazione. Sia $W = W(n,\lambda)$, con $n \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R}$ arbitrari. Ovviamente,

$$\rho_W(A) = \widetilde{\Gamma}(W)A\widetilde{\Gamma}(W)^* = \widetilde{\Gamma}(W)\rho_{\mathbb{1}}(A)\widetilde{\Gamma}(W)^*.$$

Supponiamo che $\widetilde{\Gamma}(W) \in \mathscr{A}$. Allora $\rho_W \simeq \rho_{\mathbb{1}}$ e quindi dovrebbe risultare

$$\varepsilon_{\rho_W} = \varepsilon_{\rho_{\mathbb{1}}} \equiv \varepsilon_{id} = \mathbb{1}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

il che è assurdo. Pertanto, $\widetilde{\Gamma}(W) \notin \mathscr{A}$ (ad eccezione, ovviamente, del caso banale $W = \mathbb{1}$).

A questo punto facciamo un'ulteriore precisazione. Sebbene ogni coppia di automorfismi della forma ρ_W sia legata da una relazione di "similitudine" (ovvero, $\rho_{W_2} = Ad_{\widetilde{\Gamma}(W_2W_1^*)} \circ \rho_{W_1}$) ciò non significa che essi sono unitariamente equivalenti tramite un elemento locale dell'algebra delle osservabili, perché l'intertwiner unitario non è necessariamente un elemento dell'algebra $\mathscr{A}$. Più precisamente, se $(n_1,\lambda_1) \neq (n_2,\lambda_2)$, allora $\widetilde{\Gamma}(W_1W_2^*) \notin \mathscr{A}$. Questa è un'ovvia conseguenza dell'osservazione precedente, non appena si noti che gli unitari della forma $W(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\,\varepsilon)$ sono chiusi rispetto al prodotto ed al passaggio all'aggiunto (ovvero, costituisco un gruppo): $W(n,\lambda)W(n',\lambda') = W(n+n',\lambda+\lambda')$, $W(n,\lambda) = W(-n,-\lambda)$. Invece, come dobbiamo attenderci, W_xW^* non rientra in questi casi. Infatti,

$$W(n,\lambda;\varepsilon)_x W(n,\lambda;\varepsilon)^* = W(n,\lambda;\tau_x\varepsilon - \varepsilon)$$

e, come è stato dimostrato,

$$\widetilde{\Gamma}(W_xW^*) \in \mathscr{A}(\tilde{\mathcal{O}}), \text{ dove } \tilde{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_x. \tag{3.37}$$

In effetti, se provassimo a ripetere per $\widetilde{\Gamma}(W)$ la dimostrazione che ha portato alla (3.37) ben presto ci accorgeremmo che questa non funziona per un qualunque W, perché si otterrebbe

$$(Wf)(x) = e^{i\pi\lambda\varepsilon(x)}\big(e^{i\pi n\varepsilon(x)}f_+(x), f_-(x)\big)$$

per qualunque funzione f tale che $\mathrm{supp}(f) \subset B_{\mathcal{O}_1}$, $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'$.

L'intrecciamento determinato da questa "braidology" non è una simmetria. Infatti, perché la condizione di abelianità asintotica sia verificata, occorre che le due successioni di doppi coni $\mathcal{O}_m^{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{O}_n^{\mathcal{V}}$ usate in $\mathcal{U}_{\rho_W}$ e $\mathcal{V}_{\rho_W}$ appartengano a componenti distinte di $\mathcal{O}'$, perché solo così si può realizzare la condizione che $\mathcal{O}_m^{\mathcal{U}} - \mathcal{O}_n^{\mathcal{V}}$ tenda spazialmente all'infinito per $m, n \to \infty$. In effetti, si nota immediatamente che in (1+1) dimensioni non c'è alternativa. Le due "braidologie" $\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}$ e $\{\mathcal{V}, \mathcal{U}\}$, però, non possono appartenere alla stessa componente connessa per cammini (equivalentemente, le due braidologie non possono essere *mutuamente cofinali*). In (3+1) dimensioni il problema non sussiste, in quanto possiamo porre, nel caso di morfismi strettamente localizzati, $\mathcal{O}_n^{\mathcal{V}} = -\mathcal{O}_n^{\mathcal{U}}$, e quindi è possibile passare con continuità da $\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}$ a $\{\mathcal{V}, \mathcal{U}\}$ attraverso un cammino costituito da una catena di doppi coni adiacenti intersecantesi a due a due. In (2+1) dimensioni, dove la migliore nozione di localizzazione è fornita dai coni, si può scegliere ρ_a in modo tale che a tenda all'infinito di tipo spazio rimanendo entro un cono spacelike $\mathcal{C}$, per $\mathcal{U}_\rho$, e $-\mathcal{C}$ per $\mathcal{V}_\rho$. È chiaro che, sostituendo nella definizione di braidology il cono $\mathcal{C}$ con un cono spacelike più piccolo $\mathcal{C}_1$, rimaniamo nella stessa componente connessa per cammini. Analogamente se $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_1 \neq \emptyset$. Pertanto, si può scambiare $\mathcal{C}$ con $-\mathcal{C}$ attraverso una successione di coni di tipo spazio che si intersecano a due a due. Ciò non è più possibile in (1+1) dimensioni, perché $\mathcal{O}'$ non è connesso e quindi non è connesso per cammini.

Conclusioni

Nel contesto della Teoria Algebrica dei Campi Quantistici abbiamo costruito una famiglia di automorfismi di $\mathscr{A}$ localizzati e trasportabili che esibiscono statistiche delle trecce. All'interno di ogni settore si ha, per ogni valore del parametro λ, una struttura di braiding differente, indotta da operatori kink che non portano carica ma che alterano la statistica degli automorfismi con cui vengono composti. La non località dei portatori di carica è all'origine del fatto che la statistica non è più un invariante del settore, fenomeno già manifestatosi in teorie di particelle (1+1)-dimensionali o in ambito solitonico. Alla sottostante struttura ordinaria, gli operatori kink sovrappongono una famiglia continua di categorie tensoriali intrecciate, nel senso più ampio che tale termine assume nell'ambito della teoria delle "braidologie". Tali risultati non sono in contrasto con quanto ampiamente acquisito in AQFT, in virtù della non località degli implementatori unitari del nostro modello e della violazione della dualità di Haag, unitamente alla particolarità topologica dello spazio-tempo bidimensionale, che pone un limite all'utilizzo di alcuni risultati della teoria quantistica locale, aprendo la possibilità ad una più vasta gamma di situazioni intermedie. Si ha quindi un modello concreto di statistiche anioniche, in cui trova conferma, tra le altre, l'idea che in (1+1)-dimensioni la statistica non è, a priori, una caratteristica intrinseca dei settori. L'interpretazione della struttura di braiding di questo modello fermionico estende alle algebre CAR il metodo di costruzione di categorie tensoriali intrecciate [BDMRSa] precedentemente impiegato nella trattazione dell'algebra di Weyl in ambito CCR. Implicitamente, l'analisi di una teoria che viola la dualità di Haag porta inevitabilmente a riconsiderare alcuni argomenti fondamentali che stanno alla base della teoria algebrica dei campi quantistici, spesso legati in modo inscindibile alla dualità di Haag (alla cui mancanza talvolta si può supplire con l'ausilio di argomenti specifici inerenti al modello in esame), precisandone il campo di applicabilità (quali, per esempio, la chiusura della statistica rispetto alla composizione di cariche e la dipendenza del parametro statistico dai rappresentanti del settore).

RINGRAZIAMENTI. Desidero ringraziare il Prof. Sergio Doplicher per i preziosi consigli e per la pazienza con cui ha seguito e partecipato allo sviluppo di questo lavoro. I suoi continui incoraggiamenti, specialmente nei momenti più difficili, sono risultati oltremodo graditi. Ringrazio il coordinatore del Dottorato, Prof. Alessandro Silva, per la fiducia accordatami e per avermi consentito di portare a termine questo lavoro di tesi presso il Dipartimento di Matematica.

Appendice A

Proprietà degli operatori di creazione e di distruzione

Dimostriamo alcune proprietà utilizzate nelle dimostrazioni dei teoremi.

Lemma 13 *Le corrispondenze $f \mapsto c^*(f)$ e $f \mapsto c(f)$ sono isometriche.*

Dimostrazione. Essendo l'una l'aggiunta dell'altra, è sufficiente dimostrare la tesi per $c^*(f)$.

Partendo dalle ovvie identità:

$$\|c(f)g\|^2 + \|c^*(f)g\|^2 = < c^*(f)c(f)g, g > + < c(f)c^*(f)g, g >=$$
$$=< \{c(f), c^*(f)\}g, g >= \|f\|^2\|g\|^2, \tag{A.1}$$

si ricava $\|c^*(f)\| \leq \|f\|$.

D'altra parte, $c^*(f)\Omega = f$, da cui $\|c^*(f)\Omega\| = \|f\| = \|f\|\|\Omega\|$, e quindi $\|c^*(f)\| = \|f\|$.

□

Osservazione. Volendo dimostrare direttamente che $\|c(f)\| = \|f\|$, osservo che dalla (A.1) si ricava $\|c(f)\| \leq \|f\|$; inoltre, $c(f)f = c(f)c^*(f)\Omega = \|f\|^2\Omega$, e quindi $\|c(f)f\| = \|f\|^2$, da cui la tesi.

Forniamo una dimostrazione alternativa e più diretta del lemma precedente:

Dimostrazione diretta. Valutando l'operatore di creazione $c^*(f)$ sul generico spazio componente $\wedge^n\mathscr{H}$, e ricorrendo alle relazioni di anticommutazione, si ha:

$$\|c^*(f)c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega\|^2 = (c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega, c(f)c^*(f)c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega) =$$
$$\|f\|^2\|c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega\|^2 - (c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega, c^*(f)c(f)c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega)$$
$$\leq \|f\|^2\|c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega\|^2, \tag{A.2}$$

e quindi $\|c^*(f)\| \leq \|f\|$. Per esibire un vettore che renda quest'ultima una uguaglianza, basta scegliere una famiglia $\{f_i\}_{i=1}^n$ di vettori linearmente indipendenti ed ortogonali ad f. Se $\mathcal{H}$ ha dimensione infinita, questo lo si può fare per qualsiasi n, altrimenti si pone $n = \dim\mathscr{H} - 1$. Con tali scelte, il prodotto scalare al secondo membro della (A.2) è nullo, in quanto

$$c(f)c^*(f_1)\cdots c^*(f_n)\Omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(f,f_i)\,c^*(f_1)\cdots\widehat{c^*(f_i)}\cdots c^*(f_n)\Omega = 0.$$

Notiamo che nel caso $N = 1$ non c'è nulla da dimostrare, in quanto $\|c^*(f)\Omega\|^2 \equiv \|f\|^2 \equiv \|f\|^2\|\Omega\|^2$.

□

Proposizione 11 *La rappresentazione di Fock* $\pi(\phi(f)) = c(P_+f) + c(\overline{P_-f})^*$ *è fedele.*

Dimostrazione. Sia $\pi(\phi(f)) = 0$. Poiché $\pi(\phi(f))\Omega = c(P_+f)\Omega + c^*(\overline{P_-f})\Omega = c^*(\overline{P_-f})\Omega = \overline{P_-f}$, si ha $P_-f = 0$. Dunque $\pi(\phi(f)) = c(P_+f)$ e poiché la corrispondenza $g \mapsto c(g)$ è iniettiva (in quanto isometrica), risulta anche $P_+f = 0$. Pertanto, $f = 0$, ovvero $\phi(f) = 0$.

□

Lemma 14 *La corrispondenza* $\mathcal{U}(\mathscr{H}) \to \mathcal{U}(\mathcal{F}_a\mathscr{H})$ *che associa ad* U *l'operatore* $\widetilde{\Gamma}(U)$ *conserva l'involuzione, ovvero:* $\widetilde{\Gamma}(U)^* = \widetilde{\Gamma}(U^*)$.

Dimostrazione Con le notazioni $U_{\delta\delta'} := P_\delta U P_{\delta'}$, $\delta, \delta' = +, -$, e $\bar{U} = JUJ$, si calcolano immediatamente gli aggiunti:

$$(U^*)_{\delta\delta} = (U_{\delta\delta})^*,\ (U^*)_{\delta\,-\delta} = (U_{-\delta\,\delta})^*,\ (\bar{U})^* = \overline{U^*}.$$

Poiché $\Gamma(A^*) = \Gamma(A)^*$, si ha:

$$\widetilde{\Gamma}(U^*) = \Gamma(U^*_{++})\Gamma(\bar{U}^*{}_{--}) \equiv \Gamma(U^*_{++} \oplus \mathbb{1})\Gamma(\mathbb{1} \oplus \bar{U}^*_{--}) =$$

$$= \Gamma(U_{++} \oplus \mathbb{1})^*\Gamma(\mathbb{1} \oplus \bar{U}_{--})^* = (\Gamma(\mathbb{1} \oplus \bar{U}_{--})\Gamma(U_{++} \oplus \mathbb{1}))^*. \qquad \text{(A.3)}$$

Infine, poiché Γ è ovviamente moltiplicativo (ossia, $\Gamma(AB) = \Gamma(A)\Gamma(B)$) e poiché $\mathbb{1} \oplus \bar{U}_{--}$ e $U_{++} \oplus \mathbb{1}$ commutano, la (A.3) è anche uguale, nella notazione abbreviata, a

$$(\Gamma(U_{++})\Gamma(\bar{U}_{--}))^* \equiv \widetilde{\Gamma}(U)^*.$$

□

Appendice B

Dualità twisted per i campi liberi di Fermi

La località è uno dei principi fondamentali della teoria dei campi quantistici e stabilisce che osservabili localizzate in regioni spazialmente separate devono commutare. La dualità rafforza questo principio, richiedendo che osservabili che commutano con tutte le osservabili localizzate nel complemento space-like $\mathcal{O}'$ di $\mathcal{O}$ devono essere a loro volta localizzate in $\mathcal{O}$. In termini di algebre di von Neumann locali $\mathscr{A}(\mathcal{O})$ generate dalle osservabili localizzate in $\mathcal{O}$, tale principio si esprime identificando le due algebre: $\mathscr{A}(\mathcal{O}) = \mathscr{A}(\mathcal{O}')'$. La dualità gioca un ruolo cruciale nella teoria dei settori di superselezione (Cf. [DHR69a], [DHR69b]), per cui diventa importante sapere per quali modelli vale la dualità. Il primo passo consiste nello studiare questa proprietà per le teorie di campo libero. In effetti, per le teorie con interazione i risultati sono limitati ad uno spazio-tempo bidimensionale e si basano sui corrispondenti risultati per i campi liberi (Cf. [Sum]). La dimostrazione della dualità per i campi liberi di Bose, così come venne data inizialmente da Araki (Cf. [Ara63]), si suddivide in due parti. Come primo passo, si dimostra che il commutante dell'algebra di von Neumann $R(M)$ generata dagli operatori di Weyl basati su un sottospazio reale chiuso M dello spazio di Hilbert di una particella è $R(M')$, dove M' denota il complemento simplettico di M. Tale dimostrazione venne successivamente semplificata da Eckmann e Osterwalder (Cf. [EO]), grazie alla teoria di Tomita-Takesaki, identificando l'involuzione antiunitaria J associata allo stato del vuoto di $R(M)$ con la seconda quantizzazione di un' involuzione antiunitaria j sullo spazio di una particella. Un'ulteriore semplificazione (Cf. [LRT]) consiste nell' identificare l' involuzione antilineare S con la seconda quantizzazione di un' involuzione antilineare s sullo spazio di una particella. Altre versioni di questa prima parte di dimostrazione vennero fornite in (Cf. [Del]), usando prodotti tensoriali infiniti, ed in (Cf. [Rie]), usando un teorema di commutazione astratto. La seconda parte della dimostrazione di Araki (Cf. [Ara64]) caratterizza i sottospazi reali chiusi $M(\mathcal{O})$ associati alla regione $\mathcal{O}$ dello spazio-tempo per il campo scalare libero di Bose e stabilisce che, per una vasta classe di regioni, $M(\mathcal{O})' = M(\mathcal{O}')$. Nel nostro caso, naturalmente, il concetto di dualità deve essere modificato e adattato alla caratteristica anticommutatività dei campi fermionici. Il concetto appropriato, la *dualità twisted*, venne introdotto in [DHR69a] dove, tra l'altro, venne dimostrato che implica la dualità per le algebre delle osservabili. In questa appendice utilizzeremo le idee esposte in [LRT] per dimostrare che se $R(M)$ è l'algebra di von Neumann generata dai campi di Fermi con base su un sottospazio reale chiuso M dello spazio di una particella allora

$$R(M)^{\tau} = R(iM')$$

dove $R(M)^{\tau}$ si ottiene da $R(M)$ applicando una trasformazione di Weyl.

B.1 Sottospazi reali di uno spazio di Hilbert complesso

Riportiamo qui alcune definizioni e proposizioni utilizzate in seguito.

Definizione 4 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert complesso, con prodotto scalare $h, k \to (h, k)$, M un sottoinsieme di $\mathcal{H}$.*

$$M' = \{k \in \mathcal{H} : Im(h, k) = 0,\ h \in M\}$$

è il complemento simplettico *di M.*

Proposizione 12 *Sia M un sottoinsieme di $\mathcal{H}$. Allora:*

(i) *M' è un sottospazio reale chiuso di $\mathcal{H}$.*

(ii) *Se $M \subset N$, allora $N' \subset M'$.*

(iii) *M'' è il sottospazio reale chiuso generato da M.*

(iv) $(M + iM)' = M' \cap iM' = M^{\perp}$

(v) *$M' = \{0\}$ se M è denso in $\mathcal{H}$.*

(vi) *Se M è un sottospazio reale chiuso di $\mathcal{H}$ e P un proiettore ortogonale in $\mathcal{H}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

$PM \subset M$,
$(\mathbb{1} - P)M \subset M$,
$PM' \subset M'$,

$(\mathbb{1} - P)M' \subset M'$.

Se una di queste è vera, allora

$$PM' = (PM)' \cap P\mathcal{H}.$$

Definizione 5 *Un sottospazio reale chiuso M in $\mathcal{H}$ è detto* standard *se $M \cap iM = \{0\}$ e $\overline{M + iM} = \mathcal{H}$. Se M è standard, la mappa*

$$s(h + k) = h - ik, \quad h, k \in M$$

è detta involuzione canonica *di M.*

La proposizione seguente fornisce una prima relazione tra le proprietà dell'operatore s e la struttura di sottospazio reale, che risulta utile nella dimostrazione della dualità twisted.

Proposizione 13 *Sia M standard. Allora:*

i) *L'involuzione canonica s di M è un' involuzione antilineare densamente definita e chiusa.*

ii) *M' è standard e l'involuzione canonica di M' è s^*.*

iii) *Se $s = j\delta^{1/2}$ è la decomposizione polare di s, allora $j^2 = \mathbb{1}$, $j\delta^{1/2} = \delta^{-1/2}j$ e $j(M) = M'$.*

iv) *Se P un proiettore ortogonale in $\mathcal{H}$ tale che $PM \subset M$, allora PM $((\mathbb{1} - P)M)$ è standard in $P\mathcal{H}$ $((\mathbb{1} - P)\mathcal{H})$.*

La proposizione seguente dimostra che è sufficiente studiare sottospazi reali standard.

Proposizione 14 *Sia M un sottospazio reale chiuso di $\mathcal{H}$. Siano P_1 (rispettivamente P_2) i proiettori ortogonali sui sottospazi complessi ortogonali ad M (rispettivamente ad M'). Allora:*

i) *$P_1P_2 = 0$ e quindi $P_3 = \mathbb{1} - P_1 - P_2$ è un proiettore ortogonale in $\mathcal{H}$.*

ii) *$P_1M = \{0\}$, $P_1M' = P_1\mathcal{H}$.*

iii) *$P_2M' = \{0\}$, $P_2M = P_2\mathcal{H}$.*

iv) *P_3M è standard in $P_3\mathcal{H}$.*

v) *$P_3M' = (P_3M)' \cap P_3\mathcal{H}$.*

B.2 Algebre di von Neumann associate a sottospazi reali

Definizione 6 *Sia* $M \subset \mathcal{H}$ *un sottospazio reale chiuso di* $\mathcal{H}$. *Denotiamo con* $\psi(h)$ *il generico campo di Fermi sullo spazio di Fock* $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$. $R(M)$ *è l'algebra di von Neumann generata da* $\psi(h)$.

I generatori $\psi(h)$ di $R(M)$ soddisfano relazioni di anticommutazione, al contrario dei campi di Bose. Quindi, occorre modificare la nozione di dualità per l'algebra dei campi. A tale scopo si considera dappprima un automorfismo su $R(M)$ che separi la struttura fermionica da quella bosonica. La trasformazione $\psi(h) \to -\psi(h)$ si estende ad un unico automorfismo γ su $R(M)$:

$$\gamma(F) = F \quad \text{se } F \in R_+(M),$$
$$\gamma(F) = -F \quad \text{se } F \in R_-(M).$$

$R_\pm(M)$ è generato dai prodotti di un numero pari (dispari) di $\psi(h)$. Poiché lo stato di Fock è $\gamma-$invariante, esiste un operatore unitario U su $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ con le seguenti proprietà:

$$U\Omega = \Omega,$$
$$\gamma(F) = UFU^*,\ F \in R(M), \quad U^* = U^{-1} = U.$$

Per i campi liberi qui considerati possiamo scegliere $U = e^{i\pi N}$, dove N è l'operatore *numero di particelle*. Pertanto, ogni $F \in R(M)$ può essere decomposto nella forma

$$F = F_+ + F_-,$$

dove

$$F_\pm = \frac{1}{2}(F \pm \gamma(F)).$$

Definizione 7 *L'algebra twisted è*

$$R(M)^\tau = \{F_+ + iF_-U : F \in R(M)\}.$$

Proposizione 15 *Con le definizione date,*

i) *La corrispondenza* $F \to F_+ + iF_-U$ *definisce un isomorfismo di* $R(M)$ *su* $R(M)^\tau$ *implementato dall'operatore unitario* $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} - iU)$.

ii) $R(M)^{\tau\tau} = R(M)$.

iii) $R(M)'^{\tau} = R(M)^{\tau\prime}$.

iv) $R(iM') \subset R(M)^{\tau\prime}$ *(località twisted).*

Dimostrazione.

i) si dimostra con un semplice calcolo.

ii) segue dall'equazione $V^2 F V^{*2} = F_+ - F_-$.

iii) è una conseguenza dell'unitarietà di V.

iv) Sia $F = F_+ + F_- \in R(M)$ e $F' = F'_+ + F'_- \in R(iM')$. I termini della somma soddisfano alle seguenti relazioni:

$$[F_+, F'_\pm] = 0, \quad \{F_-, F'_-\} = 0,$$

ovvero

$$[F', VFV^*] = 0,$$

e quindi si ha:

$$R(iM') \subset R(M)^{\tau\prime}.$$

□

Teorema 7 *Siano $M_\alpha \subset \mathcal{H}$, $\alpha \in I$, sottospazi reali chiusi di $\mathcal{H}$, e $R(M_\alpha)$ le algebre di von Neumann ad essi associate. $R(M)$ fornisce un isomorfismo tra il reticolo dei sottospazi reali ed il sottoreticolo delle algebre di von Neumann:*

i) $R(M_1) \subset R(M_2)$ *se e solo se* $M_1 \subset M_2$.

ii) $R(M_1) = R(M_2)$ *se e solo se* $M_1 = M_2$.

iii) *Sia* $\bigvee_\alpha M_\alpha = \overline{\sum_\alpha M_\alpha}$ *la chiusura dell'insieme di tutte le combinazioni lineri reali finite. Allora si ha:*

$$R(\vee_\alpha M_\alpha) = \bigvee_\alpha R(M_\alpha).$$

iv) $R(\bigcap_\alpha M_\alpha) = \bigwedge_\alpha R(M_\alpha)$.

v) $R(M)^{\prime\tau} = R(iM')$ *(dualità twisted).*

Per dimostrare l'ultimo punto, che è poi il risultato principale, si ricorre ad alcune proposizioni di carattere tecnico. Enunciamole brevemente:

Proposizione 16 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert complesso, M un sottospazio reale chiuso di $\mathcal{H}$.*

i) $\Omega \in \mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ *è un vettore ciclico per* $R(M)$ *se e solo se* $M + iM$ *è denso in* $\mathcal{H}$.

ii) Ω *è un vettore separante per* $R(M)$ *se e solo se* $M \cap iM = \{0\}$.

Quindi, se M è standard in $\mathcal{H}$, Ω è un vettore ciclico e separante di $R(M)$, e pertanto si può applicare la teoria di Tomita-Takasaki. Dunque, si consideri il seguente operatore antilineare, densamente definito e chiuso

$$S_0 : R(M)\Omega \to R(M)\Omega, \quad S_0 A\Omega = A^*\Omega, \quad A \in R(M).$$

La decomposizione polare della chiusura $\bar{S}_0 = S = J\Delta^{1/2}$ fornisce l'operatore di Tomita-Takesaki J con la proprietà $JR(M)J = R(M)'$. Per studiare le relazioni che legano S e J con gli operatori s e j, introduciamo la seguente

Definizione 8 *Denotiamo con* $\mathscr{D}(s)$ *il dominio dell'operatore* s*, e con* $\wedge_n\mathscr{D}(s)$ *l'insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori della forma* $h_1 \wedge \cdots \wedge h_n$, $h_j \in \mathscr{D}(s)$. *Indichiamo con* $\Gamma_n(is)$*, per* $n = 1, 2, \cdots$*, la chiusura dell'operatore* $\otimes^n(is)$ *su* $\wedge_n\mathscr{D}(s)$. *Definiamo:*

$$\tilde{S} := e^{-i(\pi/4)}V^*\Gamma(is), \quad \Gamma(is) := \oplus_{n=1}^{\infty}\Gamma_n(is).$$

Proposizione 17 *Se* $s = j\delta^{1/2}$ *è la decomposizone polare di* s*, allora* $\Gamma(s) = \Gamma(j)\Gamma(\delta^{1/2})$ *è la decomposizione polare di* $\Gamma(s)$.

Dimostrazione. Cf. [LRT].

La seguente proposizione, infine, permette di completare la dimostrazione del teorema.

Proposizione 18 *Sia* $R_0(M)$ *l'algebra involutiva generata dai polinomi di* $\psi(h)$, $h \in M$*, con* M *standard in* $\mathcal{H}$.

i) $R_0(M)\Omega$ *è un core per* S *e* $\tilde{S}$.

ii) $S|_{R_0(M)\Omega} = \tilde{S}|_{R_0(M)\Omega}$.

Appendice C

Statistiche ordinarie e statistiche delle trecce

Come è noto, la simmetria di una funzione d'onda ad una componente $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ è descritta da una rappresentazione 1-dimensionale del gruppo $\mathcal{S}_n$ delle permutazioni, dando luogo alle statistiche di Bose o di Fermi. Funzioni d'onda a più componenti, corrispondenti a particelle con numeri quantici interni, si possono trasformare in accordo a rappresentazioni di dimensione superiore che corrispondono alle parastatistiche. Se si considerano funzioni d'onda a più valori, lo scambio di due argomenti x e y può dipendere dalla classe di omotopia del cammino lungo il quale x e y vengono scambiati, dando così luogo ad una rappresentazione del gruppo delle trecce $\mathcal{B}_n$ ad n stringhe.

$\mathcal{B}_n$ venne definito da Artin nel 1925 come il gruppo con $n-1$ generatori $b_1, \ldots, b_{n-1}$ (b_i intreccia la stringa i con la stringa $i+1$) che soddisfano alle relazioni:

$$\begin{aligned} b_i b_j &= b_j b_j, & |i-j| \geq 2, \\ b_i\, b_{i+1} b_i &= b_{i+1} b_i\, b_{i+1}, & i = 1, \ldots, n-2. \end{aligned}$$

Sia $\sigma : \mathcal{B}_n \to \mathcal{S}_n$ l'omomorfismo di gruppi definito da

$$\sigma(b_i) = \sigma_i, \qquad \sigma_i^2 = \mathbb{1}(\in \mathcal{S}_n), \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{C.1}$$

dove σ_i sono le trasposizioni $(i\; i+1)$ che generano $\mathcal{S}_n$. Il nucleo $\mathcal{P}_n$ di questo omomorfismo è detto *gruppo di monodromia* o *gruppo puro delle trecce*. Notiamo che l'elemento

$$c_n := (b_1 b_2 \ldots b_{n-1})^n \tag{C.2}$$

genera il centro di $\mathcal{B}_n$.

Il gruppo delle trecce $\mathcal{B}_n$ ed il sottogruppo invariante $\mathcal{P}_n$ ammettono un'interpretazione topologica. Consideriamo la varietà $n-$dimensionale

$$Y_n = \mathbb{C}^n \backslash \mathrm{Diag} \equiv \{\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : i \neq j \Rightarrow z_i \neq z_j\} \tag{C.3}$$

(in un contesto diverso dal nostro quale è rappresentato dalla teoria del campo conforme chirale, Y_n è il dominio di analiticità dei blocchi conformi ad n punti). Il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$ agisce su Y_n permutando le coordinate. Lo spazio quoziente $X_n = Y_n/\mathcal{S}_n$ è lo *spazio delle configurazioni di n punti* in $\mathbb{C}^n$, ovvero lo spazio delle configurazioni di n particelle identiche. Vale la seguente

Proposizione 19 *Il gruppo delle trecce $\mathcal{B}_n$ è isomorfo al gruppo fondamentale $\pi_1(X_n, \vec{z}_0)$ dello spazio delle configurazioni (dove, per esempio, $\vec{z}_0 = (n, \dots, 1)$). Analogamente, $\mathcal{P}_n \simeq \pi_1(Y_n, \vec{z}_0)$.*

Chiaramente, sostituendo il piano complesso $\mathbb{C}$ con uno spazio $s-$ dimensionale $\hat{\mathcal{R}}^s$ per $s \geq 3$, il gruppo fondamentale $\pi_1((\hat{\mathcal{R}}^s)^{\otimes n} \setminus \mathrm{Diag}\ , \vec{z}_0)$ potrebbe essere banale, e da esso potrebbe non essere possibile ricavare relazioni interessanti con il gruppo delle trecce. Questa semplice osservazione topologica è alla base del motivo per cui, in bassa dimensione, vi è maggiore possibilità di statistiche generalizzate.

Appendice D

Categorie monoidali simmetriche

Siano $\mathfrak{U} \subset \mathcal{B}$ algebre C^* con unità I tali che il commutante relativo sia triviale:

$$\mathfrak{U}' \cap \mathcal{B} = \mathbb{C} \cdot I. \tag{D.1}$$

Se ρ è un endomorfismo unitale di $\mathfrak{U}$ definiamo

$$H = \{\psi \in \mathcal{B} \,|\, \psi A = \rho(A)\psi, \ A \in \mathfrak{U}\}. \tag{D.2}$$

Allora H è uno spazio di Hilbert in $\mathcal{B}$: infatti, è un sottospazio vettoriale chiuso in norma e

$$\psi^*\psi' \in \mathfrak{U}' \cap \mathcal{B} = \mathbb{C} \cdot I; \quad \psi, \psi' \in H \tag{D.3}$$

per cui $\psi^*\psi' = (\psi, \psi') \cdot I$ definisce un prodotto scalare su H la cui norma coincide con la norma su $\mathfrak{U}$ in virtù dell' identità C^*. Se un sottogruppo G di Aut$\mathcal{B}$ lascia fissi gli elementi di $\mathfrak{U}$, lascia H globalmente stabile per la (D.2) e, per la (D.3), H induce una rappresentazione unitaria u_ρ di G:

$$u_\rho(g)\psi = g(\psi), \quad g \in G, \ \psi \in H. \tag{D.4}$$

L'endomorfismo ρ è detto *interno in* $\mathcal{B}$ se lo spazio di Hilbert associato H ha annichilatore a sinistra zero. Se H ha dimensione finita (o se $\mathfrak{U}$ è algebra di von Neumann) i proiettori finali degli elementi $\psi \in H$ hanno un l.u.b. $I_H \in \mathfrak{U}$, il *supporto* di H, e ρ interno in $\mathcal{B}$ equivale a $I_H = I$. Sia $\mathfrak{U}$ l'insieme dei punti fissi di $\mathcal{B}$ rispetto all'azione di G:

$$\mathfrak{U} = \mathcal{B}^G; \tag{D.5}$$

la corrispondenza $\rho \to u_\rho$ può essere vista come un isomorfismo di categorie se ristretta agli endomorfismi unitali il cui spazio di Hilbert H_ρ ha dimensione finita con supporto I. Ricordiamo la definizione della categoria monoidale End$\mathfrak{A}$. Gli oggetti sono gli endomorfismi unitali di $\mathfrak{A}$. Le frecce fra due oggetti ρ, σ sono

$$(\rho, \sigma) = \{T \in \mathfrak{A} \,|\, T\rho(A) = \sigma(A)T, \quad A \in \mathfrak{A}\}. \tag{D.6}$$

Le operazioni monoidali sono, per gli oggetti, la composizione di mappe, mentre per le frecce, se $R \in (\rho, \rho'), S \in (\sigma, \sigma')$, si definisce

$$R \times S \in (\rho\sigma, \rho'\sigma'), \quad R \times S = R\rho(S). \tag{D.7}$$

Queste operazioni sono strettamente associative e compatibili con la composizione di mappe, la norma e l'aggiunto $*$, per cui End$\mathfrak{A}$ è una *categoria monoidale stretta* C^*, in cui l'unità monoidale è l'automorfismo identità.

Denotiamo con $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ la sottocategoria piena [1] di End$\mathfrak{A}$ che ha come oggetti gli endomorfismi ρ per i quali H_ρ ha dimensione finita con supporto I. Se $T \in (\rho, \sigma)$, si ha

$$TH_\rho \subset H_\sigma; \quad g(T\psi) = Tg(\psi), \tag{D.8}$$

come si ricava dalle (D.1), (D.5), (D.6), e quindi $T \in (u_\rho, u_\sigma)$. Inoltre, $\rho \to u_\rho, T \to T$ è un funtore di $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ sulla sottocategoria di Rep$G$. Gli operatori lineari (H_ρ, H_σ) da H_ρ in H_σ si identificano in modo naturale con il sottospazio vettoriale generato da $H_\sigma H_\rho^*$ i cui punti fissi rispetto a G sono, per (D.4) e (D.6), in (ρ, σ); ne consegue che esiste un funtore fedele su una sottocategoria piena di RepG. Il sottospazio lineare generato da $H_\rho H_\sigma$ fornisce una realizzazione strettamente associativa del prodotto tensoriale; è ancora uno spazio di Hilbert con supporto I che, per la (D.4), coincide con $H_{\rho\sigma}$. Si verifica facilmente che questo funtore associa a $T \times S$ l' intertwiner $T \otimes S \in (u_\rho \otimes u_\sigma, u_\rho \otimes u_\sigma)$, se $T \in (\rho, \rho')$, $S \in (\sigma, \sigma')$. Pertanto, si ha un funtore *strettamente monoidale.*

Introduciamo la struttura di *simmetria.* Poiché HK genera un prodotto tensoriale di H e K, per ogni spazio di Hilbert di dimensione finita con supporto I in $\mathcal{B}$, esiste un unitario $\vartheta_{H,K} \in (HK, KH) \subset \mathcal{B}$, tale che

$$\vartheta_{H,K}\, \varphi\psi = \psi\varphi, \quad \varphi \in H, \, \psi \in K. \tag{D.9}$$

Se ρ, σ sono oggetti di $\mathcal{S}(\mathcal{B})$, $\vartheta_{H_\rho, H_\sigma}$ allaccia $u_\rho \otimes u_\sigma$ e $u_\sigma \otimes u_\rho$, e quindi è in $\mathfrak{A}$:

$$\vartheta(\rho, \sigma) \equiv \vartheta_{H_\rho, H_\sigma} \in (\rho\sigma, \sigma\rho). \tag{D.10}$$

Allora $(\mathcal{S}(\mathcal{B}), \vartheta)$ è una categoria C^* monoidale *strettamente simmetrica,* nel senso che ϑ assegna alla coppia di oggetti ρ, σ un unitario come in (D.10) con le proprietà seguenti:

$$\vartheta(\rho', \sigma') \circ R \times S = S \times R \circ \vartheta(\rho, \sigma), \quad R \in (\rho, \rho'), \, S \in (\sigma, \sigma'); \tag{D.11}$$

[1] Vale a dire: se ρ, σ sono oggetti della sottocategoria, le frecce (ρ, σ) sono tutte le frecce nella categoria ambiente

$$\vartheta(\rho\sigma, \tau) = \vartheta(\rho, \tau) \times I_\sigma \circ I_\rho \times \vartheta(\sigma, \tau); \tag{D.12}$$

$$\vartheta(\rho, \sigma) \circ \vartheta(\sigma, \rho) = I_{\rho\sigma}. \tag{D.13}$$

Si è denotato con I_τ l'elemento identità visto come intertwiner dell'oggetto τ con se stesso. Se $\mathfrak{T}$ è una sottocategoria monoidale piena di $\mathrm{End}\,\mathfrak{U}$, una *simmetria* ε per $\mathfrak{T}$ assegna ad ogni coppia di oggetti un unitario $\varepsilon(\rho, \sigma)$ che soddisfa le (D.10 - D.13).

Bibliografia

[Ara63] H. Araki. *A lattice of Von Neumann algebras associated with the quantum theory of a free Bose field.* J. Math. Phys. **4**, 1343-1362 (1963)

[Ara64] H. Araki. *Von Neumann algebras of local observables for free scalar field.* J. Math. Phys. **5**, 1-13 (1964)

[Ara71] H. Araki. *On quasifree states of CAR and Bogoliubov automorphism.* Publ. RIMS **6**, 385-442 (1971)

[Ara87] H. Araki. *Bogoliubov automorphism and Fock representations of canonical anticommutation relation.* in: Operator Algebras and Mathematical Physics, vol.62, Am. Math. Soc. (1987)

[Art] E. Artin. *Braids and permutations.* Ann. Math. **49**, 643-649 (1948)

[BF] D. Buchholz, K. Fredenhagen. *Locality and the structure of particle states.* Comm. Math. Phys. **84**, 1-54 (1982)

[Bin97] C. Binnenhei. *Implementation of endomorphisms of the CAR algebra.* Rev. Math. Phys. **7**, 833-869 (1995)

[Bin99] C. Binnenhei. *The charge quantum numbers of gauge invariant quasi-free endomorphisms.* Rev. Math. Phys. **12**, 1531-1549 (2000)

[BDMRSa] D. Buchholz, S. Doplicher, G. Morchio, J. E. Roberts, F. Strocchi. *A model for charges of electromagnetic type.* in: *Operator algebras and quantum field theory.* Internat. Press, Cambridge, 647-660 (1997)

[BDMRSb] D. Buchholz, S. Doplicher, G. Morchio, J. E. Roberts, F. Strocchi. *Asymptotic abelianness and braided tensor C^*-categories.* arXiv:math-ph/0209038

[Bir] J. S. Birman. *Braids, links and mapping class groups.* Princeton University Press (1974)

[BF] D. Buchholz, K. Fredenhagen. *Locality and structure of particle statistics.* Comm. Math. Phys. **84**, 1-54 (1982)

[BM] D. Buchholz, H. Schulz-Mirbach. *Haag duality in conformal quantum field theory.* Rev. Math. Phys. **1**, 105-125 (1990)

[BJL] H. Baumgärtel, M. Jurke, F. Lledó. *Twisted duality of the CAR-algebra.* J. Math. Phys. **43**, 4158-4179 (2002)

[Car] A. L. Carey. *Spin groups, infinite dimensional Clifford algebras and applications.* London Mathematical Society Lecture Note Series 136, Operator algebras and applications, volume 2. Cambridge University Press (1988)

[CHB] A. L. Carey, C. A. Hurst, D. M. O'Brien. *Automorphisms of the canonical anticommutation relation and index theory.* J. Funct. Anal. **48**, 360-393 (1982)

[Del] G. Dell'Antonio. *Structure of the algebras of some free systems.* Commun. Math. Phys. **9**, 81-117 (1968)

[DHR69a] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts. *Fields, observables and gauge transformations I.* Commun. Math. Phys. **1**, 1-23 (1969)

[DHR69b] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts. *Fields, observables and gauge transformations II.* Commun. Math. Phys. **15**, 173-200 (1969)

[DHR71] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts. *Local observables and particle statistics I.* Commun. Math. Phys. **23**, 199-230 (1971)

[DHR74] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts. *Local observables and particles statistics II.* Commun. Math. Phys. **35**, 49-85 (1974)

[DR86] S. Doplicher, J. E. Roberts. *C^*-algebras an duality for compact groups: why there is a compact group of internal symmetries in particle physics.* Proceedings of the International Conference on Mathematical Physics, Marseille (1986)

[DR90] S. Doplicher, J. E. Roberts. *Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics.* Commun. Math. Phys. **131**, 51-107 (1990)

[EK] D. E. Evans, Y. Kawahigashi. *Quantum symmetries on operator algebras.* Clarendon Press, Oxford, (1998)

[EO] J. P. Eckmann, K. Osterwalder. *An application of Tomita's theory of modular Hilbert algebras: duality for free Bose fields.* J. Func. Anal. **13**, 1-12 (1973)

[ET] D. E. Evans, M. Takesaki. *Operator algebras and applications, vol.2.* London Mathematical Society Lecture Notes Series 136

[Fred88] K. Fredenhagen. *Structure of superselection sectors in low-dimensional quantum field theory.* Differential geometric methods in theoretical physics (Davis, CA, 1988), 95-104, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 245, Plenum, New York (1990)

[Fred89] K. Fredenhagen. *Sum rules for spins in* $(2+1)$*-dimensional quantum field theory.* Lecture Notes in Physics **370**, (1990)

[Fred90] K. Fredenhagen. *Generalizations of the theory of superselection sectors.* In: [Kastler].

[FGR] K. Fredenhagen, M. Gabardiel, S. M. Rüger. *Scattering states of plektons (particles with braid group statistics) in* $2+1$ *dimensional field theory.* Comm. Math. Phys. **175**, 319-335 (1996)

[FRS92] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren, B. Schroer. *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras II: geometric aspects and conformal covariance.* Reviews in Mathematical Physics, Special Issue, 113-157 (1992)

[FM] J. Frölich, P. A. Marchetti. *Quantum field theory of anyons.* Lett. Math. Phys. **16**, 347- 358 (1988)

[Kastler] D. Kastler (ed.). *The algebraic theory of superselection sectors. Introduction and recent results.* World Scientific (1990)

[LRT] P. Leyland, J. E. Roberts, D. Testard. *Duality for quantum free fields.* Unpublished notes (1978)

[Mue96] M. Müger. *Disorder operators, quantum doubles, and Haag duality in 1+1 dimensions.* in: Quantum fields and quantum spacetime (Cargèse, 1996) Nato Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys. **364**, 349-356 (1997)

[Mue98] M. Müger. *Superselection structure of massive quantum field theories in 1+1 dimensions.* Rev. Math. Phys. **10**, 1147-1170 (1998)

[MS] J. Mund, R. Schrader. *Hilbert spaces for nonrelativistic and relativistic "free" plektons (particles with braid group statistics).* Proceedings of the Conference on Advances in Dynamical Systems and Quantum Physics, World Scientific (1995)

[PS] A. Pressley, G. Segal. *Loop groups.* Clarendon Press (1986)

[PR] R. J. Plymen, P.L. Robinson. *Spinors in Hilbert space.* Cambridge University Press (1994)

[Re] K. H. Rehren. *Braid group statistics and their superselection rules.* In: [Kastler]

[Ric] M. Rieffel. *A commutation theorem and duality for free Bose fields.* Commun. Math. Phys. **39**, 153-164 (1974)

[Rob74] J. E. Roberts. *Spontaneously broken symmetries and superselection rules.* Proceedings of the International School of Mathematical Physics. Università di Camerino (1974)

[Rob90] J. E. Roberts. *Lectures in algebraic quantum field theory.* In: [Kastler]

[Rui] S. N. M. Ruijsenaars. *Index formulas for generalized Wiener-Hopf operators and boson-fermion corrispondence in 2N dimensions.* Comm. Math. Phys. **124**, 553-593 (1989)

[Sch] B. Schroer. *Scattering properties of anyons and plektons.* Nucl. Phys. B **369**, 478-498 (1992)

[Sum] S. J. Summers. *Normal product states for fermions and twisted duality for CCR- and CAR-type algebras with applications to the Yukawa$_2$ quantum field theory.* Commun. Math. Phys. **86**, 111-141 (1982)

[TH] I. T. Todorov, L K. Hadjiivanov. *Monodromy representations of the braid group.* Phys. Atomic Nuclei **64**, 2059-2068 (2001)

[Wi] F. Wilczek. *Quantum mechanics of fractional spin particles.* Phys. Rev. Lett. **49**, 957-1149 (1983)